



**3.º TESTE DE MATEMÁTICA A**

12.º 3

www.ebsaas.com

2.º Período

28/01/09

Duração: 90 minutos

Nome: \_\_\_\_\_

N.º: \_\_\_\_\_

Classificação:   ,

O professor: \_\_\_\_\_

**Grupo I**

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Num pote estão seis bolas indistinguíveis ao tacto e numeradas de 1 a 6. Extrai-se, ao acaso, uma bola do pote. Se sair a bola com o número 1, lança-se um dado tetraédrico perfeito, com as faces numeradas de 1 a 4; **caso contrário**, lança-se um dado octaédrico perfeito, com as faces numeradas de 1 a 8. Qual é a probabilidade de sair o número 8 no dado octaédrico?

- (A)  $\frac{5}{6}$       (B)  $\frac{1}{8}$       (C)  $\frac{1}{6} \times \frac{1}{8}$       (D)  $\frac{5}{6} \times \frac{1}{8}$

2. “(...) se reduziria no final, com toda a probabilidade, a um mero inventário das vantagens ou desvantagens de estar morto ou de viver para sempre (...)”

AS INTERMITÊNCIAS DA MORTE, José Saramago

Para proteger as culturas de alguns agricultores, é necessário proceder ao abate de alguns pombos trocaz. Em cada tiro que dá com a sua espingarda, o Nicodemus tem uma probabilidade média de oitenta por cento de acertar num desses pombos. Se ele disparar dez vezes, qual é a probabilidade, arredondado às milésimas, de acertar em **sete** pombos trocaz?

- (A) 0,201      (B) 0,175      (C) 0,088      (D) 0,009

3. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação  $\log(3x + 1) < 1$

- (A)  $]-\infty, 3[$       (B)  $]3, +\infty[$       (C)  $]-3, \frac{1}{3}[$       (D)  $]-\frac{1}{3}, 3[$

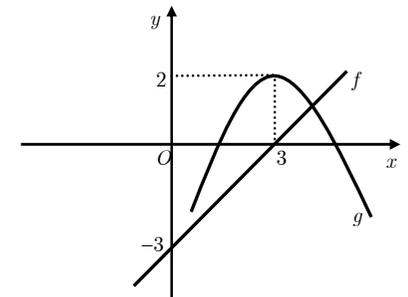
4. Numa loja de artigos electrónicos, foi possível concluir que,  $t$  semanas após o lançamento de um novo «ipod», o número total de exemplares vendidos é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = \frac{800}{1+9e^{-0,25t}}, \quad t \geq 0$$

Tendo em conta este modelo matemático, qual é a afirmação **falsa**?

- (A) Inicialmente, a loja vendeu 80 exemplares;  
 (B) A loja irá ultrapassar o milhar de exemplares vendidos;  
 (C) O número de exemplares vendidos esteve sempre a aumentar;  
 (D) Após um mês, já tinham sido vendidos mais de 180 exemplares.

5. No referencial da figura ao lado estão representados os gráficos das funções  $f$  e  $g$ , ambas de domínio  $\mathbb{R}$ .



Tal como se vê na figura:

- $f(0) = -3$ ;
- 3 é um zero de  $f$  e um maximizante de  $g$ ;
- 2 é um máximo de  $g$ .

Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) \times g(x)}{x^2 - 9}$ ?

- (A)  $\frac{1}{3}$       (B)  $+\infty$       (C) 0      (D) 3

## Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas em quatro naipes (Espadas, Copas, Ouros e Paus). Em cada naipe há um Ás, três figuras (Rei, Dama e Valete) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).

1.1. Extraem-se, **simultaneamente**, cinco cartas. De quantas maneiras se pode fazer essa extracção, se pelo menos uma carta for do naipe de espadas?

1.2. Escolhem-se agora, **com reposição**, duas cartas. Considere os seguintes acontecimentos:

$A$  : «ambas as cartas são figuras»;

$B$  : «nenhuma das cartas é do naipe de ouros».

Determine, na forma de fracção irredutível, o valor de  $P(A | B)$ .

2. “Talvez algum espírito curioso se esteja perguntando agora como foi que conseguimos apurar aquela precisa quantidade de sessenta e duas mil quinhentas e oitenta pessoas que fecharam os olhos ao mesmo tempo e para sempre. Foi muito fácil. Sabendo-se que o país em que tudo isto se passa tem mais ou menos dez milhões de habitantes e que a taxa de mortalidade é mais ou menos de dez por mil, duas simples operações aritméticas, das mais elementares, a multiplicação e a divisão, a par de uma cuidadosa ponderação das proporções intermediárias mensais e anuais, permitiram-nos obter, para cima e para baixo, uma estreita faixa numérica na qual a quantidade finalmente indicada se nos apresentou como média razoável (...)”

AS INTERMITÊNCIAS DA MORTE, José Saramago

Admita que a taxa da mortalidade da população portuguesa, por cada mil habitantes, evolui de acordo com a seguinte lei:  $t$  anos após um certo instante inicial, essa taxa é dada aproximadamente por

$$M(t) = ae^{kt} \quad (t \in \mathbb{R}_0^+) \text{ em que}$$

- $a$  é o valor da taxa da mortalidade, por cada mil habitantes, no instante inicial ( $a > 0$ )
- $k$  é uma constante real

2.1. Seja  $r$  um número real positivo.

Sabe-se que, ao fim de  $t$  anos, contados a partir do instante inicial, a taxa da mortalidade, por cada mil habitantes, é igual a  $r$  vezes a taxa no referido instante inicial.

Nestas condições, mostre que se tem  $k = \frac{\ln(r)}{t}$

2.2. Admita que, no final de 2000, a taxa da mortalidade da população portuguesa, por cada mil habitantes, foi igual a 11,5, e, no final de 2008, a taxa foi igual a 9,2.

2.2.1. De acordo com a lei acima referida, mostre que o valor da constante  $k$ , com quatro casas decimais, é  $k = -0,0279$

2.2.2. Suponha agora que a função que dá o número de milhares de indivíduos em Portugal é dado,  $t$  anos após 2000, pela função definida por

$$I(t) = -0,01t + 10300 \quad (t \in \mathbb{R}_0^+)$$

Segundo os dois modelos anteriores, irá existir um ano no decorrer do qual irão morrer sessenta mil portugueses. Utilizando o valor de  $k$  referido na alínea anterior e recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o **ano e o mês** em que tal acontecerá.

Apresente, na sua resposta:

- a expressão da função que dá o número de mortos anuais,  $t$  anos após 2000;
- o gráfico dessa função e da recta relevante, para  $t \in [0, 30]$ ;
- o ponto assinalado no gráfico necessário à resolução do problema bem como a sua coordenada relevante, arredondada às milésimas.

**Nota:**

Para obter a expressão da função pedida, tenha em atenção que a função  $M$  refere-se ao «número de mortos por cada mil» e a função  $I$  refere-se ao «número de milhares de portugueses».

3. Considere a função, de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x + 6}{2x + x^2} & \text{se } x < -2 \\ \frac{5}{x + 2} & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

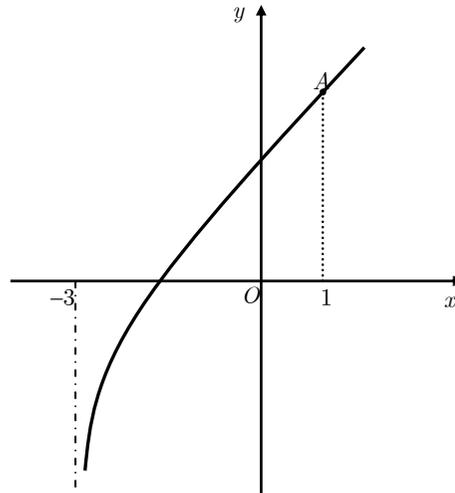
Utilizando métodos exclusivamente analíticos, averigúe se existe  $\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$

4. Na figura está representado parte do gráfico da função, de domínio  $] - 3, +\infty[$ , definida por

$$g(x) = \log_3(x + 3) + x + 1$$

Tal como a figura sugere:

- O ponto  $A$  pertence ao gráfico de  $g$  e a sua abcissa é igual a 1;
- $x = -3$  é a equação da única assíntota do gráfico de  $g$ .



Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.

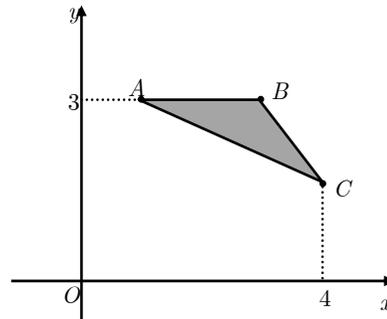
4.1. Mostre que a distância do ponto  $A$  ao eixo  $Ox$  é igual a  $\log_3 36$ .

4.2. Considere a sucessão de termo geral  $x_n = \frac{1}{n} - 3$ .

Determine o valor de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n)$

5. Considere as funções  $f$  e  $g$ , ambas de domínio  $\mathbb{R}$ , definidas respectivamente por  $f(x) = 2^x + 1$  e  $g(x) = f(x - 2)$ . Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n.  $xOy$ , um triângulo  $[ABC]$  em que:

- O ponto  $A$  pertence ao gráfico da função  $f$  e tem ordenada 3;
- O ponto  $B$  pertence ao gráfico da função  $g$  e tem ordenada 3;
- O ponto  $C$  pertence ao gráfico da função  $f^{-1}$  e tem abcissa 4.



Determine, sem recorrer à calculadora (excepto em cálculos numéricos), a área do triângulo  $[ABC]$ . Apresente o resultado arredondado às décimas.

Para calcular essa área, percorra os seguintes passos:

- Determine a abcissa do ponto  $A$ ;
- Determine a abcissa do ponto  $B$ ;
- Indique uma expressão da função  $f^{-1}$ ;
- Determine a ordenada do ponto  $C$ ;
- Calcule a área pedida.

FIM

COTAÇÕES

<b>Grupo I</b> (50 pontos)	Cada resposta certa. + 10		Cada questão errada, não respondida ou anulada. 0		
<b>Grupo II</b> (150 pontos)	1.....23	2.....51	3.....18	4.....36	5.....22
	1.1.....10	2.1.....16		4.1.....18	
	1.2.....13	2.2.1.....16		4.2.....18	
		2.2.2.....19			