Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2008/2009)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 2

www.ebsaas.com 2.º Período 28/01/09 Duração: 90 minutos

Nome: ______________ N.º: ____ Classificação: ___ , ___

O professor:

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. *"(…) se reduziria no final, com toda a probabilidade, a um mero inventário das vantagens ou desvantagens de estar morto ou de viver para sempre (…)"*

AS INTERMITÊNCIAS DA MORTE, José Saramago

Para proteger as culturas de alguns agricultores, é necessário proceder ao abate de alguns pombos trocaz. Em cada tiro que dá com a sua espingarda, o Nicodemus tem uma probabilidade média de oitenta por cento de acertar num desses pombos. Se ele disparar dez vezes, qual é a probabilidade, arredondado às milésimas, de acertar em **sete** pombos trocaz?

(A) $0{,}201$ **(B)** $0{,}175$ **(C)** $0{,}088$ **(D)** $0{,}009$

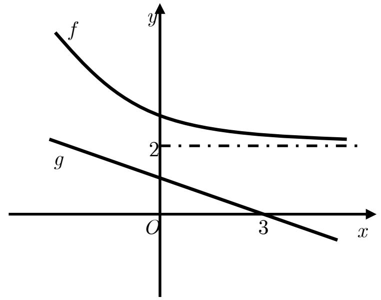
2. Num pote estão seis bolas indistinguíveis ao tacto e numeradas de 1 a 6.
Extrai-se, ao acaso, uma bola do pote. Se sair a bola com o número 1, lança-se um dado tetraédrico perfeito, com as faces numeradas de 1 a 4; **caso contrário**, lança-se um dado octaédrico perfeito, com as faces numeradas de 1 a 8.
Qual é a probabilidade de sair o número 8 no dado octaédrico?

(A) $\frac{5}{6}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{1}{6}\times\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{5}{6}\times\frac{1}{8}$

3. Indique o valor de $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-x+6}{2x+x^2}$.

(A) 2 **(B)** $+\infty$ **(C)** $-\frac{11}{2}$ **(D)** $\frac{3}{4}$

4. No referencial da figura ao lado estão representados os gráficos das funções f e g , ambas de domínio $\mathbb{R}$.



Tal como se vê na figura:

- A recta de equação $y = 2$ é uma assimptota do gráfico de f ;
- 3 é um zero de g .

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{f(x)}{g(x)}$?

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** 0 **(D)** 2

5. Numa loja de artigos electrónicos, foi possível concluir que, t semanas após o lançamento de um novo «ipod», o número total de exemplares vendidos é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = \frac{800}{1+9e^{-0{,}25t}} \quad , \ t \geq 0$$

Tendo em conta este modelo matemático, qual é a afirmação **falsa**?

(A) Inicialmente, a loja vendeu 80 exemplares;

(B) A loja irá ultrapassar o milhar de exemplares vendidos;

(C) O número de exemplares vendidos esteve sempre a aumentar;

(D) Após um mês, já tinham sido vendidos mais de 180 exemplares.

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas em quatro naipes (Espadas, Copas, Ouros e Paus). Em cada naipe há um Ás, três figuras (Rei, Dama e Valete) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).

1.1. Extraem-se, **simultaneamente**, cinco cartas. De quantas maneiras se pode fazer essa extracção, se pelo menos uma carta for do naipe de espadas?

1.2. Escolhem-se agora, **com reposição**, duas cartas. Considere os seguintes acontecimentos:

A : «ambas as cartas são figuras»;

B : «nenhuma da cartas é do naipe de ouros».

Determine, na forma de fracção irredutível, o valor de $P(A \mid B)$.

2. “*Talvez algum espírito curioso se esteja perguntando agora como foi que conseguimos apurar aquela precisa quantidade de sessenta e duas mil quinhentas e oitenta pessoas que fecharam os olhos ao mesmo tempo e para sempre. Foi muito fácil. Sabendo-se que o país em que tudo isto se passa tem mais ou menos dez milhões de habitantes e que a taxa de mortalidade é mais ou menos de dez por mil, duas simples operações aritméticas, das mais elementares, a multiplicação e a divisão, a par de uma cuidadosa ponderação das proporções intermediárias mensais e anuais, permitiram-nos obter, para cima e para baixo, uma estreita faixa numérica na qual a quantidade finalmente indicada se nos apresentou como média razoável* (…)”

AS INTERMITÊNCIAS DA MORTE, José Saramago

Admita que a taxa da mortalidade da população portuguesa, por cada mil habitantes, evolui de acordo com a seguinte **lei**: t anos após um certo instante inicial, essa taxa é dada aproximadamente por

$$M(t) = ae^{kt} \quad \left(t \in \mathbb{R}_0^+\right) \text{ em que}$$

- a é o valor da taxa da mortalidade, por cada mil habitantes, no instante inicial $(a > 0)$
- k é uma constante real

2.1. Seja r um número real positivo.

Sabe-se que, ao fim de t anos, contados a partir do instante inicial, a taxa da mortalidade, por cada mil habitantes, é igual a r vezes a taxa no referido instante inicial.

Nestas condições, mostre que se tem $k = \dfrac{\ln(r)}{t}$

2.2. Admita que, no final de 2000, a taxa da mortalidade da população portuguesa, por cada mil habitantes, foi igual a 11,5, e, no final de 2008, a taxa foi igual a 9,2.

2.2.1. De acordo com a **lei** acima referida, mostre que o valor da constante k , com quatro casas decimais, é $k = -0,0279$

2.2.2. Suponha agora que a função que dá o número de milhares de indivíduos em Portugal é dado, t anos após 2000, pela função definida por

$$I(t) = -0,01t + 10300 \quad \left(t \in \mathbb{R}_0^+\right)$$

Segundo os dois modelos anteriores, irá existir um ano no decorrer do qual irão morrer sessenta mil portugueses. Utilizando o valor de k referido na alínea anterior e recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o **ano e o mês** em que tal acontecerá.
Apresente, na sua resposta:

- a expressão da função que dá o número de mortos anuais, t anos após 2000;
- o gráfico dessa função e da recta relevante, para $t \in [0, 30]$;
- o ponto assinalado no gráfico necessário à resolução do problema bem como a sua coordenada relevante, arredondada às milésimas.

Nota:
Para obter a expressão da função pedida, tenha em atenção que a função M refere-se ao «número de mortos por cada mil» e a função I refere-se ao «número de milhares de portugueses».

3. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+x}{2x} & \text{se } x < 0 \\[2ex] \dfrac{\ln(x+1)}{2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

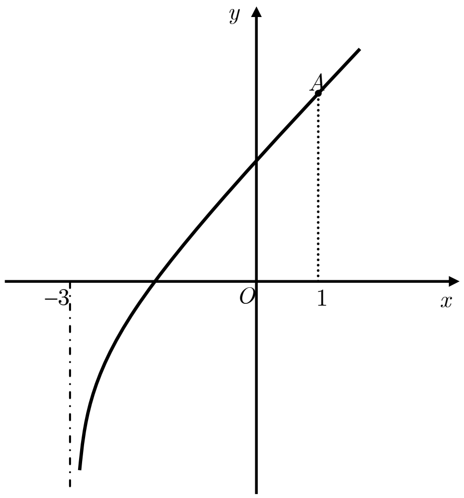
Utilizando métodos exclusivamente analíticos, averigúe se existe $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$

4. Na figura está representado parte do gráfico da função, de domínio $]-3,+\infty[$, definida por

$$g(x) = \log_3 (x+3) + x + 1$$

Tal como a figura sugere:

- O ponto A pertence ao gráfico de g e a sua abcissa é igual a 1;
- $x = -3$ é a equação da única assimptota do gráfico de g.



Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

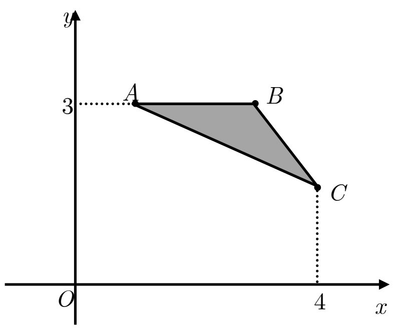
4.1. Mostre que a distância do ponto A ao eixo Ox é igual a $\log_3 36$.

4.2. Considere a sucessão de termo geral $x_n = \dfrac{n^5}{e^n} - 3$.

Determine o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)$

5. Considere as funções f e g, ambas de domínio $\mathbb{R}$, definidas respectivamente por $f(x) = 2^x + 1$ e $g(x) = f(x-2)$

Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy, um triângulo $[ABC]$ em que:



- O ponto A pertence ao gráfico da função f e tem ordenada 3;
- O ponto B pertence ao gráfico da função g e tem ordenada 3;
- O ponto C pertence ao gráfico da função f^{-1} e tem abcissa 4.

Determine, **sem recorrer à calculadora (excepto em cálculos numéricos)**, a área do triângulo $[ABC]$. Apresente o resultado arredondado às décimas.

Para calcular essa área, percorra os seguintes passos:

- Determine a abcissa do ponto A;
- Determine a abcissa do ponto B;
- Indique uma expressão da função f^{-1};
- Determine a ordenada do ponto C;
- Calcule a área pedida.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (150 pontos)	1.........................23 1.1...........10 1.2...........13	2.........................51 2.1.........16 2.2.1......16 2.2.2......19	3.........................18	4.........................36 4.1.........18 4.2.........18	5.........................22