Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2006/2007)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 2

www.esaas.com

2.º Período 29/01/08 Duração: 90 minutos

Nome: ______________ N.º: ____ Classificação: ___ , ___

O professor:

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Numa sala de Tempos Livres, existem alunos com idades entre os 15 e os 17 anos. Escolhe-se um aluno ao acaso. Sejam X e Y os acontecimentos:

X: «o aluno escolhido tem 16 anos»;

Y: «o aluno escolhido é rapaz».

Em cada uma das opções seguintes (A, B, C e D) estão representadas quatro tabelas relativas à distribuição dos alunos por idades e sexo.

Em qual das opções se tem $P\left(\overline{X} \mid Y\right) = \frac{1}{3}$?

(A)

	15 anos	16 anos	17 anos
Rapaz	2	1	5
Rapariga	2	5	7

(B)

	15 anos	16 anos	17 anos
Rapaz	2	6	2
Rapariga	2	5	6

(C)

	15 anos	16 anos	17 anos
Rapaz	2	1	6
Rapariga	3	5	7

(D)

	15 anos	16 anos	17 anos
Rapaz	2	6	1
Rapariga	3	5	7

2. *"Ao centro, havia uma pirâmide construída em degraus formados por grandes blocos."*

MUTAÇÃO POLAR, Clive Cussler

Considere, num referencial o.n., uma pirâmide rectangular cuja base é paralela ao plano xOy e em que apenas o vértice que não é da base pertence a um dos eixos coordenados, o eixo Oz .
Escolhendo, ao acaso, dois vértices dessa pirâmide, qual é a probabilidade de eles definirem uma recta perpendicular ao eixo Oz ?

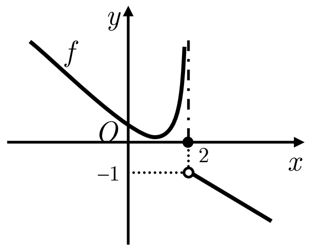
(A) $\frac{2}{7}$ **(B)** $\frac{3}{7}$ **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{3}{5}$

3. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $a = b^3$.

Qual é o valor de $\log_b\left(\frac{\sqrt{b}}{a}\right)$?

(A) $-\frac{5}{2}$ **(B)** $-\frac{3}{2}$ **(C)** -2 **(D)** -1

4. Na figura está a representação gráfica da função f , de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que:



- A recta de equação $x = 2$ é uma assimptota do gráfico de f ;
- 2 é um zero de f ;
- Existe uma sucessão $\left(u_n\right)$ tal que $\lim f(u_n) = -1$.

Qual das seguintes pode ser a expressão de $\left(u_n\right)$?

(A) $\frac{2n-1}{n+1}$ **(B)** $-\frac{1}{n}$ **(C)** $2 + e^{-n}$ **(D)** $\ln(n) - 1$

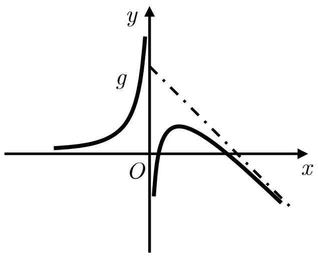
5. De uma função h, sabe-se que:

- $h(x) = x^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$
- h tem dois zeros, o 2 e o 3.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^{x-2} - 1}{h(x)}$?

(A) 1 **(B)** -1 **(C)** 2 **(D)** 3

6. Considere a função g representada graficamente ao lado. Tal como a figura sugere, tem-se que:



- O domínio de g é $\mathbb{R}\backslash\{0\}$;
- $x = 0$, $y = 0$ e $y = -x + 3$ são assimptotas do gráfico de g.

Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

(A) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ **(B)** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x + 3)$

(C) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[g(x) + x - 3 \right] = 0$ **(D)** $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando não é pedida a aproximação de um resultado, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Dez amigos, sete raparigas e três rapazes, vão tirar uma fotografia: cinco deles à frente e os outros cinco atrás.

1.1. De quantas maneiras podem estar os dez amigos na foto se na frente estiverem só raparigas?

1.2. Qual é a probabilidade de, na altura de tirarem a fotografia, os rapazes ficarem em três dos quatros extremos? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2. *"Passados minutos, o hidroavião sobrevoava a baía, erguendo-se num ângulo acentuado, para ultrapassar os picos escarpados das montanhas cinzentas que flanqueavam a enseada, apanhando depois a direcção norte, rumo ao desconhecido."*

MUTAÇÃO POLAR, Clive Cussler

Um hidroavião vai começar a descer em direcção ao mar. A partir desse momento, a sua altitude (em metros a partir do nível do mar), em função do tempo t em minutos, pode ser dada pela função definida por:

$$a(t) = \begin{cases} 10000 \times 2^{-0,2t} - 312,5 & \text{se} \quad t \leq 25 \\ 0 & \text{se} \quad t > 25 \end{cases}$$

Tal como é sugerido na expressão da função, o avião demora 25 minutos a tocar no mar.

Paralelamente, sabe-se que a velocidade desse hidroavião (em quilómetros por hora), no momento em que vai começar a descer para o mar e até parar, em função do tempo t em minutos, pode ser dada pela função definida por:

$$v(t) = \begin{cases} 800 \times 2^{-0,2t} + 210 & \text{se} \quad t \leq 25 \\ 11985 - 470t & \text{se} \quad t > 25 \end{cases}$$

2.1. Qual é, segundo este modelo, a velocidade do hidroavião no momento em que toca no mar?

2.2. Depois de aterrar, quanto tempo demorará o hidroavião a imobilizar-se?

2.3. **Sem usar a calculadora** (excepto para cálculos numéricos), determine a altitude do hidroavião no momento em que a sua velocidade é igual a 505 km/h.
Apresente o resultado em metros, arredondado às unidades.
Se usar cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

3. Seja f a função, de domínio $]0, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln x + 2$

3.1. Resolva as duas alíneas seguintes **sem recorrer à calculadora**.

3.1.1. Mostre que o gráfico de f intersecta a recta de equação $y = 1$ num ponto e determine a abcissa desse ponto.

3.1.2. Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

3.2. **Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, visualize, na janela $[0,7]\times[0,5]$, o gráfico da função f.

Reproduza, na sua folha de teste, um referencial o.n. xOy e o gráfico de f, visualizado na calculadora.

Assinale ainda os pontos A e B e as suas coordenadas sabendo que:

- A é o ponto do gráfico de f de abcissa 1
- B é o ponto do gráfico de f de ordenada $3,5$

Determine o comprimento do segmento $[AB]$, apresentando o resultado final arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. Considere um polígono convexo com n lados, $n\geq 3$: o primeiro lado mede $\log 2$, o segundo lado mede $\log 3$, o terceiro $\log 4$ e assim sucessivamente, isto é, o último lado mede $\log(n+1)$.
Usando o método de **indução matemática**, mostre que o perímetro desse polígono é igual a $\log\left[(n+1)!\right]$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (54 pontos)	Cada resposta certa: + 9	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (146 pontos)	**1.**.............**27** **1.1.**.......11 **1.2.**.......16	**2.**.............**52** **2.1.**.......16 **2.2.**.......16 **2.3.**.......20	**3.**.............**50** **3.1.1.**.....14 **3.1.2.**.....18 **3.2.**.......18	**4.**.............**17**