

2.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 13

1.º Período 14/12/12 Duração: 90 minutos
 Nome: N.º:
 Classificação: O professor:

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Nos primeiros quinze jogos para o campeonato, o jogador Tristiano Ronaldo marcou 13 golos em 108 remates que fez à baliza.

Admita que no próximo jogo se vai manter a mesma média de golos por remate.

Considere os seguintes acontecimentos:

G : «Tristiano Ronaldo marca exatamente 2 golos»

R : «Tristiano Ronaldo faz 10 remates à baliza»

Qual é, aproximadamente, o valor de $P(G | R)$?

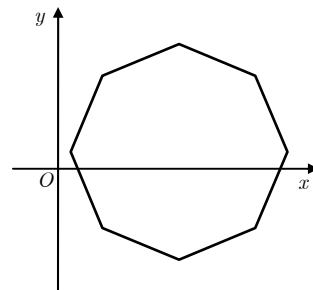
- (A) 0,234 (B) 0,343 (C) 0,380 (D) 0,485

2. A figura do lado representa um octógono regular num referencial o.n. xOy

Tal como sugere essa figura, cinco dos vértices do octógono pertencem ao primeiro quadrante e os restantes ao quarto quadrante.

Ao escolher, aleatoriamente, três vértices do octógono, qual é a probabilidade de eles definirem um triângulo com apenas dois vértices no primeiro quadrante?

- (A) $\frac{3}{56}$ (B) $\frac{13}{56}$
 (C) $\frac{5}{28}$ (D) $\frac{15}{28}$



3. No desenvolvimento de $(x^3 + 1)^{20}$, qual é o termo em x^{12} ?
 (A) 1140 (B) 4845 (C) 125 970 (D) 167 960

4. “Peter usava-a com frequência para trabalho de vigilância, um papel em que uma mulher tinha menos probabilidades de levantar suspeitas.”

VOO FINAL, Ken Follet

Para um emprego de guarda-noturno, apareceram dez candidatos, dos quais apenas um é do sexo feminino.

Vão ser entrevistados, um de cada vez, quatro dos candidatos.

Seja X a variável aleatória «número de mulheres entrevistadas de entre os quatro».

Qual é a distribuição de probabilidades da variável aleatória X ?

(A)

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

(B)

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

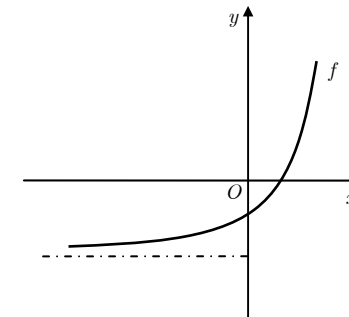
(C)

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

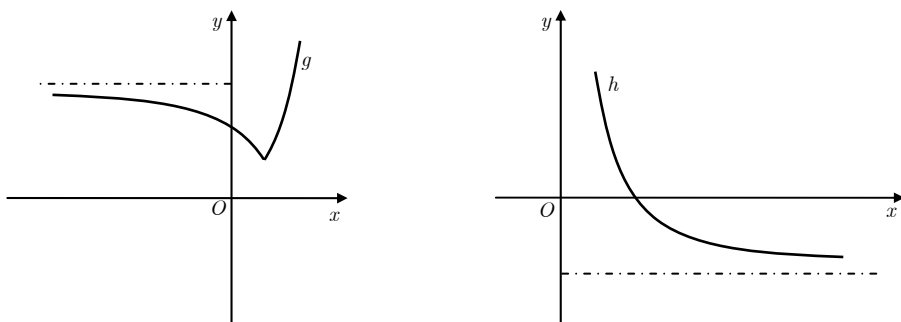
(D)

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

5. No referencial o.n. xOy a seguir está parte do gráfico da função exponencial f



Considere também, em referenciais o.n. xOy , parte dos gráficos de g e h



Quais podem ser as expressões das funções g e h ?

- (A) $g(x) = f(|x|) + 1$ e $h(x) = f(3 + x)$ (B) $g(x) = f(|x|) + 1$ e $h(x) = f(3 - x)$
 (C) $g(x) = |f(x)| + 1$ e $h(x) = f(3 + x)$ (D) $g(x) = |f(x)| + 1$ e $h(x) = f(3 - x)$

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere um baralho de cartas completo, ou seja, constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas em quatro naipes (Espadas, Copas, Ouros e Paus). Em cada naipe há um Ás, três figuras (Rei, Dama e Valete) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).

1.1. Uma instituição pretende ajudar várias famílias pobres. Uma das atividades propostas para angariar dinheiro é a realização de um jogo com cartas, que consiste no seguinte:

- Um jogador extrai, ao acaso, uma carta qualquer do baralho;
- Se sair uma carta de Paus, o jogador paga 5 euros;
- Se sair o Ás de Copas, o jogador recebe 15 euros.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável «receita do jogador» e mostre que este jogo é, naturalmente, injusto para quem joga.

1.2. Considere todas as 13 cartas de Ouros do baralho.



1.2.1. Vão ser dispostas numa mesa todas essas cartas, lado a lado, ao acaso. Qual é a probabilidade de as figuras ficarem todas juntas?

1.2.2. Um professor propôs aos seus alunos o seguinte problema:

« Vão ser retiradas, sucessivamente e sem reposição, três cartas.

De quantas maneiras pode ser feita essa extração para que haja, pelo menos, duas figuras? »

A Anastácia respondeu ${}^3C_2 \times 10 + {}^3A_3$

O Florindo respondeu ${}^{13}A_3 - {}^{10}A_3 - 3 \times {}^{10}C_2$

Ambas as respostas estão erradas. Elabore uma composição na qual:

- explique o raciocínio da Anastácia;
- explique o raciocínio do Florindo;
- proponha uma alteração em cada uma das respostas, de modo a torná-las corretas;
- explique, no contexto do problema, as razões das alterações propostas.

2. Numa certa escola secundária, há 125 alunos de um curso profissional.

2.1. Admita que a variável X , que representa a idade dos alunos do curso profissional, segue uma distribuição aproximadamente normal de valor médio 20

2.1.1. Sabe-se que 38% dos alunos têm idade superior a 22 anos.

Quantos alunos da escola têm idade compreendida entre 18 e 20 anos?

2.1.2. Suponha que o desvio padrão da distribuição anterior é igual a 1

Considere a tabela seguinte das distribuições de probabilidades de uma outra variável aleatória Y

y_i	1	2
$P(Y = y_i)$	a	b

Sabendo que $a = P(X \leq 18)$, determine o valor médio da variável Y

Apresente o valor final arredondado às centésimas (em cálculos intermédios, considere, pelo menos, três casas decimais).

2.2. Um grupo de n pessoas estão a participar numa reunião ($n > 3$). Nesse grupo, 2 são professores e os restantes alunos.

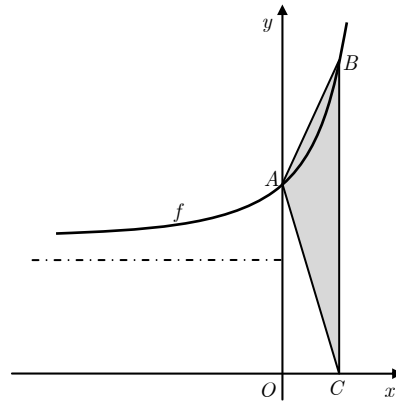
Vão ser escolhidos, ao acaso, três dessas pessoas para uma atividade.

Mostre que a probabilidade de os 2 professores serem escolhidos é igual a $\frac{6}{n^2 - n}$

3. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 2^{x+1} + k$, $k \in \mathbb{R}$
 Resolva os itens seguintes usando a calculadora apenas em cálculos numéricos.

3.1. O ponto de coordenadas $(-4,3)$ pertence ao gráfico de f
 Nestas condições, determine o valor de k

3.2. Suponha agora que $y = 3$ é a equação da assíntota do gráfico de f
 No referencial da figura ao lado está representada parte do gráfico da função f e o triângulo $[ABC]$



Sabe-se que:

- O ponto A pertence ao gráfico de f e ao eixo Oy
- O ponto B pertence ao gráfico de f e tem ordenada igual a $\sqrt{32} + 3$
- O ponto C pertence ao eixo Ox e tem a mesma abscissa de B

3.2.1. Determine, arredondado às décimas, a área do triângulo $[ABC]$

Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, três casas decimais.

3.2.2. É dada agora a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = 8 \times 2^{5-x} + 3$
 Determine o conjunto solução da condição $f(x) \leq g(x)$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: + 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0	
Grupo II (150 pontos)	1.....54 1.1.....20 1.2.1.....17 1.2.2.....17	2.....46 2.1.1.....12 2.1.2.....15 2.2.....19	3.....50 3.1.....12 3.2.1.....19 3.2.2.....19

Formulário

$$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$$

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$