Teste N.º 5

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Seja f a função definida por $f(x) = -\frac{\pi}{2} + \text{arcsen}\,(3x)$.

Quais são, respetivamente, o domínio e o contradomínio desta função?

(A) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ e $[-\pi, 0]$

(B) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(C) $[-3,3]$ e $[-\pi, 0]$

(D) $[-3,3]$ e $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

2. Quantas são as soluções da equação $10\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 9$ que pertencem ao intervalo $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}\right[$?

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

3. Seja (a_n) a sucessão de números reais definida por:

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{3}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{3-4a_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3.1. Mostre, por indução, que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{3}{2-4n}$.

3.2. Estude, quanto à monotonia, a sucessão (a_n).

3.3. Mostre que a sucessão (a_n) é limitada.

4. Seja g a função de domínio $[-9, +\infty[$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3+9x^2}}{x^2-3x} & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{1-x^2}{2x^2+x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens 4.1. e 4.2. recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto de abcissa $x = 0$.

4.2. Resolva, em $\mathbb{R}^+$, a condição $g(x) \leq \frac{1-x}{x}$.

Apresente a sua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

4.3. Considere, num referencial o.n. Oxy, a representação gráfica da função h, restrição da função g a $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de interseção do gráfico da função h com o eixo Ox;
- P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função h.

Para cada posição do ponto P, considere o triângulo $[OAP]$.

Determine as abcissas dos pontos P, com arredondamento às décimas, para os quais a área do triângulo é igual a $\frac{1}{8}$.

Na sua resposta deve:

- determinar analiticamente a abcissa do ponto A;
- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

FIM DO CADERNO 1

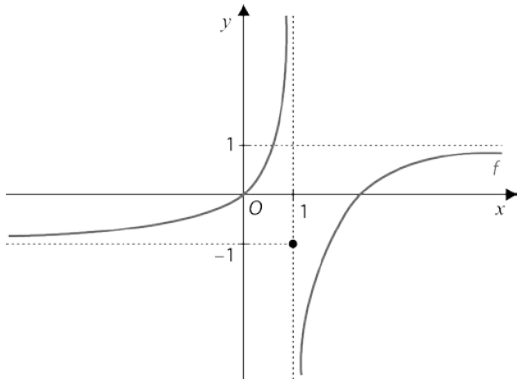
COTAÇÕES (Caderno 1)

Item								
Cotação (em pontos)								
1.	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	
8	8	15	15	15	20	20	15	**116**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

5. Na figura está parte da representação gráfica de uma função f de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.



Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. Indique o valor de $\lim_{n\to+\infty} f(u_n)$.

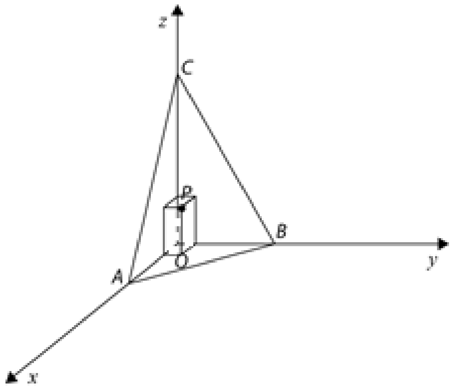
(A) -1

(B) 1

(C) $-\infty$

(D) $+\infty$

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide triangular $[OABC]$.



Os pontos A, B e C pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respetivamente.

O ponto P, de abcissa a, com $a \in \left]0, \frac{9}{5}\right[$, pertence ao plano ABC.

O ponto P desloca-se no plano ABC, de tal modo que é sempre vértice de um prisma quadrangular regular, em que os restantes vértices pertencem aos planos coordenados.

O plano ABC é definido por $3x + 2y + z = 9$.

6.1. Mostre que a área total do prisma é dada, em função de a, por $A(a) = -18a^2 + 36a$.

6.2. Determine o valor de a para o qual a área total do prisma é máxima.

6.3. Seja D o ponto de coordenadas $(1, -1, 1)$.

Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta OD com o plano ABC.

7. Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} 2^n & \text{se} \quad n \leq 2018 \\ \dfrac{(-1)^n}{n} & \text{se} \quad n > 2018 \end{cases}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é monótona.

(B) Não existe $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(C) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(D) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

8. Sejam f e g duas funções reais ambas de domínio $]-\infty, -1]$.

Sabe-se que:

- $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - 2x + 1) = 0$;
- a função g é definida por $g(x) = \frac{f(x)+x}{x-1}$.

Prove que o gráfico de g tem uma assíntota horizontal e indique uma sua equação.

9. De uma função f, diferenciável em todo o seu domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a inclinação da reta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa 3 é $45°$.

De uma função g, de domínio $]-\infty, 3[$, sabe-se que a reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao seu gráfico.

O valor de $\lim_{x\to3^-}\left(\frac{x^2-9}{f(x)-f(3)} + \frac{f(x)}{g(x)}\right)$ é:

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 6 **(D)** $+\infty$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
5.	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.**	**8.**	**9.**	
8	15	15	15	8	15	8	**84**

TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (A)

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq 3x \leq 1\} = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

Cálculo auxiliar

$-1 \leq 3x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$

Contradomínio de f:

$-\frac{\pi}{2} \leq \text{arcsen}(3x) \leq \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

$\Leftrightarrow -\pi \leq f(x) \leq 0, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

$D'_f = [-\pi, 0]$

2. Opção (D)

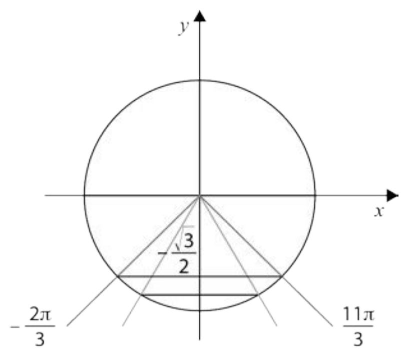
$10\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 9 \Leftrightarrow -10\text{sen}(x) = 9$

$\Leftrightarrow \text{sen}(x) = -0{,}9$

Cálculo auxiliar

$\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\left(\frac{11\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}866$



Em $\left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right[$ há duas soluções.

Em $[0, 2\pi[$ há duas soluções.

Em $\left[2\pi, \frac{11\pi}{3}\right[$ há duas soluções.

Logo, em $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}\right[$ a equação admite seis soluções.

3.

3.1. $P(n): a_n = \frac{3}{2-4n}$

(i) $P(1)$ é verdadeira

$a_1 = \frac{3}{2-4} \Leftrightarrow a_1 = -\frac{3}{2}$, o que é verdadeiro.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira.

$P(n): a_n = \frac{3}{2-4n}$

$P(n+1): a_{n+1} = \frac{3}{2-4(n+1)}$

$a_{n+1} = \frac{3a_n}{3-4a_n} \overset{\text{H.I.}}{=} \frac{3 \times \frac{3}{2-4n}}{3 - 4 \times \frac{3}{2-4n}} =$

$$= \frac{\frac{9}{2-4n}}{\frac{3(2-4n)-12}{2-4n}} =$$

$$= \frac{9}{6-12n-12} =$$

$$= \frac{9}{-6-12n} =$$

$$= \frac{3}{-2-4n} =$$

$$= \frac{3}{2-4(n+1)}$$

Por (i) e (ii), pelo princípio de indução matemática, provou-se que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{3}{2-4n}$ é uma proposição verdadeira.

3.2. $a_{n+1} - a_n = \frac{3}{-2-4n} - \frac{3}{2-4n} =$

$$= \frac{3(2-4n)-3(-2-4n)}{(-2-4n)(2-4n)} =$$

$$= \frac{6-12n+6+12n}{(-2-4n)(2-4n)} =$$

$$= \frac{12}{(-2-4n)(2-4n)}$$

Como $-2-4n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $2-4n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\frac{12}{(-2-4n)(2-4n)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (a_n) é crescente.

3.3. Como (a_n) é crescente, então $a_1 \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, $-\frac{3}{2} \leq \frac{3}{2-4n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, $\frac{1}{2-4n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então, $\frac{3}{2-4n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Provamos, assim, que $-\frac{3}{2} \leq a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, (a_n) é limitada.

4.

4.1. g é contínua em $x = 0$ sse existir $\lim_{x \to 0} g(x)$, isto é, $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$.

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x^3+9x^2}}{x^2-3x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|\sqrt{x+9}}{x(x-3)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x\sqrt{x+9}}{x(x-3)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sqrt{x+9}}{x-3} =$$

$$= \frac{-3}{-3}$$

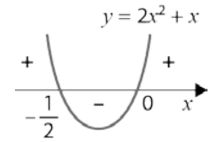
$$= 1$$

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-x^2}{2x^2+x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Logo, g não é contínua em $x = 0$.

Cálculo auxiliar

$x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -\frac{1}{2}$



4.2. Em $\mathbb{R}^+$: $g(x) = \frac{1-x^2}{2x^2+x}$

$$g(x) \leq \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{2x^2+x} \leq \frac{1-x}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{2x^2+x} - \frac{1-x}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{2x^2+x} - \frac{(1-x)(2x+1)}{x(2x+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2-(2x+1-2x^2-x)}{2x^2+x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2-2x-1+2x^2+x}{2x^2+x} \leq 0$$

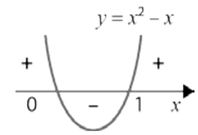
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{2x^2+x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq 1$$

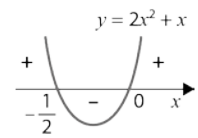
C.S. =]0, 1]

Cálculo auxiliar

$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 1$



$2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -\frac{1}{2}$



x	0		1	$+\infty$
$x^2 - x$		$-$	0	$+$
$2x^2 + x$		$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2 - x}{2x^2 + x}$		$-$	0	$+$

4.3.

- Abcissa do ponto *A*

  Em $\mathbb{R}^+$:

$$\frac{1-x^2}{2x^2+x} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \ \wedge \ 2x^2 + x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 1 \ \vee \ \underbrace{x = -1}_{\notin \mathbb{R}^+}\right) \wedge \left(x \neq 0 \ \wedge \ x \neq -\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

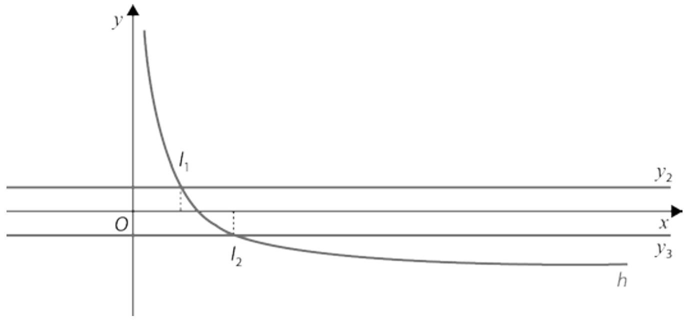
$A(1, 0)$

Seja x a abcissa do ponto P e, por conseguinte, $h(x)$ é a ordenada de P. $A_{[OAP]} = \frac{1 \times |h(x)|}{2}$

Assim, pretendemos determinar os valores de x tais que $\frac{|h(x)|}{2} = \frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow |h(x)| = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{4} \ \vee \ h(x) = -\frac{1}{4}$$



$y_1 = h(x)$

$y_2 = \frac{1}{4}$

$y_3 = -\frac{1}{4}$

$I_1\left(a, \frac{1}{4}\right)$ $\quad\quad$ $I_2\left(b, -\frac{1}{4}\right)$

$a \approx 0{,}7$ $\quad\quad$ $b \approx 1{,}7$

As abcissas dos pontos *P* são, aproximadamente, 0,7 e 1,7.

Caderno 2

5. Opção (D)

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2-1}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1^-$

Sabemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$, então, por observação do gráfico de f, $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = +\infty$.

6.

6.1. $P(a, a, c)$

Como *P* pertence ao plano *ABC*, vem que:

$3a + 2a + c = 9 \Leftrightarrow c = 9 - 5a$

Logo, $P(a, a, 9 - 5a)$

Como $a \in \left]0, \frac{9}{5}\right[$, então $a > 0$ e $9 - 5a > 0$, logo, estes valores são as medidas de comprimento das faces retangulares. Assim:

$A(a) = 2a^2 + 4a(9 - 5a) =$

$= 2a^2 + 36a - 20a^2 =$

$= -18a^2 + 36a$ c.q.d.

6.2. $A'(a) = -36a + 36$

$A'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$

a	0		1		$\frac{9}{5}$
Sinal de A'	N.D.	$+$	0	$-$	N.D.
Variação de A	N.D.	↗	Máx.	↘	N.D.

A área total do prisma é máxima para $a = 1$.

6.3. $D(1,-1,1)$

$\overrightarrow{OD} = D - O = (1,-1,1)$

OD: $(x,y,z) = (0,0,0) + k(1,-1,1), k \in \mathbb{R}$

Logo, $(k,-k,k)$, com $k \in \mathbb{R}$, é um ponto genérico de OD.

Como procuramos um ponto de OD que também pertença ao plano ABC:

$3k - 2k + k = 9 \Leftrightarrow k = \frac{9}{2}$

Então, o ponto de interseção da reta OD com o plano ABC tem coordenadas $\left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

7. Opção (D)

$u_{2018} = 2^{2018}$

$u_{2019} = -\frac{1}{2019}$

$u_{2020} = \frac{1}{2020}$

Como $u_{2018} > u_{2019}$ e $u_{2019} < u_{2020}$, concluímos que (u_n) não é monótona.

$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[(-1)^n \times \frac{1}{n}\right] = 0$, pois $-1 \leq (-1)^n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$.

8. Sabemos que a reta de equação $y = 2x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

Então, vem que:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 2$

Determinemos agora a assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to -\infty$ (note-se que D_g é limitado superiormente):

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)+x}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}+1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+1\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{2+1}{1-0} = 3$

Logo, a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal ao gráfico de g.

9. Opção (C)

Sabemos que $m = \text{tg } 45^{\circ} = 1$. Então, $f'(3) = 1$.

Como a reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de g, então $\lim\limits_{x\to3^-} g(x) = \pm\infty$ e como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$, logo, $\lim_{x\to3^-} f(x) = f(3)$

Logo, $\lim\limits_{x\to3^-}\left[\left(\frac{x-3}{f(x)-f(3)}\right) \times (x+3)\right] + \lim\limits_{x\to3^-}\frac{f(x)}{g(x)} =$

$= \frac{1}{f'(3)} \times 6 + \frac{f(3)}{\pm\infty} = 6 + 0 = 6$