

GESTÃO FINANCEIRA

Elaborado por Daniel Pimentel

Tendo por base as aulas do Prof. João Pedro Nunes

E as sebatas do site www.iscte.pt/GestaoFinanceiraI

ÍNDICE

<u>Mercados, Instrumentos e Instituições Financeiras</u>	05
Mercados e Instrumentos Financeiros	05
Mercados Monetários (MM)	05
Mercados Cambiais	08
Mercados de Capitais	10
<u>Títulos de Rendimento Fixo</u>	11
Terminologia	11
Obrigação	11
Valor de Subscrição, Valor Nominal e Valor de Cotação	11
Data de Negociação e Data de Liquidação	12
Valor de Transacção (VT) e Juros Vencidos (AI)	13
Valor de Reembolso (Vr)	14
Taxa de Cupão	14
Forma de Liquidação dos Cupões: Obrigações Clássicas, Obrigações de Cupão Zero e Obrigações de Capitalização Automática	15
Classificação de obrigações relativamente aos Direitos atribuídos aos obrigacionistas	17
Estrutura Temporal de Taxas de Juro (ETTJ)	17
Taxas de Juro Spot	17
Taxas de Juro Forward	18
Factores de Desconto	20
Avaliação de Obrigações a Taxa Fixa	20
Taxas de Rentabilidade	23
Yield to Maturity (YTM)	23
Taxa de Rendimento Realizado (TRR)	25
Estimação de Taxas de Juro Spot (com base no método Bootstrap)	27
Rating e Risco de Crédito	30
Obrigação a Taxa Variável (FRN)	33
Avaliação de Obrigações Puras a Taxa Variável	33
Avaliação de Obrigações em que $o \neq se$ (Caso Geral)	37
Medidas de Risco de Taxa de Juro	41
Duração (D)	41
Estimação do efeito da Variação das Taxas de Juros (1ª Parte)	44
Convexidade (C)	46
Estimação do efeito da Variação das Taxas de Juros (2ª Parte)	47
Estimação do efeito da Variação das Taxas de Juros (3ª Parte)	50
Imunização do Risco de Taxa de Juro	59
Imunização Convencional ou Clássica (uniperíodo)	59
Estratégias Activas	68

<u>Toerias da Carteira</u>	71
Rentabilidade e Risco	71
Carteiras de Títulos	73
Modelo de Markowitz	79
Conjunto de Possibilidades de Investimento (Feasible Portfolio Set)	79
Fronteira de Variância Mínima (Portfolio Frontier)	80
Fronteira Eficiente de Markowitz	83
Funções de Utilidade	85
Escolha da Carteira Ótima	87
Modelo de Tobin	89
Activo sem risco (f)	89
Capital Allocation Line (CAL)	89
Fronteira Eficiente Global	92
Escolha da Carteira Ótima	95
Diversificação e Risco	100
Risco de Mercado e Risco Específico	102
Capital Asset Pricing Model (CAPM)	103
Pressupostos	103
Capital Market Line (CML)	104
Security Market Line (SML)	107
Single Index Model	115
Indicadores de Avaliação da Performance	119
Índice de Sharpe (IS)	119
Índice de Treynor (IT)	120
Alpha de Jensen (α)	121
M-Squared (M2)	121
<u>Avaliação de Acções e Direitos</u>	123
Valor Contabilístico	123
Modelo de Gordon: Avaliação via Dividendos	123
Fair Value	123
Taxa de Crescimento Constante dos Dividendos (g)	127
Valor de Crescimento Zero de uma Acção (VCZ)	128
Valor Actual das Oportunidades de Crescimento (VAOC)	128
Avaliação de Acções Via Múltiplos	129
PER (Price Earning Ratio) de Mercado	129
PER (Price Earning Ratio) de Equilíbrio	130
Avaliação de Direitos	131
Introdução	131
Preço Teórico da Acção após o Aumento de Capital Social	134
Valor Teórico dos Direitos	135
Preço de Equilíbrio para o Público	136

Casos Práticos

Caso Prático 2.5	28
Caso Prático 2.7	31
Caso Prático 2.9	38
Caso Prático 2.10	40
Caso Prático 2.2	51
Caso Prático 2.11	55
Caso Prático 2.14	63
Caso Prático 2.14 (continuação)	69
Caso Prático 3.3	96
Caso Prático 3.4	105
Caso Prático 3.3 (continuação)	113
Caso Prático 3.7	113
Caso Prático 3.9	116
Caso Prático 4.1	125
Caso Prático 4.4	130
Caso Prático 4.8	137
Caso Prático 4.9	139
Caso Prático 4.5	141
<u>Exame – 2ª Época 2004/2005</u>	143

MERCADOS, INSTRUMENTOS E INSTITUIÇÕES FINANCEIRAS

O tema em causa será apresentado de seguida de forma bastante reduzida e sucinta. Pois a sebenta “Capítulo1 – Mercados, Instrumentos e IF”, que se encontra em anexo, proveniente do site <http://iscte.pt/GestaoFinanceira/>, apresenta de forma desenvolvida e bem clara os tópicos inerentes ao tema em estudo.

Como tal, avisa-se o Caro Fellow que deverá seguir atentamente a dita sebenta, constituindo esta um elemento essencial para o estudo desta matéria.

MERCADOS E INSTRUMENTOS FINANCEIROS

Existem quatro principais mercados, e são estes: Mercados Monetários, Mercados Cambiais, Mercados de Capitais e Mercados de Derivados.

Mercados Monetários (MM)

Existe um mercado monetário para cada divisa (€, \$, £, ...), e neles intervêm as várias Instituições Financeiras e Bancos Centrais (BCE, Fed, ...). Os Bancos Centrais, conforme veremos mais adiante, “controlam” toda a zona onde actuam, procurando regular as taxas da sua zona de intervenção.

As operações e instrumentos mais frequentemente usados no mercado monetário são:

- Depósitos;
- Indexantes;
- FRAS;
- REPO;
- Entre outros.

Depósitos

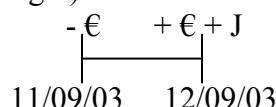
Usualmente os depósitos ocorrem no denominado Mercado Monetário Interbancário (MMI), e visam regular situações de excedente ou deficit de liquidez por parte dos bancos. Assim, o MMI pode ser definido como o “mercado através do qual as instituições financeiras realizam as operações necessárias ao equilíbrio das respectivas tesourarias, através de financiamentos e aplicações entre as mesmas, nas diversas moedas.”

O MMI funciona como o núcleo director das taxas de juro, sendo o mercado primário do sistema financeiro, ou seja, o local privilegiado de intervenção dos Bancos Centrais na condução da sua política monetária e cambial. Pois, e veja-se, se o BCE oferece-se no mercado interbancário títulos cuja a taxa de juro fosse 5%, nenhum banco com liquidez estaria disposto a emprestar dinheiro a outro banco por menos do que 5%, pois nessa situação poderia aplicar com muito menos risco o dinheiro em títulos do BCE. Na mesma lógica, as taxas do mercado interbancário influenciam também todas as

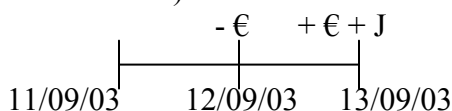
restantes taxas que os bancos praticam aos seus clientes, pois nenhum banco emprestaria dinheiro a uma empresa a uma taxa mais baixa que a praticada no MMI.

No MMI os bancos efectuam depósitos entre si para prazos de 1 dia a 1 ano, podendo cada operação ter data-valor (dia em que a operação é realizada através da transferência de fundos) do próprio dia, data-valor do dia seguinte ou data-valor do segundo dia útil seguinte. Exemplo:

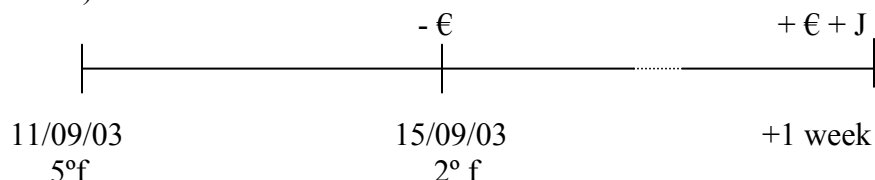
- O/N (Overnight)



- T/N (Tomorrow next)



- S/W (Spot Week)

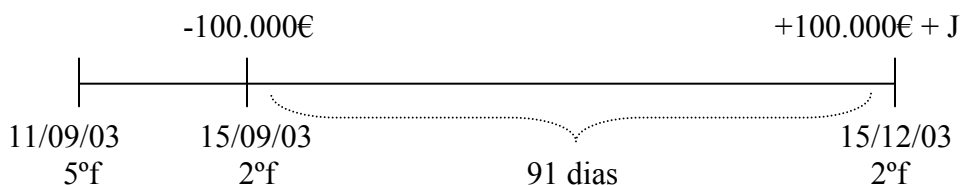


Um aspecto importante a ter em conta aquando do cálculo dos juros está no facto de para diferentes espaços monetários existirem diferentes bases de calendário. As diferentes opções poderão ser:

30 (todos os meses têm 30 dias) OU Act (todos os dias do calendário em vigência)
360 OU 365 OU Act (365 ou 366)

Outro aspecto a salientar é que cada banco do MMI tem a sua tabela Bid e Offer, ou seja, um quadro onde estão cotados os valores das taxas de juro para diferentes prazos. Neste caso, Bid significa a taxa de procura de fundos para quem cota e Offer significa a taxa de oferta de fundos para quem cota.

Exemplo 1: Hoje, dia 11/09/03, o BIC efectua depósito a 3 meses no valor de 100.000€ com data-valor de mais 2 dias úteis. Qual o valor acumulado do depósito daqui a 3 meses, sabendo que a 'Bid: 3 month' é de 2,12% e a base calendário é Act/360?



$$\text{Valor Acumulado} = 100.000 (1 + 2,12\% \cdot 91/360) = 100.000 + 535,89 = 100.535,89$$

Exemplo 2: Considere a taxa de juro 2,12% na base Act/360 a 3 meses. Qual será a taxa de juro equivalente a 3 meses, mas na base de calendário Act/365?

$$1 + 2,12\% \cdot 91/360 = 1 + i \cdot 91/365 \Leftrightarrow i = 2,149\%$$

Indexantes

O Indexante corresponde a uma média aritmética simples das taxas de juro praticadas num dado dia, para uma dada divisa e para um dado prazo. Os principais indexantes utilizados são obtidos a partir das taxas praticadas nos mercados interbancários, na medida em que estes asseguram a necessária dimensão, liquidez e transparência.

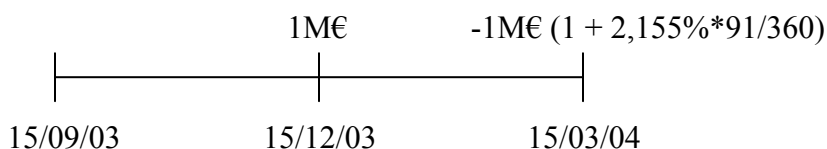
Os mais usados e conhecidos são:

- Euribor – taxa constituída a partir da contribuição de 57 instituições financeiras que operam na zona Euro, entre elas a CGD; o valor da Euribor calcula-se excluindo a 13 instituições com cotações mais altas e 13 instituições com cotações mais baixas.
- Libor – representa a taxa média de oferta de fundos para cada prazo no mercado interbancário de Londres.

FRAS (Forward Rate Agreement)

Corresponde a um acordo da fixação da taxa de juro a prazo.

Exemplo 3: A empresa SLB necessita de contrair um financiamento a 3 meses, no valor de 1.000.000€ e daqui a 3 meses. Para eliminar o risco a empresa SLB compra hoje um Euro-Fra 3x6, com cotação de 2,155% Act/360.



A desvantagem que pode advir da utilização deste instrumento será se entre 15/9/03 e 15/12/03 as taxas de juro descerem, pois a empresa já não se pode desfazer do contrato celebrado.

REPO (Repurchase Agreement)

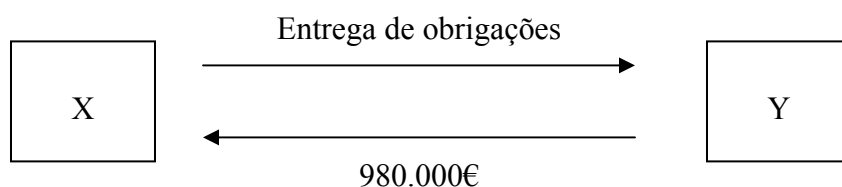
Este constitui um acordo de recompra. Ou seja, a entidade que necessita de fundos vende hoje títulos em carteira (como obrigações do tesouro) com acordo de recompra futura. Trata-se, para quem cede os fundos, de uma operação sem risco pois em caso de

incumprimento esta pode sempre vender os títulos. Como tal é natural que a taxa de juro seja mais baixa.

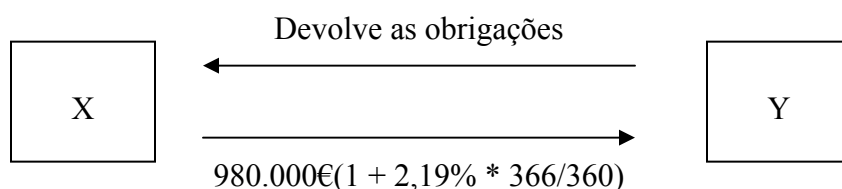
O mercado dos Repos em Portugal é organizado pela Bolsa de Valores de Lisboa e Porto (BVLP).

Exemplo 4: O Banco X vende hoje obrigações do tesouro ao Banco Y no valor de 980.000€ e com acordo de recompra a 1 ano e à taxa de 2,19% (Act/360).

Hoje é dia 11/09/03, logo a data-valor da operação será 15/09/03. Os movimentos no dia 15/09/03 serão:



Logo, daqui a 1 ano, os movimentos serão:



Sintetizando os movimentos do Banco X:



Mercados Cambiais

Os Mercados Cambiais são por excelência os mercados com maior liquidez, estando abertos 24 horas por dia, e servem para comprar e vender divisas. São compostos por dois grandes segmentos, o mercado à vista (ou spot) e o mercado a prazo (ou forward).

Mercado à Vista (spot)

O mercado cambial spot compreende a compra e venda imediata de divisas, cujo o preço se denomina taxa de câmbio (relação de troca entre duas divisas diferentes).

A regra geral das transacções cambiais spot é a de que a permuta de divisas ocorre com uma data-valor de dois dias úteis, isto é, a transacção é hoje acordada e os fluxos só têm lugar dois dias úteis mais tarde.

As cotações de compra e venda estão na óptica de quem os apresenta, veja-se:

	Bid	Ask
EUR / USD	1,1237	1,1239

Assim, qualquer entidade que queira comprar euros utilizará a cotação de venda (para quem cota), Ask 1,1239. Por outro lado, qualquer entidade que queira vender Euros utilizará a cotação de compra (para quem cota), Bid 1,1237. Sintetizando:

- Bid – taxa de compra de Euros para quem cota;
- Ask – taxa de venda de Euros para quem cota.

Exemplo 5: Hoje o Banco Americano X necessita de comprar 100.000€, qual será o contravalor a pagar em USD?

$$100.000 * 1,1239 = 112.390\$$$

Exemplo 6: Hoje o banco BCP necessita de comprar 1.000.000\$, qual será o contravalor a pagar em Euros?

$$1.000.000 / 1,1237 = 889.917,24\text{€}$$

Mercado Forward

O Mercado Forward corresponde à fixação da taxa de câmbio na compra e venda de divisas no futuro. Mais rigorosamente, o Forward poderá ser definido como “um contrato entre duas entidades sobre uma transacção futura em data definida e com preço acordado hoje. Uma das partes compromete-se a comprar (e a outra a vender) o activo A, dentro de três meses ao preço Z, no montante de Y.”

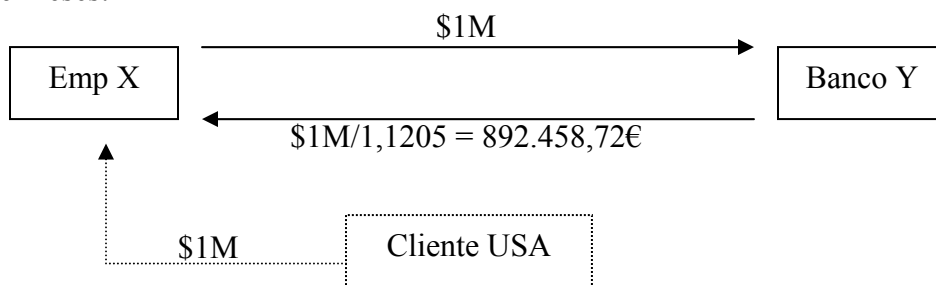
Motivações para se transaccionar Forward:

- Eliminação do Risco – ao comprar ou vender-se um forward está a fixar-se um preço futuro, pretende-se assim eliminar a incerteza e risco, depois se foi uma boa opção ou não só se sabe na data de vencimento quando se comparar com as taxas em vigor no mercado;
- Especulação – imagine-se que se tem a convicção que as acções ABC vão subir de preço, compra-se um forward e o resultado será a diferença entre do forward e o preço que vigorar no mercado à data do vencimento.

Exemplo 7: A empresa portuguesa X efectuou uma exportação no valor de 1.000.000\$ e a receber daqui a 6 meses. Para eliminar a exposição cambial a empresa celebra hoje com o Banco Y um contrato forward com a seguinte cotação:

	Bid	Ask
EUR / USD a 6 M	1,1178	1,1205

Daqui a 6 meses:



Exemplo 8: A compra a B dentro de 15 dias 5000 acções EDP ao preço de 2,85€ cada (forward de acções)

Mercados de Capitais

Os mercados de capitais são normalmente representados pelas bolsas de valores, onde se transaccionam principalmente acções e obrigações. O mercado accionista/obligacionista divide-se em:

- Mercado Primário – emissão de novas acções ou obrigações do Estado e das Empresas;
- Mercado Secundário – transacção de acções ou obrigações já existentes, estes são regra geral organizados e dirigidos pelas bolsas de valores (BVL no caso Português).

A entidade que supervisiona o funcionamento destes mercados é a Comissão dos Mercados de Valores Mobiliários (CMVM).

Índices de Mercado

Os índices de mercado respeitam fundamentalmente ao mercado accionista, embora também existam índices para o mercado das obrigações. Os índices de acções servem, então, para retratar o comportamento do mercado accionista no seu conjunto, e é uma carteira teórica de acções representativas de todo o mercado.

Os principais critérios de selecção das acções que irão fazer parte de um índice serão:

- Dimensão relativa da empresa;
- Nível de transacções das acções / Liquidez (o objectivo é o assegurar que as respectivas cotações não são facilmente manipuláveis)
- Representatividade sectorial.

Exemplo 9: Qual será a cotação do índice da turma GC1 em 12/09/03, sabendo que o índice começa a 11/09/03 com 5000 pontos?

Acções	Circulação	Cotação	
		11/09	12/09
PT	755.079	6,37	6,53

BCP	3.257.401	1,63	1,62
EDP	2.074.410	1,94	1,96

Valor da Carteira 11/09 = $755.079 \times 6,37 + 3.257.401 \times 1,63 + 2.074.410 \times 1,94 = 14.143.772,26$

Valor da Carteira 12/09 = $755.079 \times 6,53 + 3.257.401 \times 1,62 + 2.074.410 \times 1,96 = 14.273.499,09$

Índice = $14.273.499,09 / 14.143.772,26 \times 5.000 = 5.045,86$

TÍTULOS DE RENDIMENTO FIXO

Neste capítulo iremos estudar, basicamente, as Obrigações, bem como outros temas e aspectos afectas a estas, como: estrutura temporal de taxas de juro, avaliação e preço de obrigações, taxas de rendimento, entre outros.

TERMINOLOGIA

Começemos primeiramente por dar as noções básicas sobre as obrigações, para poder à posteriori proceder a um estudo mais aprofundado destas.

Obrigações

Assim, uma Obrigação poderá ser definida como sendo um título de crédito emitido por uma entidade pública ou privada, ou seja, é um título de crédito representativo de uma fracção de um empréstimo obrigacionista. Como tal, confere ao seu titular o direito de receber um conjunto de cash flows futuros pré-determinados, estes fluxos correspondem tipicamente a juros periódicos (cupões) e ao reembolso do capital.

Valor de Subscrição, Valor Nominal e Valor de Cotação

O **Valor de Subscrição (ou Issue Price)** significa o preço da obrigação em mercado primário.

O **Valor Nominal** corresponde ao capital titulado pelas obrigações, note-se que actualmente as obrigações não são transaccionadas em quantidade mas sim em valor. As possíveis relações entre valor nominal e valor de subscrição são:

- $V_s = V_n$, emissão ao par;
- $V_s > V_n$, prémio de emissão a favor do emitente;
- $V_s < V_n$, prémio de emissão a favor do obrigacionista.

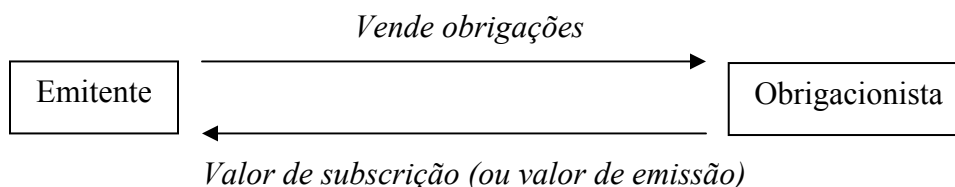
Existe, ainda, o **Valor de Cotação (V_c)** que traduz o preço observado em mercado secundário, isto é, na bolsa. Este preço encontra-se expresso em percentagem

(do valor nominal). E, tal como para qualquer activo financeiro, existem duas cotações em mercado:

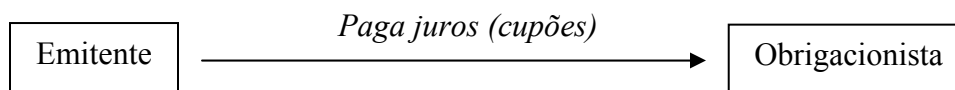
- Preço Bid – preço de compra para quem cota;
- Preço Ask – preço de venda para quem cota.

Exemplo 10:

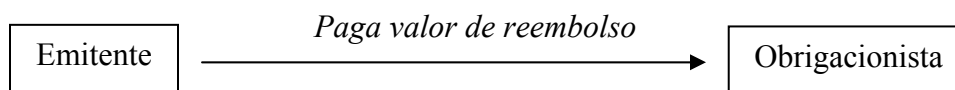
Momento 0 (data de emissão)



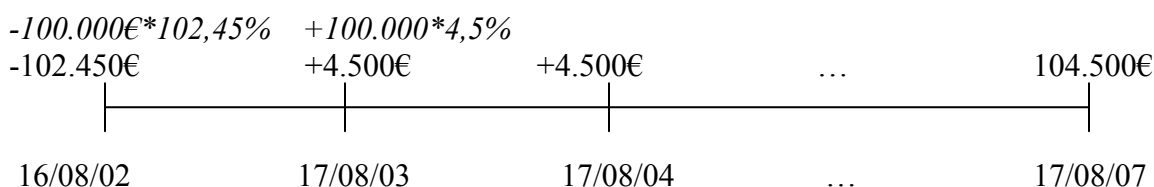
Durante a vida da obrigação (periodicamente)



Regra geral, na data de vencimento da obrigação



Exemplo 11: Comprar Bunds com um cupão de 4,5% 17/08/07 no dia 16/08/02, com um valor nominal de 100.000€ e issue price de 102,45%



Data de Negociação e Data de Liquidação

Relativamente às datas é relevante distinguir duas datas importantes, que são:

- **Data de Negociação (ou Trade Date)** – a data de negociação é a data na qual a compra ou venda de obrigações é negociada;
- **Data de Liquidação (ou Settlement Date)** – a data de liquidação é a data na qual a transacção é efectivamente liquidada, na bolsa portuguesa existe um desfaseamento de 3 dias úteis entre a data de negociação e de liquidação.

Valor de Transacção (VT) e Juros Vencidos (AI)

O **Valor de Transacção (VT)** é o preço ao qual a obrigação é efectivamente comprada ou vendida em mercado secundário. É igual ao valor de cotação mais os juros vencidos. Fórmula de cálculo: $VT = Vc + AI$

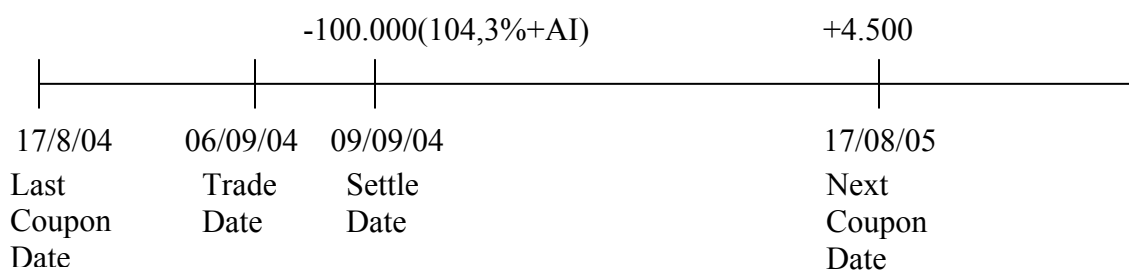
Os **Juros Vencidos (AI ou Accrued Interest)** são a parcela do próximo cupão a pagar ao vendedor da obrigação na data da liquidação. Fórmula de cálculo:

$$AI = \text{Valor do Next Cupon} * \frac{\text{n.º de dias de juros vencidos}}{\text{n.º de dias do período do cupão}}$$

Note-se que os juros recebidos variam de entidade para entidade, pois grande parte das entidades por questões fiscais apenas recebem aproximadamente 80% dos juros, mas existem certas entidades que possuem benefícios fiscais e recebem os juros na totalidade. Esta situação pode originar uma “lavagem de juros vencidos”, que é ilegal e fiscalizada pela CMVM, mas que na prática corresponde a uma entidade que receberia apenas 80% dos juros vender as suas obrigações através de uma REPO a outra entidade que recebe-se os juros na totalidade, e depois a entidade inicial voltaria a recomprar as mesmas obrigações.

Exemplo 12: No dia 06/09/04 é dada uma ordem de compra do Bunds 4,5% 17/08/07 com valor nominal de 100.000€. Qual o valor a pagar pela obrigação (VT)? Sabe-se, ainda, que:

	Bid	Ask
Vc	104,25%	104,3%



Nº de dias do período do cupão: 365d

N.º de dias de juros vencidos: 23d

$$AI = 4,5\% * 23/365 = 0,28\%$$

$$VT = 104,3\% + 0,28\% = 104,58\%$$

$$\text{Valor a pagar} = 100.000 * 104,58\% = 104.580\text{€}$$

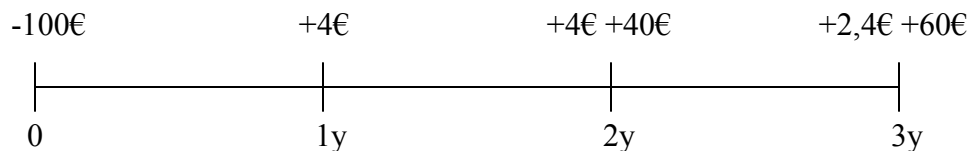
Valor de Reembolso (Vr)

O **Valor de Reembolso** é na prática o capital, ou seja, a parcela do valor nominal que é restituída ao obrigacionista. Regra geral, o Valor de Reembolso é igual ao Valor Nominal. Mas o Valor de Reembolso pode ser superior, e nesse caso existe um prémio de reembolso a favor do obrigacionista. Pode, também, por ultimo o Valor de Reembolso ser inferior ao Valor Nominal, e nessa situação existe um prémio de reembolso a favor do emitente.

Existem três formas, importantes a salientar, de como o reembolso pode ser pago, como tal estas são:

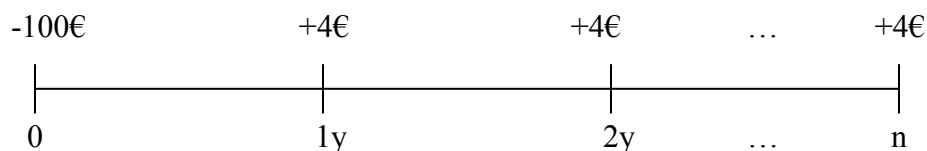
- **Reembolso Bullet** – é a forma de reembolso mais comum, isto é, o valor de reembolso é pago de uma só vez e na data de vencimento da obrigação;
- **Reembolso Periódico** – este pode ser também conhecido como Reembolso por Dedução do Valor Nominal, veja-se o exemplo seguinte para melhor perceber esta forma de reembolso;
- **Reembolso Nunca** – neste caso estamos perante as conhecidas rendas perpétuas, ou seja, nunca é feito o reembolso do valor nominal, estas obrigações são conhecidas por Peter-Pan.

Exemplo 13: O Valor Nominal é de 100€, sendo a taxa de cupão 4% (30/360) e é um cupão anual. Sabendo que o esquema de reembolso é o seguinte, 40% a 2 anos e 60% a 3 anos, diga quais são os Cash Flows associados a esta obrigação.



Estamos perante um reembolso periódico, obviamente durante o terceiro ano os juros apenas incidiram no capital que falta reembolsar, neste caso os 60€.

Exemplo 14: $V_n = 100€$, taxa de cupão = 4%, cupão anual e taxa de actualização a 5%. Sabendo que estamos perante um Reembolso Nunca calcule o valor actual.



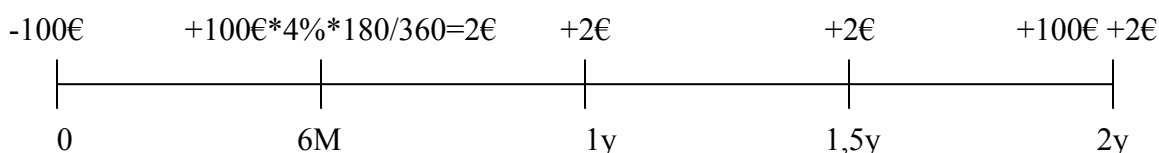
Valor Actual: $4 * A_{\infty}/i = 4 * \{\lim_{n \rightarrow \infty} 1/i[1-(1+i)^{-n}]\} = 4 * 1/i = 4/i = 4/5\% = 80€$

Taxa de Cupão

A taxa de cupão é a taxa de juro nominal anual à qual a obrigação vence juros. A taxa de juro pode ser **Fixa**, a obrigação tem igual taxa de cupão durante toda a vida, ou

pode ser **Variável**, a taxa de cupão varia durante a vida da obrigação sendo igual a um indexante mais um spread. O facto da taxa de juro ser variável (método que está bastante em voga) serve, não para efeitos especulativos mas, para reduzir o risco das empresas emitentes de obrigações, pois as taxas de juros acompanham a média de mercado (assim evita-se que a empresa emita obrigações com taxa de cupão fixa e depois se verifique grandes diferenças para as taxas verificadas no mercado).

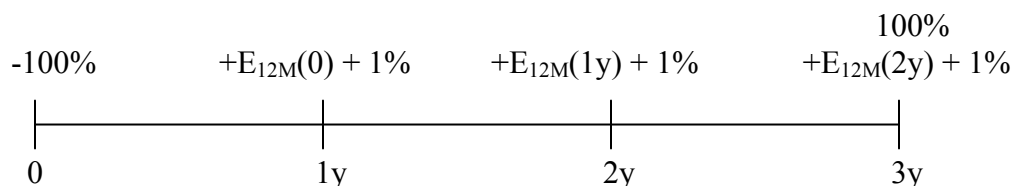
Exemplo 15: $V_n = 100\text{€}$, taxa de cupão 4% (30/360), cupão de frequência semestral, reembolso bullet e ao par daqui a dois anos. Quais os cash flows futuros da obrigação?



2% → Taxa efectiva semestral

4% → Taxa nominal anual com capitalizações semestrais

Exemplo 16: Euribor a 12Meses mais 1%, cupão anual e reembolso bullet daqui a 3 anos e ao par.

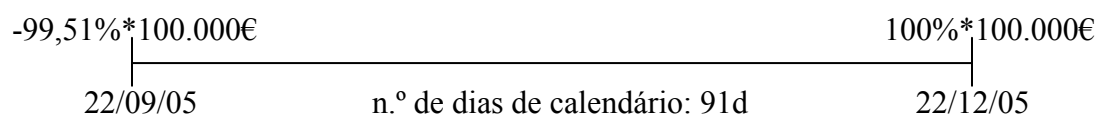


Forma de Liquidação dos Cupões: Obrigações Clássicas, Obrigações de Cupão Zero e Obrigações de Capitalização Automática

As **Obrigações Clássicas** são as que pagam juros periodicamente, ou seja, é a forma de liquidação dos cupões mais usada.

As **Obrigações de Cupão Zero** são aquelas cuja taxa de cupão é igual a 0%, sendo o Valor de Reembolso superior ao Valor de Subscrição ou Valor de Transacção. Alguns exemplos de obrigações de cupão zero poderão ser os Bilhetes do Tesouro (estas são emitidas pelo Estado a curto prazo, 3M, 6M ou 1y) ou US Treasury Bills.

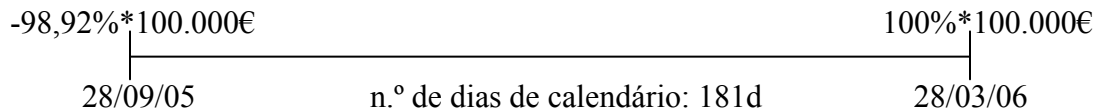
Exemplo 17: Comprou-se com settlement date no dia 22/09/05 Bilhetes do Tesouro com Valor Nominal de 100.000€, a 3 meses e com valor de cotação a 99,51%. Qual a taxa de rentabilidade efectiva anual (act/360) deste investimento?



Nota: $AI=0$, pois a taxa de cupão é 0%

$$\text{Taxa de Rendibilidade} = y \rightarrow 99,51(1+y)^{91/360} = 100 \Leftrightarrow y = 1,96\%$$

Exemplo 18: Comprou-se com settlement date no dia 28/09/05 Bilhetes do Tesouro com Valor Nominal de 100.000€, a 6 meses e com valor de cotação a 98,92%. Qual a taxa (y) de rentabilidade efectiva anual (act/360) deste investimento? E qual a taxa (z) nominal anual com capitalização semestral?



$$\text{Taxa de Rendibilidade} = y \rightarrow 98,92(1+y)^{181/360} = 100 \Leftrightarrow y = 2,18\%$$

$$\text{Taxa Nominal Anual com Capitalização Semestral} = z \rightarrow 98,92(1+z*181/360) = 100 \Leftrightarrow z = 2,17\%$$

Por último, existem ainda as **Obrigações de Capitalização Automática (OCA's)** que vencem juros periodicamente mas que apenas são liquidados na data de vencimento, juntamente com o reembolso de capital. Como se pode depreender, os juros funcionam em Regime de Juro Composto.

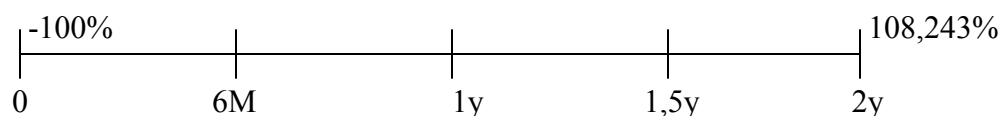
Exemplo 19: Tendo por base a seguinte OCA, diga quais são os Cash Flows futuros associados a esta obrigação. OCA:

- Vencimento a 2 anos;
- Taxa de cupão a 4% (30/360);
- Frequência semestral do cupão;
- Reembolso bullet e ao par.

$$\text{Taxa Efectiva Semestral} = 4\% * 180/360 = 2\%$$

Semestres	Cap. Inicial	Cupão	Cap. Final	Cálculo
1	100%	$100\% * 2\%$	102%	$100\%(1+2\%)$
2	102%	$102\% * 2\%$	104,04%	$100\%(1+2\%)^2$
3	104,04%	$104,04\% * 2\%$	106,1208%	$100\%(1+2\%)^3$
4	106,1208%	$106,1208\% * 2\%$	108,243%	$100\%(1+2\%)^4$

$$100(1+2\%)^4 = 108,243$$



Classificação de obrigações relativamente aos Direitos atribuídos aos obrigacionistas

Obrigações Clássicas → estas constituem a regra geral, no fundo a obrigação confere o direito a receber cupões e a receber o reembolso de capital.

Obrigações com Warrant → estas conferem o direito a comprar acções da sociedade emitente a um preço pré-estabelecido. O Warrant é, portanto, um direito de subscrição, ou seja, uma opção de compra sobre acções da sociedade emitente.

Obrigações Convertíveis → permite converter obrigações em acções da sociedade emitente, existe então um direito de conversão.

Obrigações com Clausula de Resgate Antecipado → no momento zero pode logo ser definido um reembolso antecipado, esta clausula pode ser a favor do:

- Emitente – opção de compra sobre a obrigação, estamos perante uma designada Call Option;
- Obrigacionista – opção de venda sobre a obrigação, também conhecida por Put Option.

ESTRUTURA TEMPORAL DE TAXAS DE JURO (ETTJ)

A definição de ETTJ consubstancia-se essencialmente em “um conjunto de taxas de juro em vigor, numa dada Economia, para investimentos de diferentes maturidades (sem cash flows intermédios), mas pertencentes à mesma classe de risco”.

Na prática é o conjunto de taxas de juro em vigor tendo em conta:

- Diferentes prazos;
- Uma dada divisa;
- E uma dada classe de risco de crédito.

A estrutura temporal das taxas de juro pode ser descrita de três formas exactamente equivalentes, via:

- Taxas Spot;
- Taxas Forward;
- Factores de Desconto.
- Mas nunca via yields-to-maturity.

Taxas de Juro Spot

São as taxas de juro em vigor hoje, regra geral são taxas efectivas anuais.

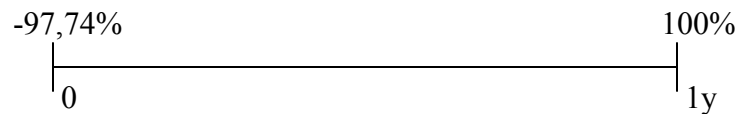
A $r(0,T)$ corresponde à taxa spot a T anos, ou seja, é a taxa de juro para um investimento a começar hoje (momento 0), sem Cash Flows intermédios e a terminar no momento T.

Exemplo 20: Taxa spot a 2 anos = $r(0,2) = 2,68\%$



Ora, o principal problema que se coloca deve-se ao facto de, regra geral, o mercado cotar preços de obrigações e não taxas spot, isto com excepção para o mercado monetário onde as taxas de juros são cotadas para maturidades até um ano. Assim, para ultrapassar esta limitação existem duas possibilidades, ou pagar aproximadamente 1500€ por mês ah Bloomberg/Reuters ou converter o preço da obrigação em taxas spot (veja-se no seguinte exemplo).

Exemplo 21: Calcule a taxa spot a 1 ano, sabendo que o mercado cota Bilhetes do Tesouro a 1 ano a 97,74%, na base de calendário Act/Act.



$$97,74(1+r(0,1)) = 100 \Leftrightarrow r(0,1) = 100/97,74 - 1 \Leftrightarrow r(0,1) = 2,31\%$$

Taxas de Juro Forward

É uma taxa esperada para vigorar numa data futura.

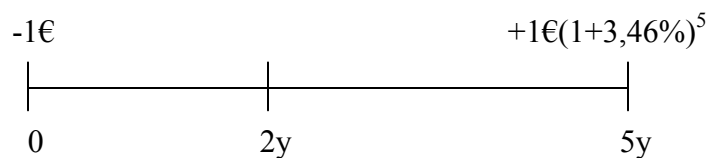
A $f(0,t,T)$ corresponde a uma taxa forward de t a T . É no fundo a taxa de juro esperada hoje (momento zero) para vigorar entre o momento t e T .

Forma de cálculo das taxas spot:

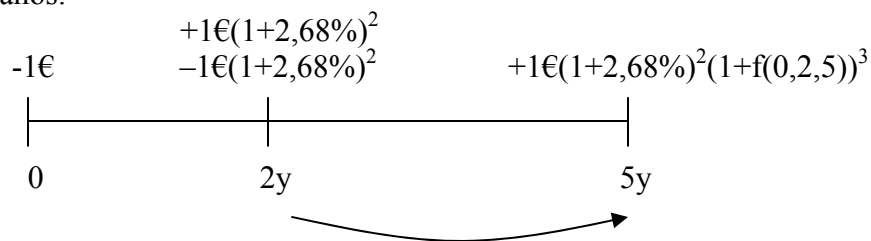
$$[1+r(0,T)]^T = [1+r(0,t)]^t \cdot [1+f(0,t,T)]^{T-t}$$

Exemplo 22A: Tendo por base as seguintes taxas suponha que investe hoje (momento zero) 1€ a 5 anos.

	2y	5y
Taxas Spot	2,68%	3,46%



Exemplo 22B: Continuando o Exemplo 22A, faça um esquema caso investisse hoje (momento zero) 1€ a 2 anos, e depois decidisse após esses 2 anos renovar totalmente o depósito por mais 3 anos.



Taxa spot a 3 anos a vigorar daqui a 2 anos

Agora, e sabendo que os valores acumulados do caso A e B deverão ser os mesmos, basta estabelecer a equação e calcular a taxa forward. Note-se que o equilíbrio entre oferta e procura de taxas de juro leva a ajustamentos (das taxas) de modo a que os valores acumulados sejam iguais.

$$\begin{aligned}(1+r(0,5))^5 &= (1+r(0,2))^2(1+f(0,2,5))^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1+3,46\%)^5 &= (1+2,68\%)^2(1+f(0,2,5))^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(0,2,5) &= 3,98\%\end{aligned}$$

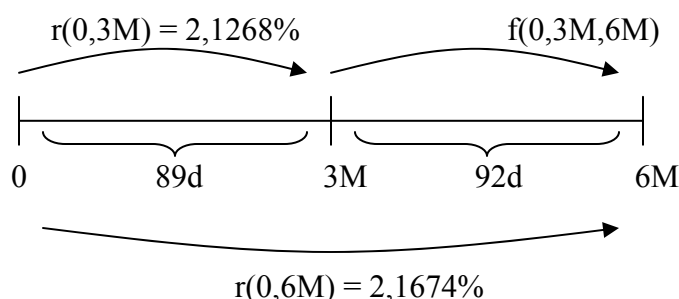
Exemplo 23: Qual a taxa a 3 anos esperada pelo mercado para vigorar daqui a 1 ano, sabendo que $r(0,1)=2,31\%$ e $r(0,4)=3,25\%$.

$$\begin{aligned}(1+r(0,4))^4 &= (1+r(0,1))(1+f(0,1,4))^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(0,1,4) &= (1,0325^4/1,0231)^{1/3} - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(0,1,4) &= 3,565\%\end{aligned}$$

Para se poder comparar esta ultima taxa calculada apenas se o pode fazer com taxas de prazos iguais, com a mesma base de calendário e com as mesmas capitalizações. Assim, esta $f(0,1,4)$ poderá ser comparada com a $r(0,3)$, logo como $f(0,1,4)>r(0,3)$, pois $3,565\%>2,99\%$, existe uma expectativa de subida da taxa de juro.

Exemplo 24: Calcule a taxa de juro a 3 meses esperada hoje (16/02/05) pelo mercado para vigorar daqui a 3 meses, na base de calendário Act/360.

$$f(0,3M,6M) = f(16/02/05, 16/05/05, 16/08/05) = ?$$



Note-se que estas ultimas taxas ($r(0,3M)$ e $r(0,6M)$) foram extraídas da coluna “Yield” do quadro “Taxas de juro forward interbancárias do euro”, logo está em causa o mercado monetário e como se sabe neste as taxas são sempre taxas anuais nominais. Logo, e voltando a frisar, estamos perante taxas de juro nominais, como tal os cálculos serão ligeiramente diferentes.

$$\begin{aligned}(1+r(0,6M)*181/360) &= (1+r(0,3M)*89/360).(1+f(0,3M,6M)*92/360) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1+2,1674\%*181/360) &= (1+2,1268\%*89/360).(1+f(0,3M,6M)*92/360) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(0,3M,6M) &= 2,195\%\end{aligned}$$

Esta taxa $f(0,3M,6M)$ será então uma taxa nominal anual com capitalizações trimestrais, assim pode ser directamente comparada com a taxa $r(0,3M)$, pois estão ambas referenciadas para prazos iguais, com iguais capitalizações e iguais bases de calendário. Assim, procedendo à comparação destas taxas de juro conclui-se que há uma expectativa de subida das taxas, pois $f(0,3M,6M) > r(0,3M) \Leftrightarrow 2,195\% > 2,1268\%$.

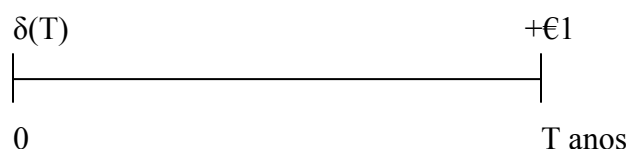
Nota: Caso os cálculos fossem feitos da forma como a seguir se apresenta a $f(0,3M,6M)$ seria uma taxa efectiva anual.

$$(1 + 2,1674\% \cdot 181/360) = (1 + 2,1268\% \cdot 89/360) \cdot (1 + f(0,3M,6M))^{92/360} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(0,3M,6M) = 2,213\%$$

Factores de Desconto

O factor de desconto para a maturidade T , $\delta(T)$, corresponde ao valor actual de uma unidade vencível no momento T .

$\delta(T) = P(0, T) =$ Factor de desconto a “ T ” anos



$$\delta(T) = 1€ / (1 + r(0, T))^T$$

Exemplo 25: Calcule o factor de desconto a 2 anos, sabendo que a taxa spot a 2 anos é igual a 2,68% (taxa efectiva anual do mercado de dívida pública alemã)

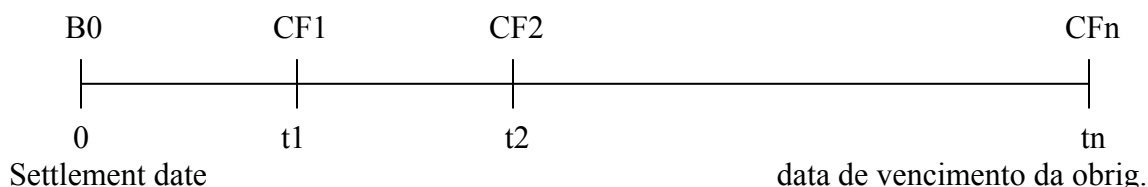
$$\delta(2) = 1 / (1 + 2,68\%)^2 = 0,94848$$

Exemplo 26: Sabendo que a Euribor a 3 Meses é igual a 2,2% na base de calendário Act/360 e que o próximo trimestre possui 91 dias de calendário, calcule o factor de desconto a 3 Meses.

$$\delta(3M) = 1 / (1 + 2,2\% \cdot 91/360) = 0,9945$$

AValiação de Obrigações a Taxa Fixa

De forma geral a avaliação das obrigações faz-se calculando o seu Fair Value, B_0 , que corresponde ao somatório do valor actual dos seus cash flows futuros.

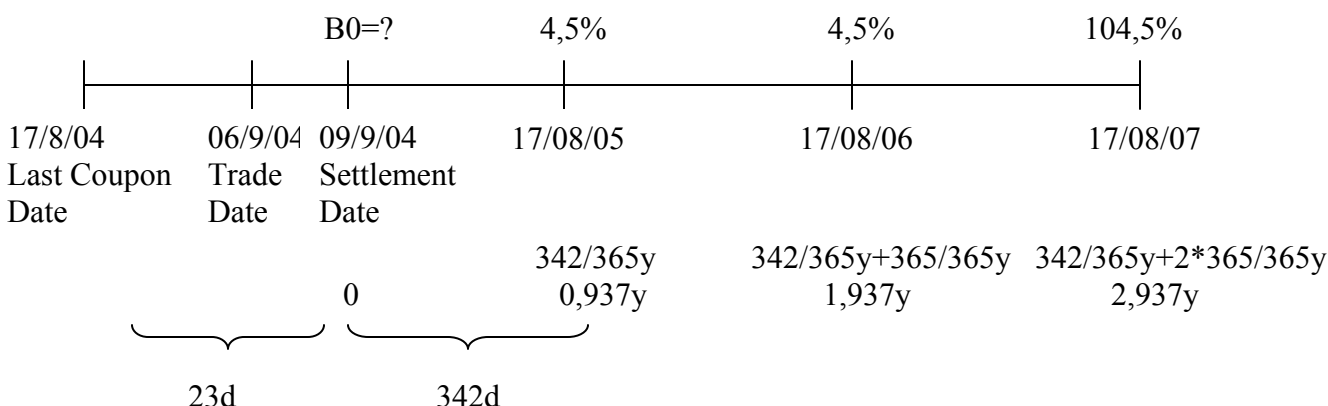


$$B0 = CF1/[1+r(0,t1)]^{t1} + CF2/[1+r(0,t2)]^{t2} + \dots + CFn/[1+r(0,tn)]^{tn} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{CF_j}{[1+r(0,t_j)]^{t_j}} \quad \text{sendo } CF_j \text{ o cash flow a gerar pela obrigação no momento } t_j \text{ (} j=1,\dots,n \text{) e}$$

$r(0,t_j)$ a taxa de juro *spot* a t_j anos adequada ao nível de risco de crédito da obrigação

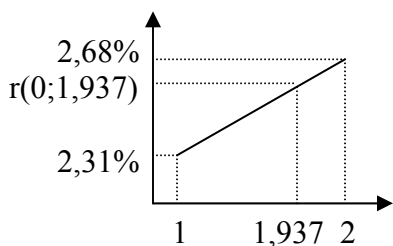
Exemplo 27A: Considere o Bund 4,5% 17/08/07 e admita que a trade date era 06/09/04. Sabendo que a taxa spot está na base Act/Act, calcule o valor justo da obrigação.



Cálculo das Taxas Spot → usando as taxas presentes no quadro “Bloomberg Fair Value”, das obrigações Bund, calcula-se as respectivas taxas necessárias através de uma interpolação linear. Este cálculo pode ser feito através de uma lógica regra de três simples, ou através da aplicação de uma fórmula (que no fundo é um resumo mais rápido da regra de três simples). Assim e sabendo as seguintes taxas:

- $r(0,6M) = 2,14\%$
- $r(0,1) = 2,31\%$
- $r(0,2) = 2,68\%$
- $r(0,3) = 2,99\%$

Regra de Três Simples:



$$\frac{2-1}{1,937-1} = \frac{2,68\%-2,31\%}{r(0;1,937)-2,31\%}$$

$$r(0;1,937) = 2,65669\%$$

Formula de Cálculo: (pl = prazo longo, pi = prazo intermédio, pc = prazo curto)

$$r(0, pi) \approx r(0, pc) + [r(0, pl) - r(0, pc)] * [(pi - pc) / (pl - pc)]$$

$$r(0;0,937) \approx r(0; 0,5) + [r(0; 1) - r(0; 0,5)] * [(0,937 - 0,5) / (1 - 0,5)]$$

$$\approx 2,14\% + [2,31\% - 2,14\%] * 0,874 \approx 2,28858\%$$

$$r(0;2,937) \approx 2,68\% + [2,99\% - 2,68\%] * [(2,937 - 2) / (3 - 2)] \approx 2,97\%$$

Cálculo do Fair Value ou B0:

$$B0 = 4,5\% * [1+r(0;0,937)]^{-0,937} + 4,5\% * [1+r(0;1,937)]^{-1,937} + 104,5\% * [1+r(0;2,937)]^{-2,937}$$

$$= 104,58\%$$

Exemplo 27B: Tendo por base o exemplo 27A formule uma decisão de trading sabendo que a obrigação está cotada a 104,25/104,3.

Começemos por perceber como a Bloomberg chega aos valores justos da obrigação:

- $AI = 4,5\% * 23/365 = 0,2835616$
- $B0 = 104,58$
- $Bloomberg = B0 - AI = 104,58 - 0,2835616 = 104,3$

Como é perceptível ao B0 deverá ser deduzido os juros vencidos (AI), pois aquando da compra das obrigações o comprador deverá pagar os juros vencidos ao vendedor.

Para se poder formular a decisão de trading devemos comparar B0 com VT ($=Vc + AI$).

$B0 > VT_{ask} \rightarrow$ Comprar (o preço de mercado vai subir, logo comprar enquanto possível)

$B0 < VT_{bid} \rightarrow$ Vender (o preço de mercado vai descer, logo vender enquanto possível)

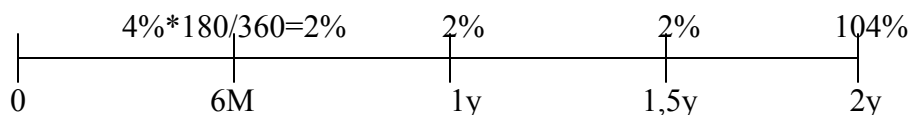
$B0 < VT_{ask} \rightarrow$ Não comprar

$B0 > VT_{bid} \rightarrow$ Não vender (pois espera-se que o preço de mercado venha a subir)

	Vc	AI	VT	B0		
Bid	104,25	0,28356	104,5336	104,58	$VT_{bid} < B0$	Não vender
Ask	104,3	0,28356	104,5836	104,58	$VT_{ask} > B0$	Não comprar

Exemplo 28: Formule uma decisão de trading, sabendo que $VT_{bid} = 103,8$ e $VT_{ask} = 103,85$, da seguinte obrigação:

- Vencimento daqui a 2 anos;
- Taxa de cupão igual a 4% (30/360);
- Frequência semestral do cupão;
- Reembolso Bullet;
- Valor de Reembolso igual a 102%.



$$B0 = 2/(1+2\%)^{0,5} + 2/(1+2,5\%) + 2/(1+2,75\%)^{1,5} + 104/(1+3\%)^2 = 103,88$$

$B0 > VT_{bid} \Leftrightarrow 103,88 > 103,8 \rightarrow$ Não vender

$B0 > VT_{ask} \Leftrightarrow 103,88 > 103,85 \rightarrow$ Comprar

TAXAS DE RENTABILIDADE

Yield to Maturity (YTM)

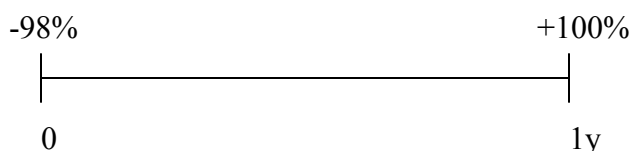
A YTM pretende traduzir a taxa de rentabilidade (efectiva anual) gerada pela compra de uma obrigação, desde que a mesma seja mantida em carteira até à data de vencimento.

A YTM é a taxa de actualização “FLAT”, tal que, $VT = \sum \text{Valor actual dos CF's futuros}$.

$$-VT_0 + \sum_{j=1}^n \frac{CF_j}{(1+YTM)^{t_j}} = 0$$

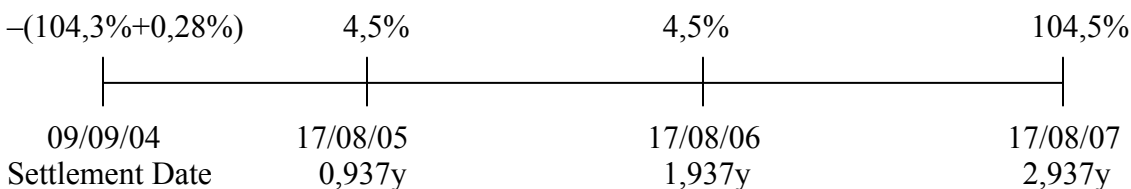
Tal como nas taxas spot ou no valor de cotação das obrigações (em mercado secundário), para as YTM também existe a Yield Bid e a Yield Ask. A Yield Bid representa a taxa de rentabilidade para quem vou vender a obrigação, estando obviamente associada ao preço Bid (preço ao qual vendo a obrigação). A Yield Ask corresponde à taxa de rentabilidade associada ao preço Ask quando se compra uma obrigação.

Exemplo 29: UM BT a 1 ano está actualmente cotado a 98%. Calcule a taxa de rentabilidade efectiva anual associada à compra hoje do BT e manutenção em carteira até ao vencimento.



$$98 = 100 / (1+YTM) \Leftrightarrow YTM = 2,04\%$$

Exemplo 30: Considere o Bund 4,5% 17/08/07 e admita que a trade date era 06/09/04. Sabendo que a taxa spot está na base Act/Act e o Valor de Cotação é 104,25/104,3; calcule a YTMask.



$$104,58\% = 4,5\%/(1+YTM)^{0,937} + 4,5\%/(1+YTM)^{1,937} + 104,5\%/(1+YTM)^{2,937} \Leftrightarrow YTM = 2,9487\%$$

Limitações da YTM

A YTM é a forma mais usada para analisar a rentabilidade das obrigações, mas não é todavia a melhor forma, pois apresenta algumas limitações, conforme vamos apresentar de seguida.

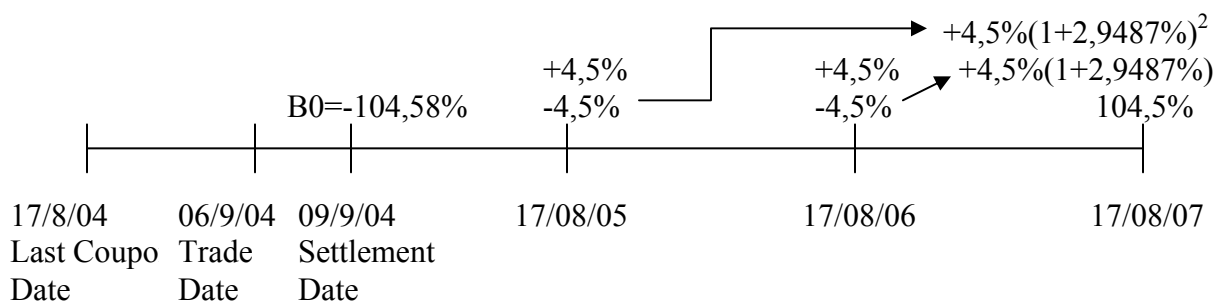
Assim, as limitações da YTM, passíveis de serem avaliadas a nível teórico num exame, são:

1. **A YTM pressupõe que a obrigação é mantida em carteira até ao seu vencimento.** Regra geral, o que acontece é que a obrigação pode mudar de mão, em mercado, várias vezes até ao seu vencimento.
2. **A YTM pressupõe que todos os Cash-Flows intermédios são reinvestidos a uma taxa que é a própria YTM.** Esta é a mais importante limitação da YTM porque a Taxa de Rentabilidade que um investidor consegue ao fim de 1, 2 ou mais anos pode perfeitamente ser diferente do valor da YTM. Veja-se de seguida um exemplo prático que explicita isto mesmo.

Exemplo 31: Calcule a Taxa de Rentabilidade Efectiva Anual (TRR) duma Obrigação, sabendo que:

- a) A Obrigação é comprada ao $V_c = 104.30\%$
- b) A Obrigação é mantida em carteira até à data de vencimento
- c) Todos os Cash-Flows intermédios são reinvestidos à taxa de 2.9487% (igual à YTM).

Note-se que as duas primeiras premissas mantêm a situação das obrigações que tínhamos acabado de estudar, e a 3ª apenas leva a que se reinvestam os Cash-Flows gerados a uma taxa igual à YTM. (Se as pessoas pegassem nestes Cash-Flows intermédios e os guardassem debaixo dos seus colchões em casa, seria o mesmo que capitalizá-los a uma taxa de 0% até à data de vencimento).



Embora não pareça à 1ª vista, este retirar dos Cash-Flows e reinvestir a uma taxa igual à YTM acaba por facilitar o cálculo da taxa de rentabilidade. Assim, a TRR há-de ser tal que:

$$104.58\% \cdot [1 + \text{TRR}]^{2.937} = 4.5\% \cdot (1 + 2.9487\%) + 4.5\% \cdot (1 + 2.9487\%)^2 + 104.5\% \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{TRR} = 2.9487\%$$

Não seria possível ter chegado a este mesmo resultado se os Cash-Flows tivessem sido reinvestidos a uma taxa diferente da YTM (ou se não fossem sequer reinvestidos). Assim, se por exemplo a alínea c) deste problema passasse a ter o valor de 2%, a TRR seria certamente mais baixa que 2.9487%, passando para:

$$104,58\% \cdot [1 + \text{TRR}]^{2,937} = 4,5\% \cdot (1 + 2\%) + 4,5\% \cdot (1 + 2\%)^2 + 104,5\% \Leftrightarrow \text{TRR} = 2,9098\%$$

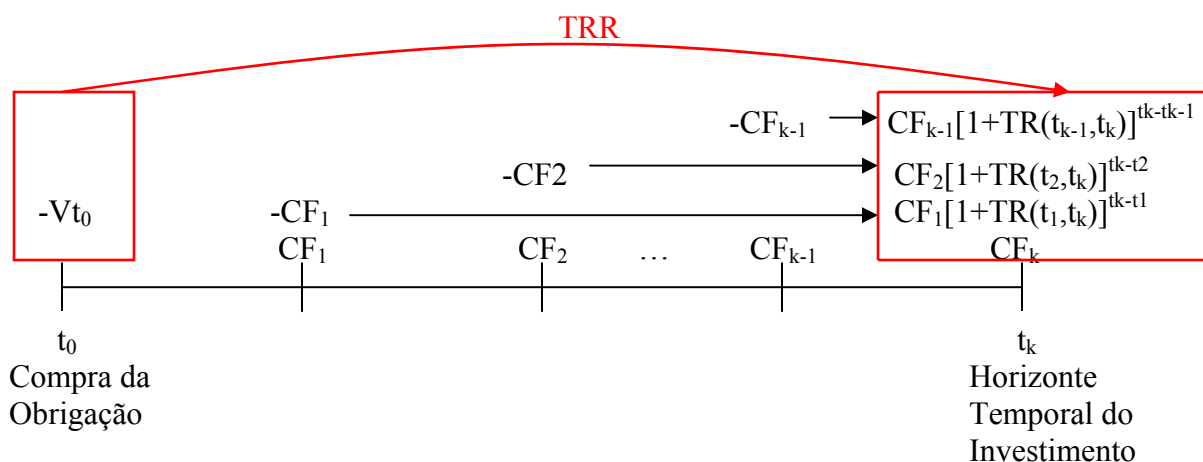
Desta forma, se a 06/09/2004 o investidor achar que irá conseguir reinvestir os seus Cash-Flows intermédios a uma taxa de 2%, sabe que a Taxa de Rentabilidade do seu negócio será de 2.9098%, se achar que consegue reinvestir estes Cash-Flows a 2.9487% sabe que esta será precisamente a sua YTM.

Deste ponto surge a definição de Risco de Reinvestimento, que é o risco associado a conseguir-se ou não se conseguir reinvestir os Cash-Flows's intermédios a uma taxa igual à YTM.

- 3. Duas obrigações com igual maturidade e com igual nível de risco de crédito** (ou seja, risco de não serem pagos os Cash-Flows futuros ao obrigacionista), **podem possuir diferentes taxas YTM**. Um exemplo disto encontra-se na página 9 dos apontamentos da cadeira, sendo esta a menos importante das 3 limitações da YTM.

Taxa de Rendimento Realizado (TRR)

A TRR é a taxa de rendibilidade efectiva (anual) gerada por uma obrigação, considerando que a obrigação pode ser vendida antes do vencimento e os Cash Flow's podem ser reinvestidos a diferentes taxas.



$\text{TR}(t, T)$ = Taxa de Reinvestimento desde t até T

$$\text{TRR: } V_{t_0}(1 + \text{TRR})^{t_k - t_0} = CF_1[1 + \text{TR}(t_1, t_k)]^{t_k - t_1} + \dots + CF_{k-1}[1 + \text{TR}(t_{k-1}, t_k)]^{t_k - t_{k-1}} + CF_k$$

Passa, então, haver apenas um valor inicial VT0 e um valor final que corresponde a todos os Cash Flow's capitalizados.

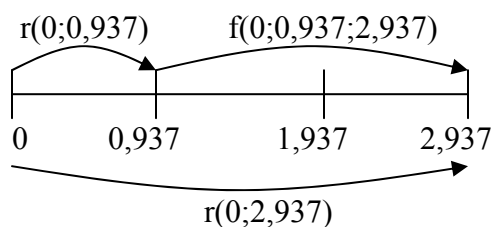
Exemplo 32: Estime na trade date 6/9/04 a TRR da Bund 4,5% 17/08/07, assumindo que:

- Obrigação comprada ao Valor de Cotação igual a 104,3%;
- Obrigação mantida em carteira até ao dia 17/8/07;
- CF's intermédios reinvestidos às actuais taxas forward.



Cálculo Taxas Forward, sabendo que:

- $r(0;0,937) = 2,29\%$
- $r(0;1,937) = 2,657\%$
- $r(0;2,937) = 2,97\%$



$$(1+2,97\%)^{2,937} = (1+2,29\%)^{0,937} * (1+f(0;0,937;2,937))^2 \Leftrightarrow f(0;0,937;2,937) = 3,289\%$$

$$(1+2,97\%)^{2,937} = (1+2,657\%)^{1,937} * (1+f(0;1,937;2,937)) \Leftrightarrow f(0;1,937;2,937) = 3,578\%$$

Cálculo da TRR:

$$104,58(1+TRR)^{2,937} = 4,5(1+3,289\%)^2 + 4,5(1+3,578\%) + 104,5 \Leftrightarrow$$

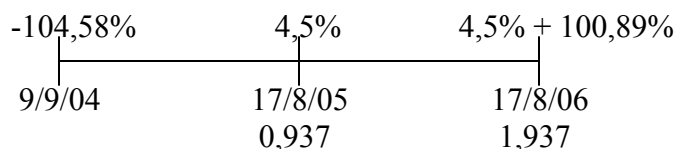
$$\Leftrightarrow TRR = 2,968\%$$

Note-se que esta TRR é superior à YTM (=2,9487%), pois os CF's são reinvestidos a uma taxa superior.

Exemplo 33: Calcule a Taxa de Rentabilidade (efectiva anual) associada ao Bund 4,5% 17/08/07, sabendo que:

- A obrigação foi comprada com Settlement date de 9/9/04 ao $V_c = 104,3\%$;
- Os CF's foram reinvestidos à taxa de 3,002%;

- A obrigação foi vendida no dia 17/08/06 (imediatamente após a liquidação do cupão ao Valor de Cotação de 100,89%).



Note-se que os juros vencidos são 0%.

$$104,58(1+TRR)^{1,937} = 4,5(1+3,002\%) + 4,5 + 100,89 \Leftrightarrow TRR = 2,655\%$$

ESTIMACÃO DE TAXAS DE JURO SPOT (com base no método Bootstrap)

Regra geral as Taxas Spot não são directamente observáveis no mercado, pois este normalmente cota apenas preços das obrigações. Como solução deve-se estimar as taxas spot implícitas aos preços das obrigações, processo este que pode ser feito por diferentes métodos de estimação, sendo que apenas nos interessa para estudo o **Método Bootstrap**.

Veja-se, então, de seguida como se aplica este método.

1) Com base no preço de uma obrigação com vencimento daqui a um período de tempo, calcula-se $r(0,1)$.

$$V_{t0} = CF_1 / [1+r(0,1)]$$

2) Com base no preço de uma obrigação com vencimento daqui a dois períodos de tempo e sabendo já $r(0,1)$, calcula-se $r(0,2)$.

$$V_{t0} = CF_1 / [1+r(0,1)] + CF_2 / [1+r(0,2)]^2$$

n) Este processo continua assim sucessivamente.

Exemplo 34: Considere as Obrigações do Tesouro Português com cupão anual (a base de calendário é 30/360). Calcule as taxas Spot sabendo:

	Vencimento	Tx Cupão	Vc
BT 6M	6M	0%	98,44%
BT 12M	1y	0%	96,39%
OT 1y	2y	4%	99,55%
OT 2,5y	2,5y	4%	99,02%

- Taxa Spot a 6M

$$98,44 = 100/[1+r(0,6M)]^{0,5} \Leftrightarrow r(0,6M) = 3,3\%$$

$$\delta(6M) = 98,44\%$$

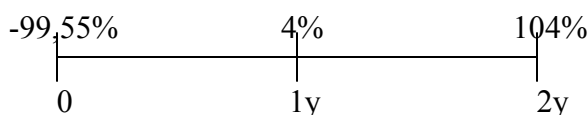
Veja-se que a taxa Spot a 6M é igual à taxa de rendibilidade efectiva anual

- Taxa Spot a 1y:

$$96,39 = 100/[1+r(0,1)] \Leftrightarrow r(0,1) = 3,745\%$$

$$\delta(1y) = 96,39\%$$

- Taxa Spot a 2 anos

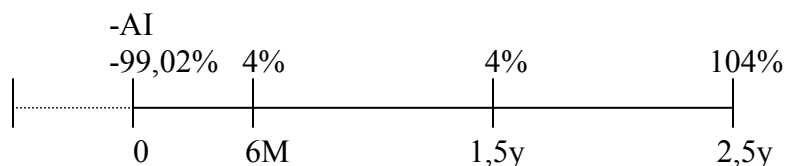


$$99,55 = 4/[1+r(0,1)] + 104/[1+r(0,2)]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r(0,2) = \{104 / [99,55 - 4/1,03745]\}^{1/2} - 1 \Leftrightarrow r(0,2) = 4,249\%$$

$$\delta(1y) = 100/1.0424^2$$

- Taxa Spot a 2,5 anos



$$AI = 4\% * 180/360 = 2\%$$

$$r(0;1,5y) = [r(0;1) + r(0;2)]/2 = (3,75\% + 4,25\%)/2 = 4\%$$

$$2 + 99,02 = 4/[1+r(0,6M)]^{0,5} + 4/[1+r(0;1,5y)]^{1,5} + 104/[1+r(0;2,5y)]^{2,5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r(0;2,5y) = 4,435\%$$

Caso Prático 2.5

Hoje (09/07/01; 2ª feira) foram observados os seguintes valores de cotação (médias *bid-offer*) para obrigações do Tesouro:

Maturidade	Taxa de cupão	Periodicidade do cupão	Valor de cotação
3 meses	0%	-	98.91%
1 ano	4%	anual	99.28%
2 anos	5%	anual	99.11%

Pretende-se que:

- Estime as taxas de juro *spot* sem risco a 0.25, 1 e 2 anos.
- Formule uma decisão de compra ou de venda para a OT 6% 23/09/2002, sabendo que o cupão tem uma periodicidade anual (ACT/ACT), existe um prémio de reembolso igual a 5% do par, o número de dias de juros vencidos é igual a 292 dias e que a obrigação está actualmente cotada a 105.80%-105.90%.

a)

$$98,91 = 100/[1+r(0;0,25y)]^{0,25} \Leftrightarrow r(0;0,25y) = 4,48\%$$

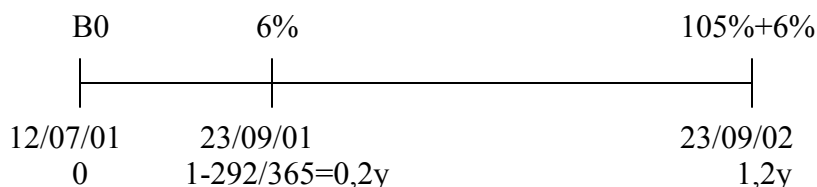
$$99,28 = 104/[1+r(0,1)] \Leftrightarrow r(0,1) = 4,754\%$$

$$99,1 = 5/[1+r(0,1)] + 105/[1+r(0,2)]^2 \Leftrightarrow r(0,2) = 5,5\%$$

b)

Trade Date = 09/07/01

Settlement Date = 12/07/01

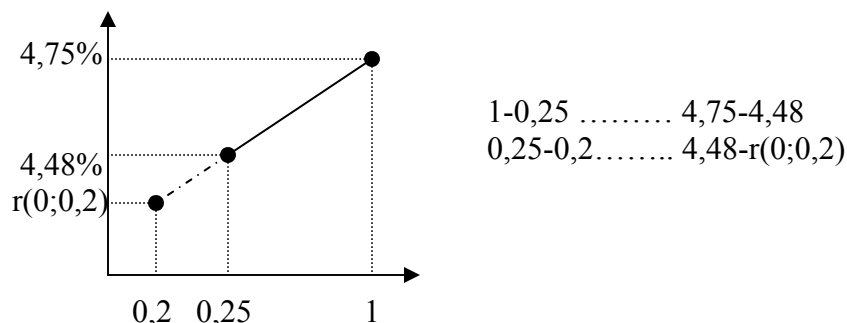


Como é uma Obrigação do Tesouro, tal como as da alínea a), pode-se usar as taxas spot já calculadas. Assim, para se calcular a taxa spot $r(0;1,2)$ usa-se uma normal interpolação linear com as taxas $r(0,1)$ e $r(0,2)$.

$$r(0;1,2) = r(0,1) + [r(0,2) - r(0,1)] * (1,2-1)/(2-1) = 4,9\%$$

Já relativamente à taxa spot $r(0;0,2)$, como a taxa spot de menor prazo temporal que temos é $r(0;0,25)$ teremos que fazer uma extrapolação linear com as taxas $r(0,1)$ e $r(0;0,25)$. O procedimento é o mesmo, veja-se também a exemplificação gráfica.

$$r(0;0,2) = r(0;0,25) + [r(0,1) - r(0;0,25)] * (0,2-0,25)/(1-0,25) = 4,462\%$$



$$B0 = 6/[1+r(0;0,2)]^{0,2} + 111/[1+r(0;1,2)]^{1,2} = 110,76\%$$

$$AI = 6\% * 292/365 = 4,8\%$$

	Bid	Ask
Vc	105,8	105,9
AI	4,8	4,8
VT	110,6 → não vender	110,7 → comprar

RATING E RISCO DE CRÉDITO

Começemos, antes de mais, por relembrar a importante e fácil forma de cálculo de B_0 , ora veja-se:

$$B_0 = \sum_{j=1}^n \frac{CF_j}{[1 + r(0, t_j)]^{t_j}}$$

É importante notar que a taxa $r(0, t_j)$ corresponde a uma taxa spot a t_j anos, adequada ao nível de risco de crédito da obrigação. Ou seja, é uma taxa spot a t_j anos sem risco, acrescida do Credit Spread, isto é, o prémio de risco que o investidor deve ganhar por investir numa acção com maior ou menor risco. Resumindo:

$$r(0, t_j) = \text{taxa spot a } t_j \text{ anos} + \text{credit spread}$$

Desta forma, quanto maior for o risco de investir numa obrigação, mais apelativa terá que esta ser, pois caso contrário o investidor optará por uma obrigação de risco inferior que lhe dá mais garantias.

Assim, e como facilmente se percebe, quanto maior for o risco de crédito, menos o investidor está disposto a pagar por uma obrigação, pois:

$$\uparrow \text{Credit Spread} \rightarrow \uparrow r(0, t_j) \rightarrow \downarrow \sum_{j=1}^n \frac{CF_j}{[1 + r(0, t_j)]^{t_j}} \rightarrow \downarrow B_0$$

O nível de risco de crédito de uma obrigação é medido com base numa notação de rating. A notação de rating permite agrupar as diferentes obrigações em classes homogéneas de risco de crédito (o Credit Spread é calculado tendo por base uma matriz de risco de crédito). Pelo que existem três prestigiadas instituições especializadas neste assunto, e são elas:

- Moody's [Aaa, Aa1, Aa2, Aa3, A1, A2, A3, Baa1, ..., C, D]
- S&P [AAA, AA+, AA, AA-, A+, A, A-, BBB+, BBB, ..., C, D]
- Fitch

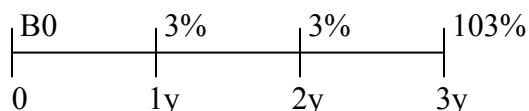
Exemplo 35: Avalie uma obrigação com a seguinte ficha técnica:

- Vencimento daqui a 3y;
- Taxa de cupão igual a 3%;
- Frequência anual do cupão;
- Reembolso bullet e ao par;
- Rating (S&P) = AA-

Para o efeito, considere as seguintes taxas spot (efectivas anuais) estimadas (via bootstrap) com base no preço das obrigações do tesouro alemão com rating AAA.

1y	2y	3y
2%	2,5%	3%

Comecemos pelo diagrama temporal:



Para o cálculo do credit spread teremos que consultar uma Matriz de Risco de Crédito, ora vejamos:

	...	3y	...
AAA		5 b.p.	
...			
AA-		15 b.p.	

Esta tabela representa o credit spread face a taxas de juro sem risco. Explicando de uma forma mais prática o significado de cada linha, a obrigação AAA deve gerar uma rendibilidade de 0,05% (o mesmo será dizer 5 basis points) superior a uma obrigação a taxa de juro sem risco. Na prática não existem obrigações a taxas de juro sem risco, pelo que as obrigações dos estados com mais credibilidade (Alemanha, EUA, Espanha, ...) são as que têm o menor risco a si associadas.

Para a resolução do nosso exercício as taxas spot estão calculadas com base nas OT alemão (AAA) e como a obrigação que pretendemos avaliar tem um nível de risco superior (AA-), devemos calcular o restante credit spread (de AAA para AA-). Isto será:

$$\text{Credit Spread de AA- face a AAA} = 0,15\% - 0,05\% = 0,1\%$$

Nota: o credit spread que se vai buscar, dado que este varia para diferentes períodos temporais, será o correspondente à maturidade da obrigação e utiliza-se o mesmo credit spread para a actualização de todos dos Cash Flows. Caso a obrigação seja comprada a meio da sua vida, o credit spread a usar corresponde ao tempo em falta.

$$B0 = 3/[1+2\%+0,1\%] + 3/[1+2,5\%+0,1\%]^2 + 103/[1+3\%+0,1\%]^3 = 97,2798$$

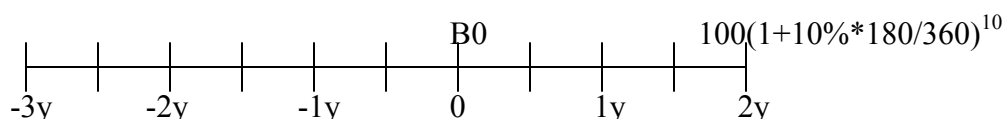
Caso Prático 2.7

As obrigações de capitalização automática do Estado foram emitidas há três anos, a uma taxa de juro fixa e anual de 10% (com capitalizações semestrais) e vencem-se dentro de dois anos. As obrigações de cupão zero do Estado com idêntica maturidade, tem uma cotação actual de 87.30%. O valor nominal de ambas as obrigações é 50 euros.

Pretende-se que: indique o preço máximo que está disposto a pagar pelas obrigações de capitalização automática.

Cálculo de $r(0,2)$ tendo por base a obrigação de cupão zero do estado:
 $r(0,2) = (100/87,3)^{(1/2)} - 1 = 7,03\%$

Agora para se calcular o B0 da obrigação é necessário usar uma taxa spot $r(0,2)$. Como o risco das duas obrigações é o mesmo, pois são emitidas pelo mesmo estado soberano, deve-se usar a taxa spot atrás calculada.



$$B0 = 100(1+10\%*180/360)^{10} / (1+7,03\%)^2 = 142,19\%$$

Exemplo 36: Avalie a obrigação com a seguinte ficha técnica:

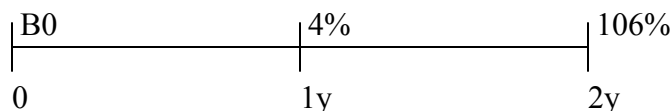
- Vencimento daqui a 2 anos;
- Taxa de cupão a 4%;
- Frequência anual do cupão;
- Reembolso bullet e a 102% do par;
- Rating = BBB (S&P).

Para o efeito considere as seguintes taxas spot (efectivas anuais) obtidas via obrigações do tesouro Português com rating A+ (S&P):

- $r(0,1) = 2,2\%$
- $r(0,2) = 2,7\%$

Por último apresenta-se, ainda, a seguinte matriz de risco de crédito, onde se pode encontrar os credit spreads em basis points face a taxas de juro sem risco.

	2y	3y
AAA	5	7
...		
A+	12	15
...		
BBB	25	30



$$B0 = 4 / [1+2,2\%+(0,25\%-0,12\%)] + 106 / [1+2,7\%+(0,25\%-0,12\%)]^2$$

$$B0 = 104,155$$

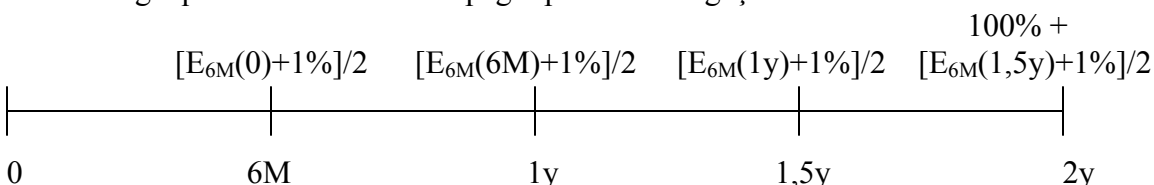
OBRIGAÇÃO A TAXA VARIÁVEL (FRN)

As obrigações a taxa variável, também conhecidas por FRN, isto é, Floating Rate Notes, são obrigações cuja a taxa de cupão é composta por um indexante e um spread.

Exemplo 37: Suponha a seguinte FRN:

- Vencimento daqui a 2y;
- Taxa de cupão = Euribor a 6M + 1% (30/360);
- Frequência semestral do cupão;
- Reembolso bullet e ao par.

Diga quais os Cash Flows a pagar por esta obrigação.



Note-se que o Euribor e Spread são taxas nominais (excepto quando o período é um ano). Daí se multiplicar as taxas por $180/360 = \frac{1}{2}$, para ficarmos com taxas efectivas semestrais.

Convém reparar que só se conhece a 1º taxa euribor, pois das outras taxas apenas tenho expectativas sobre o seu valor.

Avaliação de Obrigações Puras a Taxa Variável

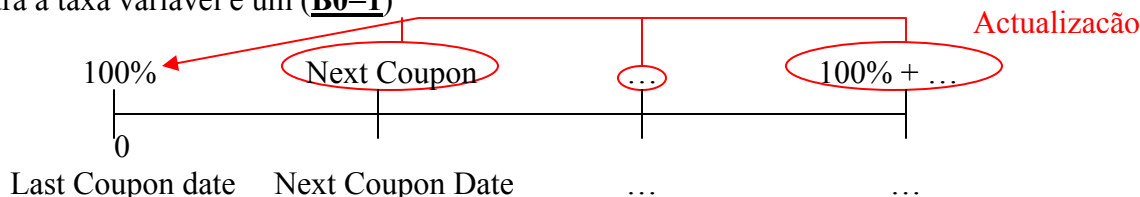
Uma obrigação só pode ser considerada pura a taxa variável, se e só se a taxa de cupão estiver adequada face ao rating da obrigação. Isto é, se e só se o spread (s) pago pela obrigação for igual ao credit spread de equilíbrio (s^e) dado por uma matriz de crédito.

Quando se está avaliar obrigações puras a taxa variável podem-se encontrar duas situações:

- Avaliação de obrigações puras a taxa variável no início de um período do cupão;
- Avaliação de obrigações puras a taxa variável entre duas coupon payment dates.

Início de um período de Cupão

A regra diz-nos que no início de um período de cupão o fair value de uma obg. pura a taxa variável é um (**B0=1**)



Vejamos o seguinte exemplo, que é uma continuação do exemplo 37, mas com mais duas alíneas, que demonstrará isto mesmo.

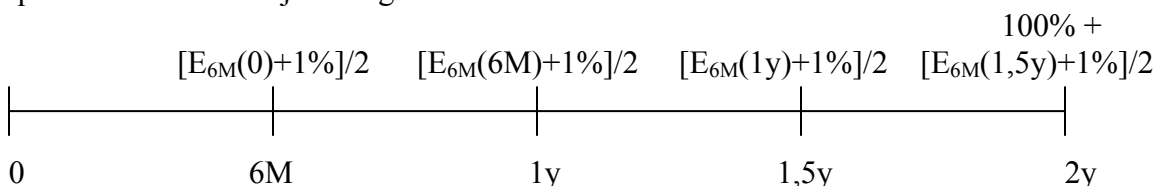
Exemplo 38: Suponha a seguinte FRN:

- Vencimento daqui a 2y;
- Taxa de cupão = Euribor a 6M + 1% (30/360);
- Frequência semestral do cupão;
- Reembolso bullet e ao par;
- Rating = BBB (S&P);
- Credit spread de equilíbrio entre BBB e risco interbancário é igual a 100 bps.

Como o indexante é a taxa de mercado bancário, quando se faz a comparação de risco de crédito deverá fazer-se a comparação entre risco BBB (da obrigação) e risco interbancário. Desta forma saber-se-á se o spread é igual ao credit spread., neste caso podemos concluir que é, pois:

- Credit spread de BBB face a taxas interbancárias = 100 bp = 1% = spread

Como tal, estamos perante uma obrigação pura a taxa variável, logo $B_0 = 100\%$, que demonstraremos já de seguida.



$$B_0 = 100\% * P(0,2) + \text{Valor a pagar hoje para receber} \quad \text{nota: } P(0,2) = 1/[1+r(0,2)]^2$$

$$\overbrace{[E_{6M}(0)+1\%]/2 + [E_{6M}(6M)+1\%]/2 + [E_{6M}(1y)+1\%]/2 + [E_{6M}(1,5y)+1\%]/2}^{\text{daqui a 6M} \quad \text{daqui a 1y} \quad \text{daqui a 1,5y} \quad \text{daqui a 2y}}$$

De momento não se sabe o valor exacto de Euribor's futuras, como tal, e como GF deve ser uma ciência exacta, vamos recorrer a uma engenharia financeira para resolvermos este problema e explicar-mos que $B_0=100\%$.

Suponha-se a seguinte carteira de investimentos que muito basicamente é apenas constituída por investimentos e financiamentos, esta carteira é formada da seguinte forma:

1. Hoje contrair financiamento a 1 ano e no valor de $PV(1\text{€})$
 $PV(1\text{€}) = \text{Present Value of } 1\text{€} = 1 * P(0,1)$
 - 2.1 Hoje efectua-se depósito a 6 meses no valor de $PV(1\text{€})$
 - 2.2 Daqui a 6 meses renova-se o depósito por mais 6 meses

	0	6 Meses	1 Ano
1	$+P(0,1)$		-1
2.1	$-P(0,6M)$	+1	

2.2		-1	$+ [1 + (E_{6M}(6M) + 1\%) / 2]$
Total	$P(0,1) - P(0,6M) < 0$	0	$+ (E_{6M}(6M) + 1\%) / 2$

Logo, já sabemos que para recebermos daqui a 1 ano $[E_{6M}(6M) + 1\%] / 2$ basta aplicar esta carteira de investimento. Como tal, e extrapolando o que aqui obtivemos para as outras euribor's obtemos que:

$$B0 = 100\% * P(0,2) + \text{Valor a pagar hoje para receber}$$

 $\Leftrightarrow$

$$\underbrace{[E_{6M}(0) + 1\%] / 2 + [E_{6M}(6M) + 1\%] / 2 + [E_{6M}(1y) + 1\%] / 2 + [E_{6M}(1,5y) + 1\%] / 2}_{\substack{\text{daqui a 6M} \quad \text{daqui a 1y} \quad \text{daqui a 1,5y} \quad \text{daqui a 2y}}}$$

$$\Leftrightarrow B0 = 100\% * P(0,2) + [P(0,0) - P(0,6M)] + [P(0,6M) - P(0,1)] + [P(0,1) - P(0,1,5)] + [P(0,1,5) - P(0,2)] \Leftrightarrow$$

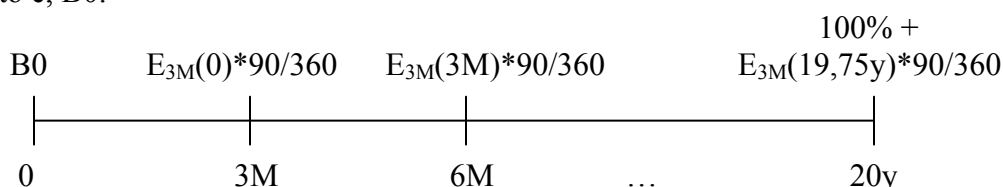
$$\Leftrightarrow B0 = P(0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B0 = 1$$

Exemplo 39: Suponha a seguinte FRN:

- Vencimento daqui a 20 anos;
- Taxa de cupão = Euribor a 3M (30/360);
- Frequência de Cupão = Trimestral;
- Reembolso bullet e ao par;
- A obrigação tem risco interbancário.

Tendo por base as informações apresentadas calcule o Fair Value da obrigação em causa, isto é, B0.



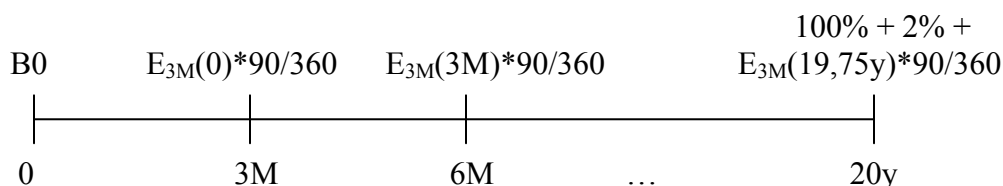
O facto da obrigação ter risco interbancário significa que a obrigação apenas deve pagar uma taxa interbancária, e não possui spread. Como tal estamos perante uma obrigação pura a taxa variável.

Logo, $B0 = 100\%$.

Exemplo 40: Suponha a seguinte FRN:

- Vencimento daqui a 20 anos;
- Taxa de cupão = Euribor a 3M (30/360);
- Frequência de Cupão = Trimestral;
- Reembolso bullet e a 102% do par;
- A obrigação tem risco interbancário.

Tendo por base as informações apresentadas calcule o Fair Value da obrigação em causa, isto é, B0.

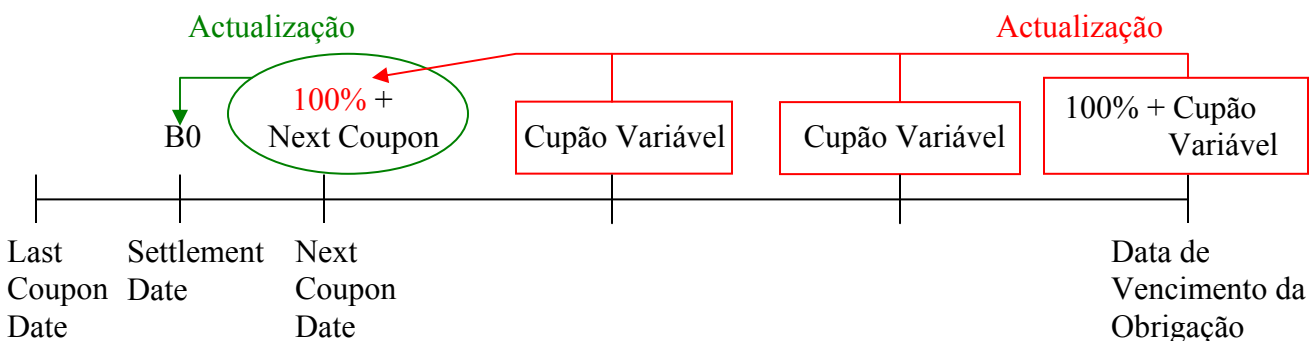


O facto da obrigação ter risco interbancário significa que a obrigação apenas deve pagar uma taxa interbancária, e não possui spread. Como tal estamos perante uma obrigação pura a taxa variável.

$$\text{Logo, } B_0 = 100\% + 2/[1+r(0,20)]^{20}$$

Entre duas Coupon Payment Dates

Quando se avalia uma obrigação entre duas coupon payment dates, o raciocínio será o mesmo que o realizado até agora. Veja-se o seguinte diagrama.



Se repararmos, o que está a vermelho corresponde a uma obrigação pura a taxa variável no início de um período de cupão (supondo que o início de o período de cupão era na Next Coupon Date). Assim se actualizarmos o que está a vermelho para a Next Coupon Date, sabemos automaticamente que é igual a 100%. Após isto basta actualizar os 100% e o Next Coupon para a Settlement Date, o período em que estamos a avaliar a obrigação.

$$B_0 = (100\% + \text{Next Coupon}) \text{ actualizado desde a Next Coupon date e até à Sett. date.}$$

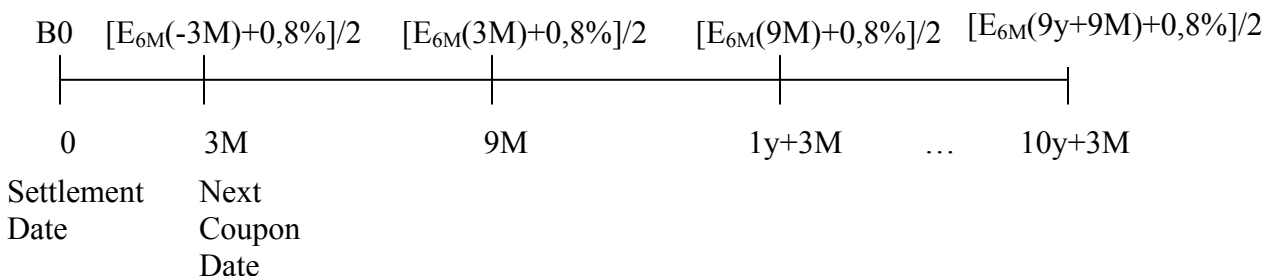
Exemplo 41: Avalie a seguinte FRN:

- Vencimento daqui a 10y + 3M;
- Taxa de cupão = Euribor a 6M + 0,8% (30/360);
- Frequência de cupão = Semestral;
- Reembolso bullet e ao par;
- Rating BBB (S&P);
- Credit Spread de equilíbrio entre BBB e Mercado Monetário Interbancário = 80 bps.

Para o efeito considere:

- E3M é hoje igual a 2%

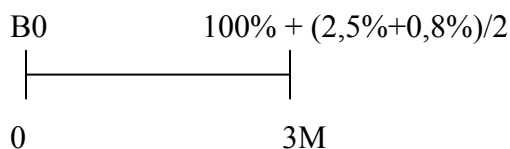
- E_{6M} era igual a 2,5% à 3 meses atrás.



Como estamos perante taxas nominais temos que transformá-las em efectivas semestrais, logo multiplica-se por $180/360 = 1/2$.

A única taxa que sabemos é a taxa $E_{6M}(-3M)$ que é igual a 2,5%. Então, para podermos calcular B_0 teremos que primeiro verificar se o spread é igual ao credit spread de equilíbrio, neste caso é, $s = s^e \Leftrightarrow 0,8\% = 0,8\%$. Como tal, estamos perante uma obrigação pura a taxa variável.

A partir desta conclusão podemos à partida obter o seguinte diagrama:



$$B_0 = (100\% + 1,65\%) / [1 + (2\% + 0,8\%) * 90/360] = 100,94$$

Para se fazer a actualização, teremos que usar uma taxa spot adequada ao nível de risco da obrigação. Como tal, soma-se 0,8% correspondente ao credit spread. Note-se que:

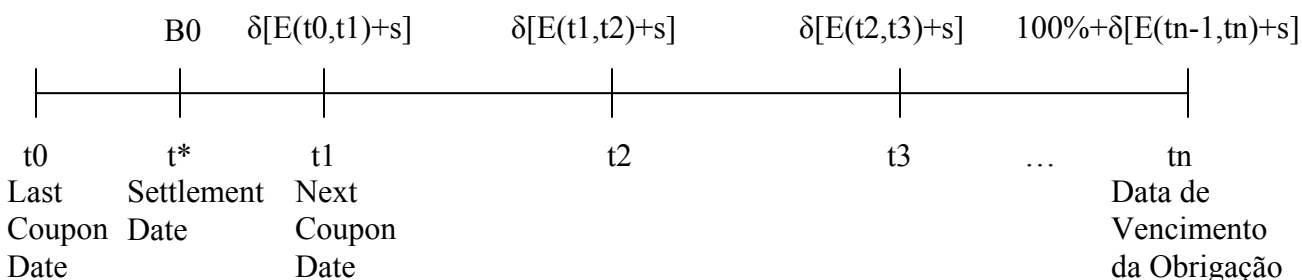
- 2% = taxa spot a 3M com risco interbancário;
- 2,8% = taxa spot a 3M com risco BBB.

Avaliação de Obrigações em que $s \neq s^e$ (Caso Geral)

Regra geral, o spread que a obrigação paga (s) não é igual ao spread que a obrigação deve pagar (s^e).

Por norma, quando se avalia obrigações este é o caso que mais normalmente aparece.

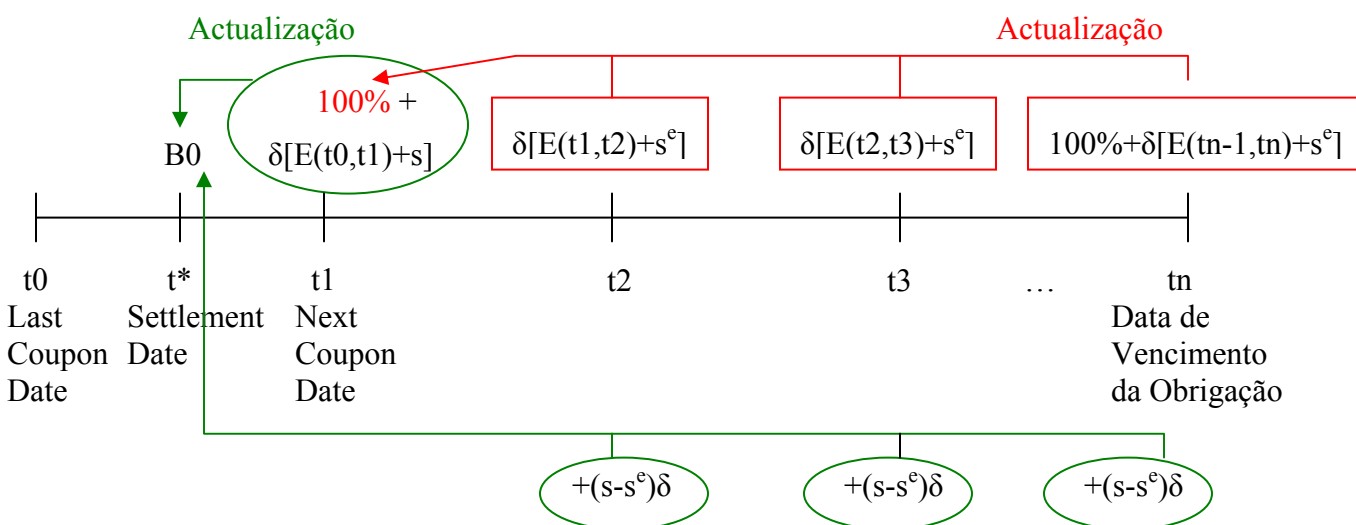
Veja-se na página seguinte o diagrama para melhor perceber.



$\delta \rightarrow$ Este símbolo corresponde ao período de capitalização. Pois as taxas apresentadas são nominais, e temos que transformá-las em efectivas. Ex: $0,5 * (2,5\% + 0,8\%)$

$E(t_0, t_1) \rightarrow$ valor do indexante entre t_0 e t_1 .

Voltamos a estar perante o velho problema, apenas conhecemos o valor do próximo cupão, pois dos outros apenas tenho expectativas (através de taxas forward). Assim, e como sabemos que os cupões que pagam taxas a um nível adequado ao risco da obrigação têm um fair value de 100%, podemos calcular B_0 da seguinte forma:



Nota: $\delta[E(t_1, t_2) + s] = \delta[E(t_1, t_2) + s^e] + (s - s^e)\delta$

$$B_0 = \{100\% + \delta[E(t_0, t_1) + s]\} \cdot P(t^*, t_1) + (s - s^e) \cdot \delta \cdot P(t^*, t_2) + \dots + (s - s^e) \cdot \delta \cdot P(t^*, t_n)$$

Caso Prático 2.9

Hoje (19/06/01; 3ª feira) foram estimadas as seguintes taxas de juro sem risco para o EUR:

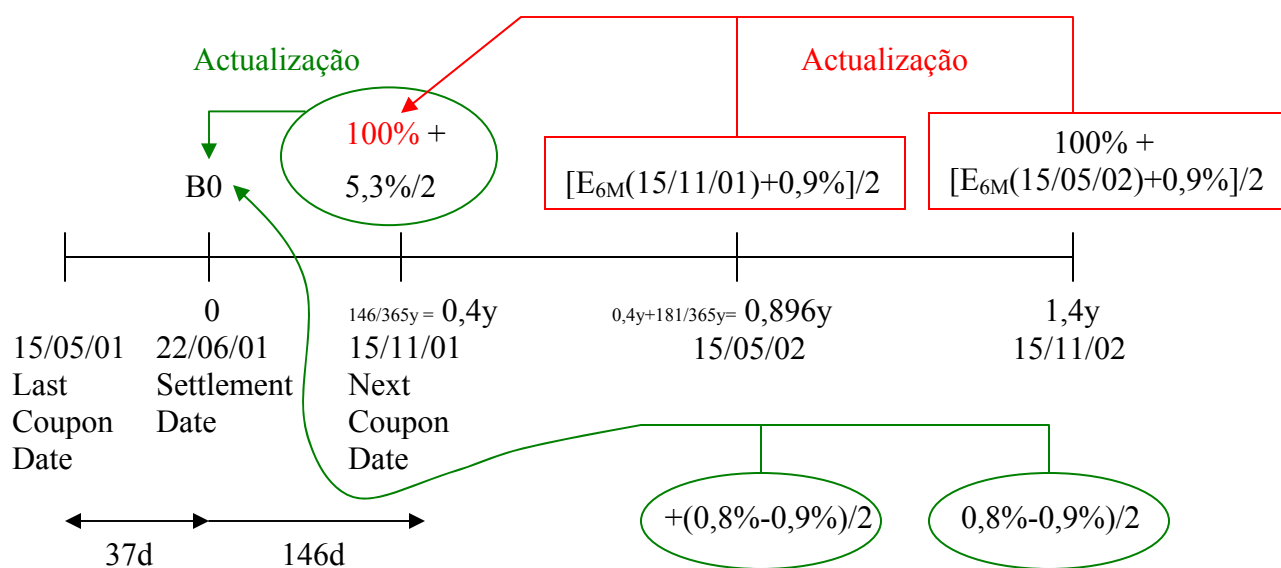
Prazos	0.4 anos	0.896 anos	1 ano	1.4 anos	3 anos	4 anos
Taxas	4.80%	4.965%	5.00%	5.071%	5.60%	6%

Nota: taxas efectivas anuais (base de calendário: actual/actual).

Considere uma obrigação de dívida privada com vencimento no dia 15/11/2002, com uma notação de *rating* BBB (S&P) e com uma taxa de cupão igual à Euribor a 6 meses mais 80 *basis points* (cupão semestral na base de calendário 30/360).

A taxa do próximo cupão é igual a 5.3% e o *credit spread* de equilíbrio entre os mercados monetário e do Tesouro é actualmente igual a 0.20%. Actualmente, o número de dias de juros vencidos é igual a 37 dias (30/360) e o *credit spread* de equilíbrio da classe de risco BBB (S&P) é igual a 0.90% (face a taxas interbancárias).

Sabendo que a obrigação está actualmente cotada a 99.61% (*bid*) / 99.65% (*offer*), formule uma decisão de compra ou de venda. NOTA: o número de dias de calendário entre 22/06/2001 e 15/11/2001 é igual a 146 dias; o número de dias de calendário entre 15/11/2001 e 15/05/2002 é igual a 181 dias.



Taxa do Próximo Cupão = $E_{6M}(15/05/01) + 0,8\% = 5,3\%$

Valor do Próximo Cupão = $5,3\% \times 180/360 = 5,3\%/2 = 2,65\%$

Facilmente percebe-se que o que está a vermelho ao ser actualizado dá 100%, pois estamos perante uma obrigação pura a taxa variável. Agora falta actualizar o que está a verde, e para se fazer isto devemos usar as taxas de juro sem risco adicionando o risco correspondente às obrigações em causa.



$$B0 = (100\% + 5,3\%/2) / (1 + 4,8\% + 1,1\%)^{0,4} + [(0,8\% - 0,9\%)/2] / [1 + 4,965\% + 1,1\%]^{0,896} + [(0,8\% - 0,9\%)/2] / [1 + 5,071\% + 1,1\%]^{1,4} = 100,23$$

Nota: As taxas Euribor e Spread são consideradas taxas nominais. Veja-se no diagrama a vermelho em que dividimos a Euribor e 0,9% (credit spread) por 2, para transformar uma taxa nominal anual com capitalizações semestrais numa taxa efectiva semestral. Ora seguindo esta lógica quando calculamos B0 o 1,1% deve ser transformado em taxa efectiva anual, pois ela é uma taxa nominal anual com capitalizações semestrais, todavia o professor decidiu desprezar este facto. Exemplo:

- Taxa Nominal anual com Capitalizações Semestrais = 1,1%
- Taxa Efectiva Semestral = $1,1\%/2 = 0,55\%$
- Taxa Efectiva Anual = $(1+0,55\%)^2 - 1 = 1,103025\%$

Continuando a resolução do exercício, falta só calcular AI adicionar ao Valor de Cotação, obtendo o Valor de Transacção, para podermos comparar com B0.

$AI_{22/06/01} = 5,3\%/2 * 37/180 = 0,5447\%$
(devemos usar a base de calendário da taxa de cupão)

	Bid	Ask
Vc	99,61	99,65
AI	0,5447	0,5447
VT	100,1547	100,1947

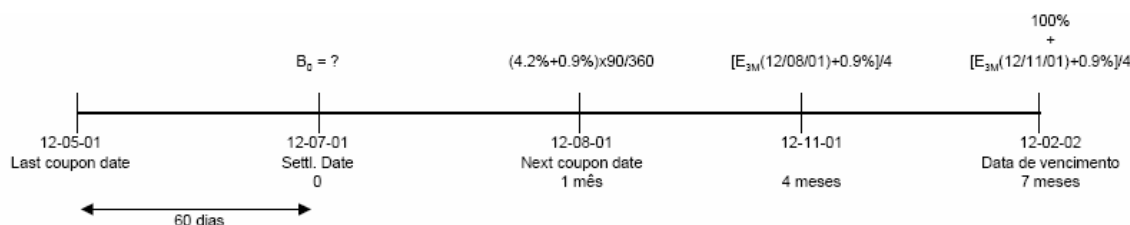
$B0 > VT_{bid} \rightarrow$ Não Vender

$B0 > VT_{ask} \rightarrow$ Comprar

Caso Prático 2.10

Considere uma obrigação de dívida privada com vencimento no dia 12/02/2002, com uma notação de rating BB (S&P) e com uma taxa de cupão igual à Euribor a 3 meses mais 90 *basis points* (cupão trimestral na base de calendário 30/360). A taxa do próximo cupão é igual a 5.1% e o *credit spread* de equilíbrio da classe de risco BB (S&P) é igual a 1.10% (face a taxas interbancárias).

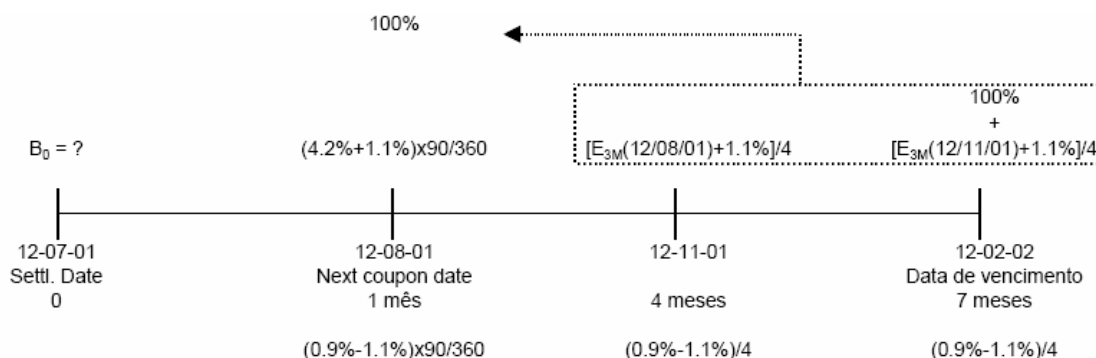
Actualmente, o número de dias de juros vencidos é igual a 60 dias (30/360) e a obrigação está cotada a 99.90%(*bid*) / 99.95%(*offer*) para a *trade date* de 09/07/01 (2ª feira). Formule uma decisão de *trading*, sabendo que vigoram actualmente as seguintes taxas Euribor (convertidas para a base de calendário 30/360): 4.5% a 1 mês, 4.75% a 4 meses e 5% a 7 meses.



Settlement date = 09/07/01 + 3 dias de calendário = 12/07/01.

Taxa do próximo cupão = 5.1% $\rightarrow$ E3M no dia 12/05/2001 = 5,1%-0,9% = 4,2%.

O diagrama anterior é equivalente ao seguinte:



Dado que as taxas dadas são Euribor's, logo com o risco do MMI, para procedermos à actualização devemos adicionar a estas taxas 1,1%, correspondente ao *credit spread* de equilíbrio da classe de risco BB face ao MMI.

$$B_0 = \frac{100\% + \frac{4.2\% + 1.1\%}{4}}{1 + \left(\frac{4.5\% + 1.1\%}{12} \right) \times \frac{1}{12}} + \frac{0.9\% - 1.1\%}{4} \times \left[\left(1 + 5.6\% \times \frac{1}{12} \right)^{-1} + \left(1 + (4.75\% + 1.1\%) \times \frac{4}{12} \right)^{-1} + \left(1 + (5\% + 1.1\%) \times \frac{7}{12} \right)^{-1} \right]$$

$$= 100.85\% - 0.15\% = 100.71\%.$$

$$AI = 5.1\% \times \frac{60}{360} = 0.85\%.$$

Decisão:

$$VT_0^{\text{bid}} = 99.90\% + 0.85\% = 100.75\% > B_0 \Rightarrow \text{Vender};$$

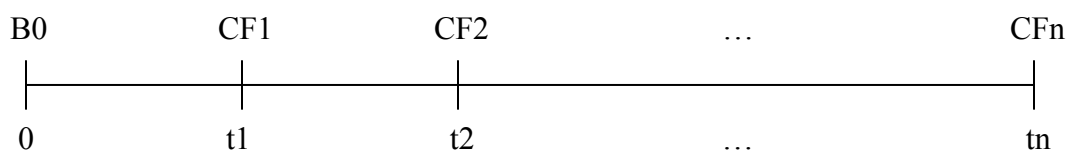
$$VT_0^{\text{ask}} = 99.95\% + 0.54\% = 100.80\% > B_0 \Rightarrow \text{Não comprar}.$$

MEDIDAS DE RISCO DE TAXA DE JURO

As medidas de risco de taxa de juro servem para aferir o impacto da variação das taxas de juro sobre o preço das obrigações.

Duração (D)

A duração de uma obrigação traduz o tempo médio que a obrigação demora a gerar o seu valor.



Neste caso, a obrigação demora t_1 anos a gerar a parcela $CF_1/[1+r(0,t_1)]^{t_1}$ do seu valor. E extrapolando para os restantes cash flows, a obrigação demora t_i anos a gerar a parcela $CF_i/[1+r(0,t_i)]^{t_i}$ do seu valor.

$$D = \frac{t_1 * CF_1/[1+r(0,t_1)]^{t_1} + t_2 * CF_2/[1+r(0,t_2)]^{t_2} + \dots + t_n * CF_n/[1+r(0,t_n)]^{t_n}}{CF_1/[1+r(0,t_1)]^{t_1} + CF_2/[1+r(0,t_2)]^{t_2} + \dots + CF_n/[1+r(0,t_n)]^{t_n}}$$

As duas medidas mais populares para calcular a duração de uma obrigação são: Duração de Fisher-Weil e Duração de Macaulay.

$$\text{Duração de Fisher-Weil} = DFW = \frac{\sum_{j=1}^n t_j \cdot \frac{CF_j}{[1+r(0,t_j)]^{t_j}}}{B(0)}$$

$$\text{Duração de Macaulay} = DM = \frac{\sum_{j=1}^n t_j \cdot \frac{CF_j}{[1+r]^{t_j}}}{\sum_{j=1}^n \frac{CF_j}{[1+r]^{t_j}}} = \frac{\sum_{j=1}^n t_j \cdot \frac{CF_j}{[1+YTM]^{t_j}}}{VT0}$$

Na prática a Duração de Macaulay é um caso particular da Duração de Fisher-Weil, isto é, quando a yield curve é flat, ou seja, quando as taxas de actualização são todas iguais ($r(0,t_j)=r$).

A prática habitual consiste em considerar como taxa de actualização a Yield to Maturity ($r = YTM$).

Exemplo 42: Calcule as Durações de Fisher-Weil para as obrigações A e B, tendo por base informação que se segue.

	A	B
Taxa de Cupão (30/360)	4%	3%
Frequência do Cupão	Anual	Semestral
Maturidade	2y	2y
Reembolso	Bullet e ao par	Bullet e ao par

Txs Efectivas Anuais:	
$r(0;0,5)$	2,5%
$r(0;1)$	3%
$r(0;1,5)$	3,5%
$r(0;2)$	4%

$$B0^A = 4\%/(1+3\%) + 104\%/(1+4\%)^2 = 100,037\%$$

$$DFW_A = \frac{1 * 4\%/(1+3\%) + 2 * 104\%/(1+4\%)^2}{100,037\%} = 1,9612y$$

$$B0^B = 1,5\%/(1+2,5\%)^{0,5} + 1,5\%/(1+3\%) + 1,5\%/(1+3,5\%)^{1,5} + 101,5\%/(1+4\%)^2 = 98,2\%$$

$$DFW_B = \frac{0,5 * 1,5\%/(1+2,5\%)^{0,5} + 1,5\%/(1+3\%) + 1,5 * 1,5\%/(1+3,5\%)^{1,5} + 2 * 101,5\%/(1+4\%)^2}{98,2\%} = 1,9553y$$

Como se pode verificar a obrigação B gera o seu valor um pouco mais rapidamente que a obrigação A.

Portfolio Duration (Duração de uma Carteira de Obrigações)

A duração de uma carteira de obrigações (D^c) é dada pela média das durações das obrigações, ponderadas pelo respectivo peso relativo.

$$D^c = \sum_{j=1}^p D^j \cdot \frac{B^j(0)}{B^c(0)} \quad \text{sendo } p \text{ o número de obrigações que integram a carteira, } D^j \text{ a duração (DM ou DFW) da } j\text{-ésima obrigação, } B^j(0) \text{ valor actual da } j\text{-ésima obrigação, e } B^c(0) \text{ valor actual da carteira: } B^c(0) = \sum_{j=1}^p B^j(0)$$

Demonstração (k - períodos de tempo, j - n.º de obrigações):

$$D^c = \frac{\sum_{k=1}^n t_k \cdot \frac{CF_k^c}{[1+r(0, t_k)]^{t_k}}}{B^c(0)} = \frac{\sum_{k=1}^n t_k \cdot \frac{\sum_{j=1}^p CF_k^j}{[1+r(0, t_k)]^{t_k}}}{B^c(0)} = \sum_{j=1}^p \frac{\sum_{k=1}^n t_k \cdot \frac{CF_k^j}{[1+r(0, t_k)]^{t_k}}}{B^j(0)} \cdot \frac{B^j(0)}{B^c(0)} = \sum_{j=1}^p DFW_j \cdot \frac{B^j(0)}{B^c(0)}$$

Exemplo 43: Na continuação do exemplo 42, calcule a Duração da seguinte carteira, composta com as obrigações A e B, tendo por base informação que se segue.

	A	B
Taxa de Cupão (30/360)	4%	3%
Frequência do Cupão	Anual	Semestral
Maturidade	2y	2y
Reembolso	Bullet e ao par	Bullet e ao par
Vn	100.000€	300.000€

Tx's Efectivas Anuais:	
$r(0;0,5)$	2,5%
$r(0;1)$	3%
$r(0;1,5)$	3,5%
$r(0;2)$	4%

$$B0^c = 100.000 \cdot 100,037\% + 300.000 \cdot 98,2\% = 394.637$$

$$\begin{aligned} DFW^c &= DFW_A \cdot B0^A / B0^c + DFW_B \cdot B0^B / B0^c = \\ &= 1,9612 \cdot 100,037\% \cdot 100.000 / 394.637 + 1,9553 \cdot 98,2\% \cdot 300.000 / 394.637 = \\ &= 1,9568y \end{aligned}$$

A duração é uma medida de risco de taxa de juro, porque quanto maior for a duração, maior será a exposição face ao risco de taxas de juro.

Estimação do efeito da Variação das Taxas de Juros (1ª Parte)

Para estimar o valor do impacto de uma variação das taxas de juro (Δr), portanto para se estimar a variação de $B0$ ($\Delta B0$) quando as taxas variam, pode-se utilizar uma série de Taylor. Imaginando: se as taxas variarem em 0,25% quanto variará o valor das obrigações em carteira?

Relembrando as séries de Taylor:

- $\sum f^{(n)}(x_0) \cdot (x-x_0)^n / n!$
- $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2 \cdot 1/2 + f'''(x_0) \cdot (x-x_0)^3 \cdot 1/3! + \dots$
- $\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\Delta f} = f'(x_0) \cdot (x-x_0) + f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2 \cdot 1/2 + f'''(x_0) \cdot (x-x_0)^3 \cdot 1/3! + \dots$

Assim, e formalizando:

Δr = Variação das Taxas de Juro

$\Delta B0$ = Variação do valor das Obrigações, decorrentes de uma variação das taxas de juro

$$\Delta B0 = \frac{dB0}{dr} \cdot \Delta r + \frac{d^2B0}{dr^2} \cdot (\Delta r)^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{d^3B0}{dr^3} \cdot (\Delta r)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots$$

$\Delta \% B0 = (B0' - B0) / B0 = \Delta B0 / B0$ = Variação percentual do valor das Obrigações

$$\Delta \% B0 = \frac{dB0}{dr} \cdot \Delta r \cdot \frac{1}{B0} + \frac{d^2B0}{dr^2} \cdot (\Delta r)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{B0} + \frac{d^3B0}{dr^3} \cdot (\Delta r)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{B0} + \dots$$

Por razões óbvias para se calcular a variação de $B0$, por esta forma, temos que fazer uma aproximação, genericamente faz-se ou uma aproximação de 1ª ordem ou uma aproximação de 2ª ordem.

Aproximação de 1ª ordem: $\Delta \% B0 \approx (dB0/dr) \cdot \Delta r \cdot 1/B0$

Aproximação de 2ª ordem: $\Delta \% B0 \approx (dB0/dr) \cdot \Delta r \cdot 1/B0 + (d^2B0/dr^2) \cdot (\Delta r)^2 \cdot (1/2) \cdot (1/B0)$

A razão de se fazer esta aproximação é óbvia, porque com aproximações de ordem superior a diferença é praticamente desprezível, por outro lado os cálculos exaustivos tornam-se pouco práticos.

Nota:

$$\begin{aligned} \text{a) } (dB_0/dr) &= \left[\sum_{k=1}^n CF_k \cdot (1+r)^{-tk} \right]_r' = \sum_{k=1}^n CF_k \cdot \left[(1+r)^{-tk} \right]_r' = \\ &= \sum_{k=1}^n CF_k \cdot (-tk) \cdot (1+r)^{-tk-1} = - \sum_{k=1}^n CF_k \cdot (tk) \cdot (1+r)^{-tk-1} \end{aligned}$$

$$\text{b) } (d^2B_0/dr^2) = \left[- \sum_{k=1}^n CF_k \cdot (tk) \cdot (1+r)^{-tk-1} \right]_r' = \sum_{k=1}^n CF_k \cdot (tk) \cdot (tk+1) \cdot (1+r)^{-tk-2}$$

Aproximação de 1ª ordem:

$$\Delta \% B_0 \approx (dB_0/dr) \cdot \Delta r \cdot 1/B_0 = \left(- \sum_{k=1}^n CF_k \cdot (tk) \cdot (1+r)^{-tk-1} \right) \cdot \Delta r \cdot 1/B_0 =$$

$$= - \frac{\sum_{k=1}^n t_k \cdot \frac{CF_k}{[1+r]^{t_{k+1}}}}{B_0} \cdot \Delta r = - \frac{\sum_{k=1}^n t_k \cdot \frac{CF_k}{[1+r]^{t_k}}}{B_0} \cdot \frac{\Delta r}{1+r} =$$

$$= \boxed{-DM \cdot \frac{\Delta r}{1+r}}$$

Nota:

$$-DM \cdot \frac{\Delta r}{1+r} = - \left[\frac{DM}{1+r} \right] \cdot \Delta r$$

MD = Modified Duration

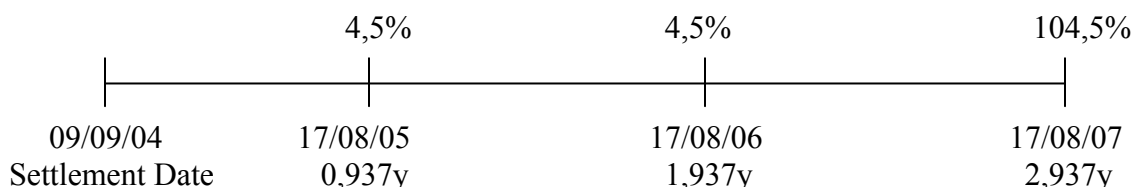
Atendendo à fórmula atrás exposta, podemos muito facilmente concluir que quando as taxas sobem o valor das obrigações desce, existe então uma relação inversa entre B₀ e r. Por outro lado, e tendo em conta o DM, podemos também concluir (aquilo que já atrás foi dito) que quanto maior a duração maior será a exposição face ao risco de taxa de juro, pois quanto maior for a duração mais o preço das obrigações desce face a subidas das taxas de juro (daí a duração ser uma forma de medir o risco das obrigações).

Exemplo 44A: Estime na trade date o impacto sobre o preço de mercado da Bund 4,5% 17/08/07 uma subida da YTM ask igual a 0,5%.

$$YTM \text{ ask}_0 = 2,9487\% \rightarrow VT \text{ ask}_0 = 104,3\% + 0,28\% = 104,58\%$$

$$\downarrow +0,5\%$$

$$YTM \text{ ask}_1 = 3,4487\% \rightarrow VT \text{ ask}_1 = ?$$



1ª Hipótese de Resolução:

$$VT_{ask_1} = 4,5\%/(1+3,4487\%)^{0,937} + 4,5\%/(1+3,4487\%)^{1,937} + 104,5\%/(1+3,4487\%)^{2,937} \\ = 103,168\%$$

$$\Delta VT_{ask} = 103,16\% - 104,58\% = -1,42\% \rightarrow \text{variação absoluta}$$

$$\Delta\%VT_{ask} = (103,16\% - 104,58\%) / 104,58\% = -1,3578\% \rightarrow \text{variação percentual}$$

2ª Hipótese de Resolução:

$$DM = \frac{0,937*4,5\%*(1,029487)^{-0,937} + 1,937*4,5\%*(1,029487)^{-1,937} + 2,937*104,5\%*(1,029487)^{-2,937}}{104,58\%} \\ = 2,8127y$$

$$\Delta\%VT_{ask} = -2,8127*0,005/(1,029487) = -1,3661\%$$

Nota:

Conforme se pode reparar as duas hipóteses, de cálculo da variação percentual de VT, não dão valores exactamente iguais, isto explica-se por na 1ª hipótese o valor obtido ser exacto, e na 2ª hipótese o valor obtido ser uma aproximação (de 1º grau).

Convexidade (C)

Já explorado o termo de 1ª ordem de $\Delta\%B_0$, falta agora desenvolver o termo de 2ª ordem, o que nos permitirá tirar conclusões mais precisas, e explorar o conceito de convexidade.

$$(d^2B_0/dr^2).(\Delta r)^2.(1/2).(1/B_0) = \sum_{k=1}^n [CF_k*(t_k)*(t_k+1)*(1+r)^{-t_k-2}] . (\Delta r)^2.(1/2).(1/B_0) = \\ = \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^n t_k . (t_k + 1) . \frac{CF_k}{[1+r]^{t_k+2}}}{B_0} . (\Delta r)^2 = \frac{1}{2} . \frac{\sum_{k=1}^n t_k . (t_k + 1) . \frac{CF_k}{[1+r]^{t_k}}}{B_0} . \left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2 = \\ = \frac{1}{2} . CM . \left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2$$

$$\text{Convexidade de Macaulay} = CM = \frac{\sum_{k=1}^n t_k . (t_k + 1) . \frac{CF_k}{[1+r]^{t_k}}}{B_0}$$

A convexidade de Macaulay assume que a Estrutura Temporal das Taxas de Juro (ETTJ) é flat. Ou seja, tal como na duração, a convexidade de Macaulay é um caso particular da convexidade de Fisher-Weil.

$$\text{Convexidade de Fisher-Weil} = \text{CFW} = \frac{\sum_{k=1}^n t_k \cdot (t_k + 1) \cdot \frac{CF_k}{[1 + r(0, t_k)]^{t_k}}}{B_0}$$

Assim, sendo e expostos estes conceitos, podemos avançar para a formula da variação percentual de B_0 ($\Delta\%B_0$), com aproximação de 2ª ordem.

Estimação do efeito da Variação das Taxas de Juros (2ª Parte)

$$\Delta\%B_0 \approx (dB_0/dr) \cdot \Delta r \cdot 1/B_0 + (d^2B_0/dr^2) \cdot (\Delta r)^2 \cdot (1/2) \cdot (1/B_0) =$$

$$= \boxed{-DM \times \frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2} \times CM \times \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right)^2}$$

Exemplo 44B: Na continuação do exemplo 44A, agora será calculado a variação de VT mas através de uma aproximação de 2ª ordem. Depois compare com os outros resultados obtidos.

3ª Hipótese de Resolução:

$$CM = \frac{0,937 \times 1,937 \times \frac{4,5\%}{1,029487^{0,937}} + 1,937 \times 2,937 \times \frac{4,5\%}{1,029487^{1,937}} + 2,937 \times 3,937 \times \frac{104,5\%}{1,029487^{2,937}}}{104,58\%} =$$

$$= 10,9163 \text{ (a convexidade é adimensional, sem unidade física)}$$

$$\Delta\%VT = -1,3661\% + \frac{1}{2} \times 10,9163 \times \left(\frac{0,005}{1,029487} \right)^2 = -1,3532\%$$

Comparação entre as três hipóteses de cálculo:

- 1ª Hipótese – valor exacto: -1,3578%
- 2ª Hipótese – aproximação de 1ª ordem: -1,3661%
- 3ª Hipótese – aproximação de 2ª ordem: -1,3532%

Como se pode ver, com a aproximação de 2ª ordem, o valor que se obtém já é muito próximo do valor exacto.

Portfolio Convexity (Convexidade de uma Carteira de Obrigações)

A convexidade de uma carteira de obrigações (C^c) é também dada pela média das convexidades das obrigações componentes, ponderada pelo respectivo peso relativo.

$$C^c = \sum_{j=1}^p C_j \times \frac{B0^j}{B0^c} \quad , C_j \text{ representa a convexidade da } j\text{-ésima obrigação em carteira}$$

Exemplo 45: Calcule a Convexidade de Fisher Weil da obrigação A, B e da carteira de obrigações (valores tendo por base o exemplo 43).

	A	B
Taxa de Cupão (30/360)	4%	3%
Frequência do Cupão	Anual	Semestral
Maturidade	2y	2y
Reembolso	Bullet e ao par	Bullet e ao par
Vn	100.000€	300.000€
B0	100,04%	98,2%
DFW	1,9611y	1,9554y
VN	100.000€	300.000€
B0 ^c	394.640	
DFW ^c	1,9568y	

Txs Efectivas Anuais:	
r(0;0,5)	2,5%
r(0;1)	3%
r(0;1,5)	3,5%
r(0;2)	4%

$$CFW_A = \frac{1 \times 2 \times \frac{4\%}{(1+3\%)} + 2 \times 3 \times \frac{104\%}{(1+4\%)^2}}{100,04\%} = 5,8446$$

$$CFW_B = \frac{0,5 \times 1,5 \times \frac{1,5\%}{(1+2,5\%)^{0,5}} + 1 \times 2 \times \frac{1,5\%}{(1+3\%)} + 1,5 \times 2,5 \times \frac{1,5\%}{(1+3,5\%)^{1,5}} + 2 \times 3 \times \frac{101,5\%}{(1+4\%)^2}}{98,2\%} = 5,8291$$

$$CFW^c = 5,8446 \times \frac{100.000 \times 100,04\%}{394.640} + 5,8291 \times \frac{300.000 \times 98,2\%}{394.640} = 5,833$$

Conclusões sobre a Convexidade:

A mais importante conclusão a tirar sobre a convexidade é que quanto maior esta for melhor será, pois:

- Mais o valor da obrigação sobe quando as taxas descem;
 - Menos o valor da obrigação desce quando as taxas sobem.
- Portanto menor é a exposição face ao risco de taxa de juro.

Explicação Algébrica

$$\Delta \% B0 = -DM \times \frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2} \times CM \times \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right)^2$$

1 - Quando as taxas Sobem ($\Delta r > 0$)

$$\Delta \% B0 = \underbrace{-DM \times \frac{+}{1+r}}_{-} + \underbrace{\frac{1}{2} \times CM \times \left(\frac{+}{1+r} \right)^2}_{+}$$

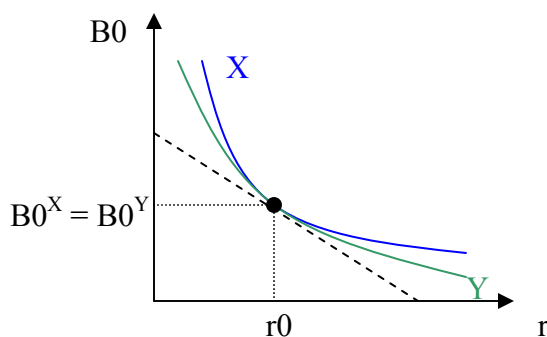
No 1º Termo há um efeito negativo e no 2º termo há um efeito positivo, logo quanto maior a convexidade menos o valor da obrigação desce quando as taxas sobem.

2 – Quando as taxas Descem ($\Delta r < 0$)

$$\Delta \% B0 = \underbrace{-DM \times \frac{-}{1+r}}_{+} + \underbrace{\frac{1}{2} \times CM \times \left(\frac{-}{1+r} \right)^2}_{+}$$

No 1º termo há um efeito positivo e no 2º termo há, também, um efeito positivo (devido ao quadrado que elimina o efeito do menos). Logo, quanto maior a convexidade, mais as obrigações sobem quando as taxas descem.

Explicação Gráfica



Pressupostos:

- $B0^X = B0^Y$
- $D^X = D^Y$
- $C^X > C^Y$

A duração, grosso modo, é a derivada de B_0 em ordem a r . Sabendo-se que a derivada é o declive da recta tangente, podemos facilmente verificar que as duas obrigações têm duração igual (pois a recta tangente é igual para as duas obrigações).

Quando as taxas sobem a obrigação que desce menos é a X e a obrigação que desce mais é a Y . Por outro lado, quando as taxas descem, a obrigação cujo o valor sobe mais é a X . Assim, é fácil verificar que a obrigação X é a que tem maior convexidade.

Estimação do efeito da Variação das Taxas de Juros (3ª Parte)

Até agora estudamos a forma como calcular a variação percentual de B_0 ($\Delta\%B_0$) no pressuposto de que a Estrutura Temporal das Taxas de Juro (ETTJ) é flat [$r(0,tk) = r$, para todo o k]. Todavia esta situação não é a mais comum, assim e tendo por base os estudos já atrás efectuados, a variação percentual de B_0 ($\Delta\%B_0$) pode ser calculada com a seguinte formula.

$$\Delta\%B_0 = -DFW \times \lambda + \frac{1}{2} \times CFW \times \lambda^2 \quad \text{sendo} \quad \lambda = \frac{\Delta r(0, tk)}{1 + r(0, tk)}, \quad \forall k$$

O λ é conhecido por Choque Multiplicativo, e pressupõe que todas as taxas spot variam de acordo com uma mesma regra de evolução, o que por exemplo significa dizer que a variação percentual de uma taxa spot a 3 anos é igual a uma variação percentual de uma taxa spot a 30 anos, quando na prática isto não acontece.

$$\text{Exemplo: } \frac{\Delta r(0,3)}{1 + r(0,3)} = \frac{\Delta r(0,30)}{1 + r(0,30)}$$

Veja-se aquilo que se estava dizendo:

$$\lambda = \frac{r'(0, tk) - r(0, tk)}{1 + r(0, tk)} \Leftrightarrow \lambda \times [1 + r(0, tk)] + r(0, tk) = r'(0, tk) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \times [1 + r(0, tk)] + r(0, tk) + 1 = r'(0, tk) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + r'(0, tk) = [1 + r(0, tk)] \times (1 + \lambda)$$

Exemplo 46: Na continuação do exemplo 43 e 45 estime o novo valor da carteira de obrigações caso ocorra um choque multiplicativo de 10 basis points sobre as taxas spot.

1ª Hipótese de Resolução (aproximação de 2ª ordem):

$$\lambda = 0,1\%$$

$$\Delta\%B_0 = -1,9568 \times 0,1\% + \frac{1}{2} \times 5,833 \times 0,1\%^2 = -0,1954\%$$

Novo valor da carteira = $394.640 \times (100\% - 0,1954\%) = 393.868,87\text{€}$

2ª Hipótese de Resolução (valor exacto):

Subida das Taxas:

- $1+r'(0;0,5) = (1+2,5\%)(1+0,1\%) \Leftrightarrow r'(0;0,5) = 2,6025\%$
- $1+r'(0;1) = (1+3\%)(1+0,1\%) \Leftrightarrow r'(0;1) = 3,103\%$
- $1+r'(0;1,5) = (1+3,5\%)(1+0,1\%) \Leftrightarrow r'(0;1,5) = 3,6035\%$
- $1+r'(0;2) = (1+4\%)(1+0,1\%) \Leftrightarrow r'(0;2) = 4,104\%$

Novo B0 das obrigações após subida das taxas:

- $B0^{A'} = \frac{4\%}{1 + 3,103\%} + \frac{104\%}{(1 + 4,104\%)^2} = 99,8414\%$
- $B0^{B'} = \frac{1,5\%}{(1 + 2,6025\%)^{0,5}} + \frac{1,5\%}{(1 + 3,103\%)} + \frac{1,5\%}{(1 + 3,6035\%)^{1,5}} + \frac{101,5\%}{(1 + 4,104\%)^2} = 98,0132\%$

Novo valor da carteira = $100.000 \times 99,8414\% + 300.000 \times 98,0132\% = 393.881\text{€}$

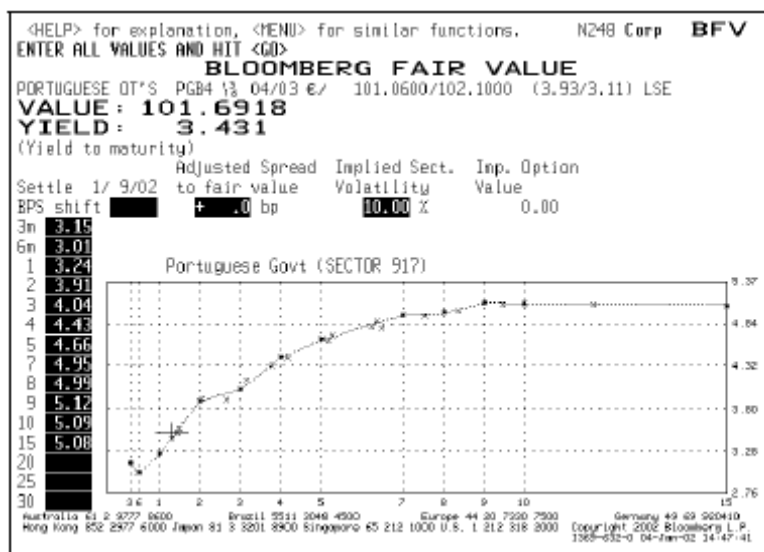
Caso Prático 2.2

Considere a seguinte obrigação do Tesouro português (OT), a taxa fixa, cuja ficha técnica foi retirada do sistema de informação Bloomberg:

DES	N248 Corp	DES
SECURITY DESCRIPTION		
PORTUGUESE OT'S PGB4 1/2 04/03 €/ 101.0600/102.1000 (3,93/3,11) LSE		
ISSUER INFORMATION	IDENTIFIERS	1) Euro Redenomination
Name OBRIG DO TES MEDIO PRAZO	Common 008440832	2) Additional Sec Info
Type Sovereign	ISIN PT0TEA0E0013	3) Identifiers
Market of Issue EURO-ZONE	BB number GG7379884	4) Ratings
SECURITY INFORMATION	RATINGS	5) Sec. Specific News
Country PT Currency EUR	Moody's Aa2	6) Custom Notes
Collateral Type BONDS	S&P NA	7) Issuer Information
Calc Typ(335)PORTUGAL-DEM. SETL	Composite AA2	8) ALLO
Maturity 4/23/2003 Series	ISSUE SIZE	9) Pricing Sources
NORMAL	Amt Issued	10) Related Securities
Coupon 4 1/2 FIXED	EUR 2,764,476 (M)	
ANNUAL ACT/ACT	Amt Outstanding	
Announcement Dt 1/30/98	EUR 2,764,476 (M)	
Int. Accrual Dt 4/23/98	Min Piece/Increment	
1st Settle Date 2/10/98	0.01/ 0.01	
1st Coupon Date 4/23/99	Par Amount 0.01	
Iss Pr 99.9200	BOOK RUNNER/EXCHANGE	
NO PROSPECTUS	LISBON	65) Old DES
		66) Send as Attachment
PTE 21.46667BLN ISS'D 2/10/98; PTE 40BLN 2/24/98; PTE 33.53333BLN 3/3/98; PTE 33. ADD'L 70MM ISS'D 08/00 FOR THE REPO MKT.		
Australia 61 2 8777 8600 Brazil 55 11 9049 4500 Europe 44 20 7390 7500 Germany 49 69 980410		
Hong Kong 852 2577 6000 Japan 81 3 3201 6900 Singapore 65 212 1000 U.S. 1 212 316 2000 Copyright 2002 Bloomberg L.P. 1165-632-0 04-Jan-02 14:46:49		

Trata-se de uma obrigação de dívida pública, com vencimento em 23/Abril/2003, reembolso bullet e um cupão anual fixo de 4.8125% (vencível no dia 23 de Abril de cada ano, sob a base de calendário ACT/ACT).

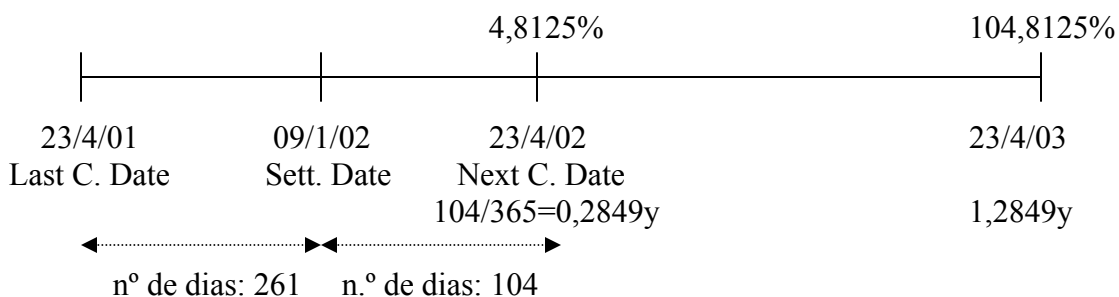
Considere ainda as seguintes taxas de juro spot sem risco (taxas efectivas anuais na base de calendário ACT/ACT):



Pretende-se que responda às questões seguintes, considerando como data de negociação o dia 04/Jan/2002 (6ª-feira):

- Calcule o valor de transacção da OT 4.8125% 23/04/2003, sabendo que esta obrigação está cotada a 101.06%-102.10%.
- Elabore o diagrama temporal de cash flows futuros associados à OT 4.8125% 23/04/2003.
- Estime, via interpolação linear, as taxas de juro spot sem risco a 0.2849 e 1.2849 anos.
- Calcule o valor do factor de desconto a 1.2849 anos.
- O mercado antecipa uma subida ou uma descida da taxa spot a 1 ano para o dia 23/Abril/2002?
- Formule uma decisão de compra ou de venda relativamente à OT 4.8125% 23/04/2003.
- Calcule a yield-to-maturity associada ao valor de cotação offer.
- Estime a taxa de rentabilidade efectiva anual gerada pela compra da obrigação em análise até à respectiva data de vencimento, assumindo o reinvestimento dos cash flows intermédios às actuais taxas de juro forward.
- Calcule a duração e a convexidade da OT 4.8125% 23/04/2003.
- Estime o impacto sobre o Fair Value da Obrigação de um choque multiplicativo igual a -20 basis points sobre a curva de taxa de juro.

b) Diagrama Temporal



Contagem dos dias:

- 09/01 = 31-9 = 22
- Fevereiro = 28
- Março = 31
- 23/04 = 23
- Total = 22+28+31+23 = 104

a) Valor de Transacção

$$AI = 4,8125\% * 261/365 = 3,44\%$$

$$VT \text{ ask} = 102,1\% + 3,44\% = 105,54\%$$

$$VT \text{ bid} = 101,06\% + 3,44\% = 104,5\%$$

c) $r(0;0,2849)$ e $r(0;1,2849)$

$$r(0;0,25) = 3,15\%$$

$$r(0;0,5) = 3,01\%$$

$$r(0;0,2849) = 3,15\% + (3,01\% - 3,15\%) * (0,2849 - 0,25) / (0,5 - 0,25) = 3,13\%$$

$$r(0;1) = 3,24\%$$

$$r(0;2) = 3,91\%$$

$$r(0;1,2849) = 3,24\% + (3,91\% - 3,24\%) * (1,2849 - 1) / (2 - 1) = 3,431\%$$

d) Factor de desconto a 1,2849 anos

$$\delta(1,2849) = P(0;1,2849) = 1 / (1 + 3,431\%)^{1,2849} = 0,9576$$

e) Subida ou uma descida da taxa spot a 1 ano para o dia 23/Abril/2002

$$[1 + r(0;1,2849)]^{1,2849} = [1 + r(0;0,2849)]^{0,2849} * [1 + f(0; 23/4/02; 23/04/03)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(0; 23/4/02; 23/04/03) = 3,517\%$$

Espera-se, então, no mercado uma subida da taxa de spot a 1 ano para o dia 23/4/02. Pois a taxa forward a um ano é maior que a taxa spot a um ano à data de hoje.

$$f(0; 0,2849; 1,2849) > r(0,1) \Leftrightarrow 3,517\% > 3,24\%$$

f) Compra ou Venda?

$$B0 = \frac{4,8125\%}{(1 + 3,13\%)^{0,2849}} + \frac{104,8125\%}{(1 + 3,431\%)^{1,2849}} = 4,77\% + 103,66\% = 105,14\%$$

Isto significa que para eu receber 4,8125% daqui a 0,2849 anos e 104,8125% daqui a 1,2849 anos, devo investir hoje 4,77% mais 103,66%, ou seja, 105,14%, pois tendo em conta as taxas em vigor no mercado é o valor justo. Caso o mercado me peça para nas mesmas condições investir hoje mais de 105,14% não compensa comprar a obrigações.

$B0 > VT \text{ bid} \rightarrow$ Não vender

$B0 < VT \text{ ask} \rightarrow$ Não comprar

g) YTM ao valor de cotação offer (ou ask)

$$105,54\% = \frac{4,8125\%}{(1 + YTMask)^{0,2849}} + \frac{104,8125\%}{(1 + YTMask)^{1,2849}}$$

h) TRR

$$VT \text{ ask } (1 + TRR)^{1,2849} = 4,8125\%[1 + f(0; 0,2849; 1,2849)] + 104,8125\% \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 105,54\%(1 + TRR)^{1,2849} = 4,8125\%*(1 + 3,517\%) + 104,8125\% \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow TRR = 3,12337\%$$

i) Duração e Convexidade

$$DFW = \frac{0,2849 \times \frac{4,8125\%}{(1 + 3,13\%)^{0,2849}} + 1,2849 \times \frac{104,8125\%}{(1 + 3,431\%)^{1,2849}}}{105,14\%} = 1,24y$$

$$CFW = \frac{0,2849 \times 1,2849 \times \frac{4,8125\%}{(1 + 3,13\%)^{0,2849}} + 1,2849 \times 2,2849 \times \frac{104,8125\%}{(1 + 3,431\%)^{1,2849}}}{105,14\%} = 2,82$$

j) $\lambda = -0,2\%$

$$\Delta\%B0 = -1,24*(-0,002) + \frac{1}{2}*2,82*(-0,002)^2 = 0,2486\%$$

Outra forma de resolução será:

$$1+r'(0;0,2849) = (1+3,13\%)(1-0,2\%) \Leftrightarrow r'(0;0,2849) = 2,92374\%$$

$$1+r'(0;1,2849) = (1+3,431\%)(1-0,2\%) \Leftrightarrow r'(0;1,2849) = 3,2241\%$$

$$B0' = \frac{4,8125\%}{(1+2,92374\%)^{0,2849}} + \frac{104,8125\%}{(1+3,2241\%)^{1,2849}} = 105,398\%$$

$$\Delta\%B0 = (B0'-B0)/B0 = 0,2455\%$$

Caso Prático 2.11

Considere as seguintes obrigações com risco e valor nominal idêntico (50 euros):

	X	Y
Taxa de Cupão	5%	4,5%
Periodicidade do Cupão	Anual	Semestral
Maturidade (anos)	5	2

Admita que a taxa de rendimento (YTM) das obrigações de risco semelhante é igual a 5% e que a curva de taxas de juro é horizontal. Pretende-se que:

- Determine o preço das obrigações X e Y.
- Calcule as seguintes medidas para as obrigações X e Y:
 - Duração de Macaulay
 - Convexidade
- Suponha que a curva de taxas de juro sofreu um choque aditivo de 100 pontos de base. Qual o novo valor das obrigações X e Y?
- Reformule a alínea anterior utilizando as seguintes medidas:
 - Duração
 - Duração e convexidade

a)

$$\text{Obrigação X: } B_0 = \frac{2.5}{1.05} + \frac{2.5}{1.05^2} + \frac{2.5}{1.05^3} + \frac{2.5}{1.05^4} + \frac{50+2.5}{1.05^5} = 50 \text{ ou } B_0 = 100\% \Leftrightarrow T.\text{cupão} = r \Rightarrow B_0 = VN$$

$$\text{Obrigação Y: } B_0 = \frac{1.125}{1.0247} + \frac{1.125}{1.0247^2} + \frac{1.125}{1.0247^3} + \frac{50+1.125}{1.0247^4} = 49.5867 \rightarrow 50*(100\%+4,5\%/2)$$

A taxa de actualização (r) para a obrigação Y é a taxa equivalente semestral à YTM :

$$r = (1+0.05)^{\frac{1}{2}} - 1 = 2.47\%$$

bi)

No caso presente estamos a admitir que a curva de taxas de juro é *flat*. Assim, a medida de duração que iremos utilizar é a designada duração de Macaulay, que apenas é consistente com um processo de evolução de taxas de juro em que uma curva de taxas de juro rasa se desloca paralelamente (sem alteração da inclinação). A duração não é mais do que uma medida de sensibilidade do preço de uma obrigação a alterações das taxas de juro de mercado.

Obrigação X

t	CF	Fact Act	CF Act	CF Act x t
1	2.5	0.9524	2.3810	2.3810
2	2.5	0.9070	2.2676	4.5351
3	2.5	0.8638	2.1596	6.4788
4	2.5	0.8227	2.0568	8.2270
5	52.5	0.7835	41.1351	205.6756
totais			50.00	227.30

Obrigação Y

t	CF	Fact Act	CF Act	CF Act x t
0.5	1.125	0.9759	1.0979	0.5489
1	1.125	0.9524	1.0714	1.0714
1.5	1.125	0.9294	1.0456	1.5684
2	51.125	0.9070	46.3719	92.7438
totais			49.59	95.93

$$DM_x = \frac{227.30}{50} = 4.546 \text{ anos}$$

$$DM_y = \frac{95.93}{49.59} = 1.935 \text{ anos}$$

$$DM_x = \frac{1 \times \frac{5\%}{(1+5\%)} + 2 \times \frac{5\%}{(1+5\%)^2} + 3 \times \frac{5\%}{(1+5\%)^3} + 4 \times \frac{5\%}{(1+5\%)^4} + 5 \times \frac{105\%}{(1+5\%)^5}}{100\%} = 4.546y$$

$$DM_y = \frac{0.5 \times \frac{2.25\%}{(1+5\%)^{0.5}} + 1 \times \frac{2.25\%}{(1+5\%)} + 1.5 \times \frac{2.25\%}{(1+5\%)^{1.5}} + 2 \times \frac{102.25\%}{(1+5\%)^2}}{99.1734\%} = 1.935y$$

bii)

A relação entre taxa de juro e o preço da obrigação é dada por uma curva com forma convexa. A convexidade (C) constitui uma segunda medida para quantificarmos a exposição do preço da obrigação ao risco de taxa de juro.

Obrigação X

t	CF	Fact Act	CF Act	CF Act x t	CF Act x t x (t+1)
1	2.5	0.9524	2.3810	2.3810	4.7619
2	2.5	0.9070	2.2676	4.5351	13.6054
3	2.5	0.8638	2.1596	6.4788	25.9151
4	2.5	0.8227	2.0568	8.2270	41.1351
5	52.5	0.7835	41.1351	205.6756	1234.0537
totais			50.00	227.30	1319.47

$$C_x = \frac{1,319.47}{50} = 26.389.$$

Obrigação Y

t	CF	Fact Act	CF Act	CF Act x t	CF Act x t x (t+1)
0.5	1.125	0.9759	1.0979	0.5489	0.8234
1	1.125	0.9524	1.0714	1.0714	2.1429
1.5	1.125	0.9294	1.0456	1.5684	3.9210
2	51.125	0.9070	46.3719	92.7438	278.2313
		totais	49.59	95.93	285.12

$$C_Y = \frac{285.12}{49.59} = 5.75$$

$$CM_x = \frac{1 \times 2 \times \frac{5\%}{(1+5\%)} + 2 \times 3 \times \frac{5\%}{(1+5\%)^2} + 3 \times 4 \times \frac{5\%}{(1+5\%)^3} + 4 \times 5 \times \frac{5\%}{(1+5\%)^4} + 5 \times 6 \times \frac{105\%}{(1+5\%)^5}}{100\%}$$

$$= 26,389$$

$$CM_y = \frac{0,5 \times 1,5 \times \frac{2,25\%}{(1+5\%)^{0,5}} + 1 \times 2 \times \frac{2,25\%}{(1+5\%)} + 1,5 \times 2,5 \times \frac{2,25\%}{(1+5\%)^{1,5}} + 2 \times 3 \times \frac{102,25\%}{(1+5\%)^2}}{99,1734\%}$$

$$= 5,75$$

c)

Uma subida da taxa de juros de 100 pontos base (a taxa de actualização passa de 5% para 6%) irá provocar uma descida do preço das obrigações igual a:

$$\text{Obrigação X: } B_0 = \frac{2.5}{1.06} + \frac{2.5}{1.06^2} + \frac{2.5}{1.06^3} + \frac{2.5}{1.06^4} + \frac{50+2.5}{1.06^5} = 47.8938 \text{ ou } B_0 = 95.7876\%, \Delta\%B_0 = -4.212\%$$

$$\text{Obrigação Y: } B_0 = \frac{1.125}{1.02956} + \frac{1.125}{1.02956^2} + \frac{1.125}{1.02956^3} + \frac{50+1.125}{1.02956^4} = 48.6865 \text{ ou } B_0 = 97.373\%, \Delta\%B_0 = -1.815\%$$

A taxa de actualização (r) para a obrigação Y é a taxa equivalente semestral à YTM :

$$r = (1+0.06)^{\frac{1}{2}} - 1 = 2.956\%$$

di)

Utilizando a medida de duração podemos estimar qual o impacto no preço da obrigação de uma variação da taxa de juro (100 p.b.).

Esta relação, para o exemplo em análise, dada pela duração para estimar a variação do valor da obrigação só é válida em condições restritivas:

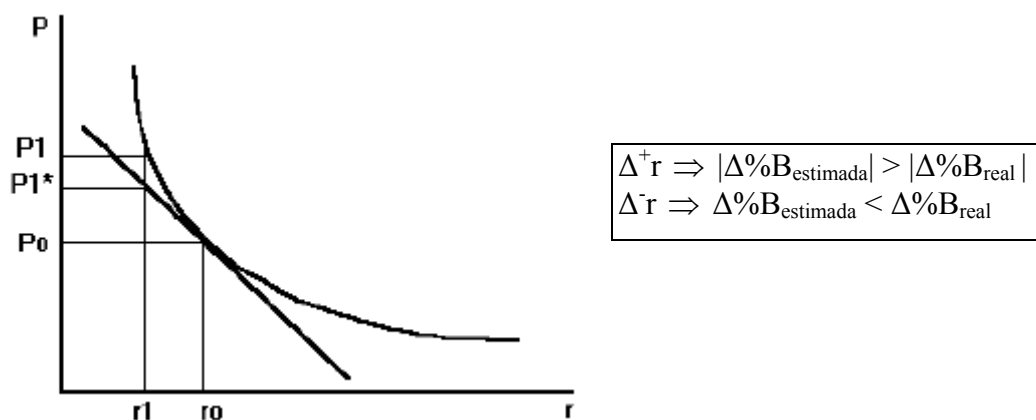
- Variação infinitesimal da taxa de juro;
- A curva de taxas de juro ter uma inclinação horizontal (curva flat);
- Deslocamentos paralelos da curva de taxas de juro (choques aditivos).

Apenas é razoável admitir que a *yield to maturity* para todas as obrigações varia no mesmo valor para uma dada alteração da curva de taxas de juro, quando esta tem inclinação horizontal. Caso contrário, para uma dada alteração da curva de taxas de juro, as *yields to maturity* de diferentes obrigações variam por diferentes valores.

$$\text{Obrigação X: } \frac{\Delta B_0}{B_0} \approx -4.546 \times \frac{1\%}{1.05} = -4.329\%$$

$$\text{Obrigação Y: } \frac{\Delta B_0}{B_0} \approx -1.935 \times \frac{1\%}{1.05} = -1.843\%$$

Existe alguma divergência entre a variação percentual do preço estimada através da duração e os cálculos efectuados na alínea c). Esta divergência resulta do facto de a curva que estabelece a relação entre o preço da obrigação e a taxa de juro ser convexa, ou seja, não ter uma inclinação constante. A duração não capta o efeito da convexidade quando a taxa de juro varia, sendo o erro cometido (no gráfico seguinte a distância entre o ponto P1 e P1*, ou seja, entre a curva e a recta) tanto maior quanto maior for a variação da taxa de juro. A expressão que apenas utiliza a duração subavalia sempre o verdadeiro valor da obrigação após a variação da taxa de juro.



Portanto, a expressão que permite estimar o impacto sobre o preço duma alteração da taxa de juro recorrendo à duração, só é válida para variações muito pequenas taxa de juro.

dii)

A introdução da medida de convexidade permite obter uma estimativa mais aproximada da variação percentual do preço da obrigação em consequência de uma variação da taxa de juro.

$$\text{Obrigação X: } \frac{\Delta B_0}{B_0} \approx -4.546 \times \frac{1\%}{1.05} + \frac{1}{2} \times 26.389 \times \left(\frac{1\%}{1.05} \right)^2 = -4.198\%$$

$$\text{Obrigação Y: } \frac{\Delta B_0}{B_0} \approx -1.935 \times \frac{1\%}{1.05} + \frac{1}{2} \times 5.75 \times \left(\frac{1\%}{1.05} \right)^2 = -1.814\%$$

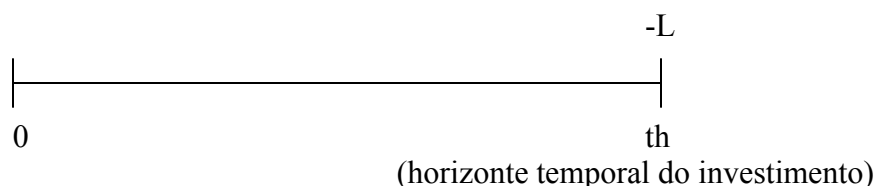
A comparação dos valores obtidos com os resultantes da utilização da expressão que apenas utiliza a duração, permite-nos concluir que a introdução da convexidade permite obter um valor mais aproximado para a variação percentual do valor da obrigação resultante de uma alteração da taxa de actualização. A diferença ainda existente resulta de desprezarmos os termos de ordem superior a 2 na expansão em série de Taylor.

A convexidade tem implicações em termos de avaliação de obrigações, sendo o seu valor relativo maior quando a volatilidade esperada das taxas de juro é maior, ou seja, quanto maior for a variação esperada das taxas de juro, maior o valor que os investidores atribuem a uma obrigação com maior convexidade (tudo o resto constante: *yield*, preço e duração).

IMUNIZAÇÃO DO RISCO DE TAXA DE JURO

Imunização Convencional ou Clássica (uniperíodo)

Imagine que em “th” há uma responsabilidade a ser cumprida (veja o diagrama seguinte). A imunização do risco de taxas de juro, visa garantir hoje (momento 0) que o valor futuro (isto é, o valor no final do horizonte temporal de investimento) da carteira de obrigações é não inferior ao valor da responsabilidade a pagar, qualquer que seja a evolução das taxas de juro entre os momentos 0 e th.



L = Liability = valor da responsabilidade a pagar

Quer isto dizer, há a necessidade de gerir uma carteira de obrigações, para que em th, independentemente da subida ou descida das taxas, haja capacidade suficiente para pagar as minhas responsabilidades.

Um exemplo muito comum é o dos Fundos de Pensões, em que este fundo recolhe dinheiro aos pensionistas e depois aplica em acções e obrigações, pelo que o valor futuro desta carteira deverá ser o suficiente para responder às responsabilidades futuras para com os pensionistas.

Sendo S_h^c o valor futuro da carteira de obrigações no momento th , e resumindo o que atrás foi dito: $S_h^c \geq L$

S_h^c possui duas importantes componentes:

- Valor acumulado dos CF's vencidos e reinvestidos;
- Valor de mercado da carteira no momento th .

Quanto investir no momento zero?

Vai-se investir no momento zero o valor actualizado das minhas responsabilidades (L).

$$B0^c = \frac{L}{[1+r(0,th)]^{th}} \quad S_h^c$$

0 th

Demonstra-se que num cenário de estabilidade de taxas de juro (isto é, as taxas spot futuras serem iguais às actuais taxas forward): o valor futuro da carteira é igual à responsabilidade a pagar.

$$S_h^c = B0^c [1+r(0,th)]^{th} = \frac{L}{[1+r(0,th)]^{th}} [1+r(0,th)]^{th} = L \longrightarrow S_h^c = L$$

Condições de Imunização

1. $B0^c = \frac{L}{[1+r(0,th)]^{th}}$
2. Garantir que o valor futuro da carteira de obrigações é mínimo num cenário de estabilidade de taxas de juro. Ou seja, quando há estabilidade de taxas de juro pretende-se que o valor futuro da carteira esteja no seu valor Mínimo.

$$\frac{\text{Min } S_h^c}{r} = \frac{\text{Min } B0(1+r)^{th}}{r}$$

Cálculo do mínimo de S_h^c :

$$\frac{d S_h^c}{d r} = 0 \Leftrightarrow \frac{d B_0^c}{d r} \times (1+r)^{th} + B_0^c \times th \times (1+r)^{th-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{d B_0^c}{d r} \times (1+r)^{th} + B_0^c \times th \times (1+r)^{th-1}}{(1+r)^{th}} = \frac{0}{(1+r)^{th}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d B_0^c}{d r} + B_0^c \times \frac{th}{1+r} = 0 \Leftrightarrow th = -\frac{d B_0^c}{d r} \times \frac{1}{B_0^c} \times (1+r) \Leftrightarrow th = -\left[-\sum_{h=1}^n th \times \frac{CF_h}{(1+r)^{th+1}} \right] \times \frac{1}{B_0^c} \times (1+r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow th = D^c$$

Nota: Se S_h^c corresponde ao valor futuro da carteira de obrigações (valor acumulado dos CF's vencidos e reinvestidos mais o valor de mercado da carteira no momento th), então:

$$S_h^c = B0^c \cdot (1 + TRR)^{th}$$

Condições de Imunização:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad B0^c = \frac{L}{[1 + r(0, th)]^{th}} \\ 2. \quad D^c = th \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} S_h^c \geq L \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B_0^c [1 + TRR]^{th} \geq B_0^c [1 + r(0, th)]^{th} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow TRR \geq r(0, th) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad B0^c = \frac{L}{[1 + r(0, th)]^{th}} \\ 2. \quad D^c = th \end{array} \right. \xrightarrow{\text{então}} \left\{ \begin{array}{l} S_h^c \geq L \\ TRR \geq r(0, th) \end{array} \right.$$

Exemplo 47: Veja a seguinte Ficha técnica da obrigação, e repare nos seus S_h e $TRRh$.

Ficha Técnica:

VC	100%
Taxa de Cupão	23,375%
Frequência do Cupão	Anual
Maturidade	4 anos
YTM	23,375%
DM	3,000006

Sh:

- $S1 = 23,375\% + \left[\frac{23,375\%}{(1 + ytm)^1} + \frac{23,375\%}{(1 + ytm)^2} + \frac{123,375\%}{(1 + ytm)^3} \right]$
- $S2 = 23,375\% \times (1 + ytm) + 23,375\% + \left[\frac{23,375\%}{(1 + ytm)^1} + \frac{123,375\%}{(1 + ytm)^2} \right]$
- $S3 = 23,375\% \times (1 + ytm)^2 + 23,375\% \times (1 + ytm) + 23,375\% + \left[\frac{123,375\%}{(1 + ytm)^1} \right]$
- $S4 = 23,375\% \times (1 + ytm)^3 + 23,375\% \times (1 + ytm)^2 + 23,375\% \times (1 + ytm) + 123,375\%$

h \ ytm	20%	23,375%	25%
1	130,48%	123,38%	120,20%
2	156,58%	152,21%	150,25%
3	187,90%	187,79%	187,82%
4	225,48%	231,69%	234,77%

 $\geq 100\%(1+23,375\%)^3$

De acordo com as condições de imunização, ilustradas na página anterior, a Duração Média da carteira deverá ser igual ao momento “th” (quando é necessário pagar as responsabilidades existentes), e o B0 da carteira deverá corresponder ao valor actualizado das minhas responsabilidades.

$$Th = Dc = 3$$

$$B0^c = \frac{L}{[1 + r(0, th)]^{th}} \Leftrightarrow 100\%(1+23,375\%)^3 = L \Leftrightarrow L = 187,79\%$$

Logo, e sabendo que a carteira tem o seu valor mínimo quando há estabilidade de taxas de juro (neste caso 23,375%), é natural que quando as taxas evoluam para valores diferentes (neste caso 20% ou 25%) a carteira tenha um valor superior a L (187,79%).

TRRh:

h \ ytm	20%	23,375%	25%
1	30,484%	23,375%	20,203%
2	25,132%	23,375%	22,578%
3	23,398%	23,375%	23,380%
4	22,539%	23,375%	23,783%

 $\geq 23,375\%$

A forma de calculo de qualquer TRR deste quadro é fácil, basta usar a expressão $S_h^c = B0^c \cdot (1+TRR)^{th}$. Por exemplo a TRR2 para uma ytm a 20%:

$$\left[\frac{156,58\%}{100\%} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 = 25,132\%$$

Explicação Intuitiva (Efeito Reinvestimento e Efeito Preço)

A variação das taxas de juro produz dois efeitos de sinal oposto sobre o valor futuro da carteira:

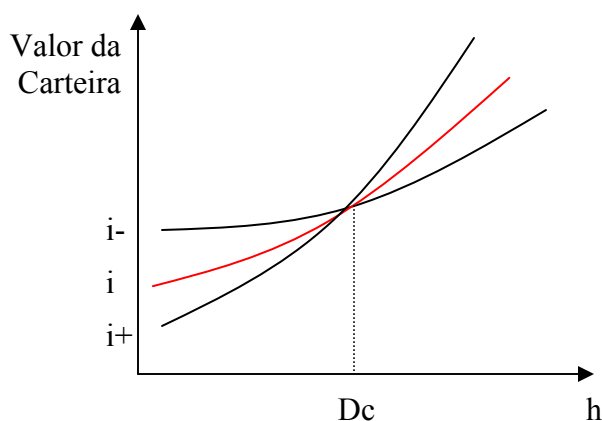
- Efeito Reinvestimento (ER) – Este efeito tem um impacto no valor acumulado, ou seja, sobre o valor dos Cash Flows vencidos e reinvestidos.

$$\Delta r > 0 \Rightarrow ER \uparrow (+)$$

- Efeito Preço (EP) – Este efeito tem um impacto sobre o valor de mercado (preço) das obrigações em carteira.

$$\Delta r > 0 \Rightarrow EP \downarrow (-)$$

Note-se que quando $D^c = th$, então os dois efeitos de sinal contrário têm igual magnitude, logo anulam-se mutuamente.



$$h < D \rightarrow ER < EP$$

$$h > D \rightarrow ER > EP$$

Caso Prático 2.14

O Fundo de Pensões GN pretende garantir o cumprimento de uma responsabilidade no valor de 1.5 milhões de euros, daqui a 1.5 anos, através da transacção das obrigações A, B e C.

Actualmente, são as seguintes as condições de mercado:

k	0.5 anos	1 ano	1.5 anos	2 anos
Taxa spot	2.5%	3%	3.5%	4%

	Obrigação A	Obrigação B	Obrigação C
Valor nominal	100%	100%	100%
Taxa de cupão	4%	3%	0%
Frequência do cupão	anual	semestral	-
Maturidade	2 anos	1.5 anos	1 ano
Fair price	100.04%	99.33%	97.09%
DFW	1.9611 anos	1.4778 anos	1.0 anos
Valor de cotação	100%	99.40%	97.05%

Pretende-se que:

- Constitua uma carteira de obrigações que imunize a responsabilidade do fundo.

b) Efectue, passado 1 ano, o rebalanceamento do portfolio constituído na alínea anterior, admitindo que, um ano depois, as condições de mercado eram as seguintes:

	0.5 anos	1 ano
Taxa <i>spot</i>	3%	3.5%

	OT(A)	OT(B)
Duração	1 ano	0.5 anos
Valor de cotação	100.48%	100.01%

c) Determine a TRR associada ao investimento em análise, no final do horizonte temporal de investimento.

d) Reformule a alínea a), admitindo que o Fundo de Pensões GN pretende “bater o mercado”, uma vez que o gestor do Fundo espera que as futuras taxas de juro *spot* sejam inferiores às actuais taxas de juro *forward* implícitas à *spot yield curve*.

e) Reformule a alínea b) na sequência da estratégia activa da alínea anterior, assumindo idênticos pressupostos para daqui a 1 ano.

f) Reformule a alínea c) na sequência da estratégia activa da alínea anterior, assumindo as seguintes condições de mercado para daqui a 1.5 anos:

k	0.5 anos
$r(1.5,2)$	3.5%

	OT(A)
Cotação	100.20%
AI	2%
VT	102.20%
Duração	0.5 anos

a) Constituição da carteira de obrigações que imuniza a responsabilidade do fundo

1º Passo: Valor da Carteira de Obrigações a constituir

$$B_0 = \frac{1,5\text{M€}}{(1 + 3,5\%)^{1,5}} = 1.424.559 \text{ €}$$

2º Passo: Combinações Possíveis de Carteiras

(A, B); (A, C); (A, B, C); (~~B, C~~)

A partida exclui-se a carteira (B, C), pois sabendo que uma das condições de imunização é $D^c = t_h$, a duração média da carteira nunca poderia ser igual a 1,5 anos (t_h), pois a carteira B tem uma duração de 1,4778 anos e a C de 1 ano.

3º Passo: Escolha de um Critério de Decisão

$$\text{nota: } DFW^c = \sum_{j=1}^p DFW_j \times (x_j) \longrightarrow \text{peso relativo da obrigação } j \longrightarrow \frac{B0_j}{B0^c}$$

Existem dois critérios, o primeiro é sem dúvida muito mais usado que o segundo. Ora veja-se quais são estes critérios:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{x_1, x_2, \dots, x_n} \quad & \sum_{i=1}^n x_i \times (B0_i - VT0_i) \\ \text{s.a.:} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n D_i \times x_i = th \\ \sum_{i=1}^n x_i = 100\% \end{cases} \end{aligned}$$

A explicação da utilização deste critério é fácil, veja-se que $(B0_i - VT0_i)$ corresponde ao Valor Actual Líquido (VALi). Significa isto que quando $B0 > VT0$ vale a pena comprar as obrigações, daí que se pretenda a maximização desta.

$$\begin{aligned} \text{Max}_{x_1, x_2, \dots, x_n} \quad & C^c = \sum_{i=1}^n x_i \times C_i \\ \text{s.a.:} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n D_i \times x_i = th \\ \sum_{i=1}^n x_i = 100\% \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, para a resolução do exercício vai-se escolher o primeiro critério de decisão, ou seja, a maximização do VAL.

4º Passo: Escolha da Carteira (usando o critério do VAL)

(A, B)	
100,04%- 100%	99,33%- 99,4%
+	-

(A, C)	
100,04%- 100%	97,09%- 97,05%
+	+

(A, B, C)		
100,04%- 100%	99,33%- 99,4%	97,09%- 97,05%
+	-	+

Logo, a combinação óptima será a carteira (A, C).

5º Passo: Peso relativo de cada obrigação na carteira ($x_A, x_C = ?$)

$$\begin{cases} 1,9611 * x_A + 1 * x_C = 1,5 \\ x_A + x_C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 47,976\% \\ x_C = 52,024\% \end{cases}$$

Passo Alternativo ao Passo 4 e 5: Utilização do Método do Simplex para determinar a composição óptima da carteira

$$\text{Max}_{x_A, x_B, x_C} Z = (100,04\% - 100\%)x_A + (99,33\% - 99,4\%)x_B + (97,09\% - 97,05\%)x_C$$

$$\text{Max}_{x_A, x_B, x_C} Z = 0,0004x_A - 0,0007x_B + 0,0004x_C$$

$$\text{s.a.:} \begin{cases} 1,9611x_A + 1,4778x_B + 1x_C = 1,5 \\ x_A + x_B + x_C = 1 \end{cases}$$

Problema Auxiliar:

$$\text{Min } Z' = a_1 + a_2 = -2,9611x_A - 2,4778x_B - 2x_C + 2,5$$

	x_A	x_B	x_C	a_1	a_2	RHS
Z'	2,9611	2,4778	2	0	0	2,5
Z	-0,0004	0,0007	-0,0004	0	0	0
a_1	1,9611	1,4778	1	1	0	1,5
a_2	1	1	1	0	1	1

Z'	0	0,24644	0,49008	-1,5099	0	0,23512
Z	0	0,001	-0,0002	0,0002	0	0,00031
x_A	1	0,75356	0,50992	0,50992	0	0,76488
a_2	0	0,24644	0,49008	-0,5099	1	0,23512

Z'	0	0	0	-1	-1	0
Z	0	0,0007	0			1,6E-05
x_A	1	0,49714	0			0,52024
x_C	0	0,50286	1			0,47976

CR<0

CR>0

$$x_A^* = 52,024\%, x_B^* = 47,976\%$$

6º Passo: Constituição da Carteira

Obrigação	%	Investimento	Valor Nominal
A	52,024%	1.424.559*0,52024 741.112,57€	741.112,57€
C	47,976%	1.424.559*0,47976 683.446,43€	683.446,43/97,05% 704.220,95€
	100%	1.424.559€	

Nota: $V_n * 97,05\% = \text{Investimento}$

b) Rebalanceamento da carteira um ano depois

Valor da Carteira um ano depois (S_1^c):

Cash Flows	
A	$4\% * 741.112,57 = 29.644,50\text{€}$
C	$100\% * 704.220,95 = 704.220,95\text{€}$
Valor de Mercado das Obrigações	
A	$741.112,57 * 100,48\% = 744.669,91\text{€}$
Total	$1.478.535,36\text{€}$

Nova Composição da Carteira:

$$th = 0,5y \Rightarrow DFW^c = 0,5y$$

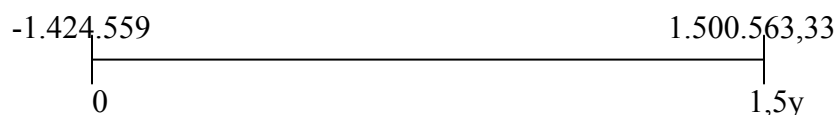
Logo, à que reajustar a carteira pois na situação em que estávamos (carteira composta somente pela obrigação A), apenas geráramos Cash Flows daqui a um ano. Como é facilmente perceptível, esta nova carteira será composta única e exclusivamente pela obrigação B.

Obrigação	%	Investimento	Valor Nominal
B	100%	$1.478.535,36\text{€}$	$\frac{1.478.535,36}{100,01\%} = 1.478.387,52\text{€}$

c) TRR no final do horizonte temporal

Valor da Carteira em 1,5y ($S_{1,5}^c$):

$$1.478.387,52\text{€} * (100\% + 1,5\%) = 1.500.563,33\text{€}$$



$$1.424.559(1+TRR)^{1,5} = 1.500.563,33 \Leftrightarrow TRR = 3,526\%$$

Nota: A TRR terá que ser maior que a $r(0;1,5)$, pois $S_{1,5}^c > L$.

Veja-se que $TRR > r(0;1,5) \Leftrightarrow 3,526\% > 3,5\%$

O Caso Prático 2.14 será concluído mais adiante, pois agora será abordado outras questões teóricas importantes para a resolução do resto do exercício.

Limitações da Imunização

Na prática uma estratégia de imunização encontra-se limitada por três factores:

- Necessidade de reajustamento periódico da carteira de obrigações, no mínimo sempre que a carteira gere Cash Flows (de modo a garantir a condição de imunização da carteira $D^c = th$).
- Existem Custos de Transacção associados aos reajustamentos de carteira. Assim, na prática o processo de reajustamento imunizante terá que ser periódico e não contínuo.
- Risco de Processo Estocástico, isto é, risco do conceito de duração utilizado não contemplar todas as possibilidades da evolução das taxas de juro.

Estratégias Activas

O gestor propositadamente, e em função da sua expectativa de evolução de taxas de juro, define: $D^c \neq th$. Desta forma, o gestor age com o intuito de “bater o mercado”, isto é, maximizar o valor futuro da carteira.

Portanto, o gestor vai agir com a finalidade de obter uma $TRR_h \geq r(0, th)$. Visando desta forma atingir um valor futuro (ou uma TRR) para a carteira de obrigações superior ao proporcionado pela imunização clássica.

Obviamente que estas estratégias activas têm muito maior risco associado a si.

Gestor espera Taxas mais Altas que o mercado

Se o gestor prevê taxas spot futuras mais altas que as actuais taxas forward, o objectivo deste para maximizar o valor da carteira será fazer com que o Efeito Reinvestimento tenha muito mais peso que o Efeito Preço.

Expectativa: $r(t, T) > f(0, t, T)$

Objectivo: $ER > EP$

Acção: $th > D^c \Leftrightarrow D^c < th$

Gestor espera Taxas mais Baixas que o mercado

Se o gestor prevê taxas spot futuras mais baixas que as actuais taxas forward, o objectivo deste para maximizar o valor da carteira será fazer com que o Efeito Preço tenha muito mais peso que o Efeito Reinvestimento.

Expectativa: $r(t, T) < f(0, t, T)$

Objectivo: $ER < EP$

Acção: $th < D^c \Leftrightarrow D^c > th$

Se a expectativa for concretizada $\Rightarrow Sh^c > L$

Se a expectativa não for concretizada $\Rightarrow Sh^c < L$

Caso Prático 2.14 (continuação)

d) Nova Composição da Carteira (expectativa de taxas spot futuras mais baixas que o Mercado)

$$\text{Momento 0: } B_0 = \frac{1,5\text{M€}}{(1+3,5\%)^{1,5}} = 1.424.559 \text{ €}$$

Expectativa de Taxas spot futuras mais baixas que o mercado:

$$EP > ER \Rightarrow th < D^c \Leftrightarrow D^c > 1,5y$$

Composição da Carteira: $x_A = 100\%$ (obrigação com a DFW mais alta)

Obrigação	%	Investimento	Valor Nominal
A	100%	1.424.559 €	1.424.559 €

e) Rebalanceamento da carteira um ano depois

Valor da Carteira um ano depois (S_1^c):

Cash Flows	
A	$4\% * 1.424.559 \text{ €} = 56.982,36\text{€}$
Valor de Mercado das Obrigações	
A	$1.424.559 \text{ €} * 100,48\% = 1.431.396,88\text{€}$
Total	$1.488.378,24\text{€}$

Veja-se que o valor da carteira, um ano depois, usando uma estratégia activa (1.488.378,24€) é maior que o valor da carteira usando uma estratégia de imunização clássica (1.478.535,36€ - alínea b). Logo pode-se concluir que as expectativas do gestor encontravam-se correctas (conforme vamos provar já a seguir).

$$[1+r(0;1,5)]^{1,5} = [1+r(0,1)] * [1+f(0;1;1,5)]^{0,5} \Leftrightarrow f(0;1;1,5) = \left[\frac{(1+3,5\%)^{1,5}}{(1+3\%)} \right]^{\frac{1}{0,5}} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(0;1;1,5) = 4,507\%$$

$$r(1;1,5) < f(0;1;1,5) \Leftrightarrow 3\% < 4,507\% \rightarrow \text{confirma-se a expectativa do gestor}$$

$$[1+r(0;2)]^2 = [1+r(0,1)] * [1+f(0,1,2)] \Leftrightarrow f(0,1,2) = 5\%$$

$$r(1,2) < f(0,1,2) \Leftrightarrow 3,5\% < 5\% \text{ confirma-se a expectativa do gestor}$$

Nova Composição da Carteira:

- Expectativa: taxas spot futuras mais baixas que o mercado
- Objectivo: $EP > ER \Rightarrow D^c > 0,5y$
- A única obrigação disponível que cumpre este requisito é a obrigação A, logo $x_A = 100\%$

Obrigação	%	Investimento	Valor Nominal
A	100%	1.488.378,24€	$1.488.378,24/100,48\%$ 1.481.269,15€

f) TRR no final do horizonte temporal

$$S_{1,5^c} = 1.481.269,15 * VT = 1.481.269,15 * 102,2\% = 1.513.857,07€$$

$$1.424.559(1+TRR)^{1,5} = 1.513.857,07 \Leftrightarrow TRR = 4,136\%$$

Veja-se que o valor acumulado final (1.513.857,07€) é superior a 1.500.000€. Logo, as expectativas do gestor verificaram-se, e como não podia deixar de ser é também obvio que a TRR é maior que a $r(0;1,5)$; $4,136\% > 3,5\%$.

Confirmação das expectativas do gestor:

$$f(0;1,5;2) > r(1,5;2) \Leftrightarrow \left[\frac{(1+4\%)^2}{(1+3,5\%)^{1,5}} \right]^{0,5} - 1 > 3,5\% \Leftrightarrow 5,514\% > 3,5\%$$

$$f(1;1,5;2) > r(1,5;2) \Leftrightarrow \left[\frac{(1+3,5\%)^2}{(1+3\%)^{0,5}} \right]^{0,5} - 1 > 3,5\% \Leftrightarrow 4,002\% > 3,5\%$$

TEORIAS DA CARTEIRA

Neste capítulo das Teorias da Carteira os Modelos que irão ser estudados são Modelos de Média Variância.

Existem diferentes critérios de composição óptima de uma carteira de investimentos. Todavia, todos os critérios assentam num pressuposto base, isto é, qualquer investidor racional tem dois objectivos:

- Maximizar a rentabilidade esperada;
- E minimizar o risco (portanto, a incerteza sobre a rentabilidade final).

Ou seja:

- Face a dois investimentos alternativos de igual risco, o investidor escolhe o investimento com maior rentabilidade esperada (*hipótese de não saciedade*); e
- Face a dois investimentos alternativos com igual taxa de rentabilidade esperada, o investidor escolhe o investimento com menor risco (*hipótese de aversão ao risco*).

RENTABILIDADE E RISCO

Para seleccionar os títulos a integrar numa carteira de investimentos um investidor necessita de estimar a rentabilidade e o risco associados a cada um dos títulos, para o horizonte temporal do investimento futuro.

Assim, e dado que como pano de fundo estão os Modelos de Média Variância, para analisar a rentabilidade esperada e o risco temos que:

- Rentabilidade
 - $E(r_i)$ = taxa de rentabilidade esperada para o título i
 - ◆ r_i = taxa de rentabilidade do título i é uma variável aleatória
- Risco
 - σ_i = desvio padrão da taxa de rentabilidade do título i
 - $\sigma_i^2 = \text{Var}(r_i)$ = variância da taxa de rentabilidade do título i (risco)
 - ◆ $\text{Var}(r_i) = E\{[r_i - E(r_i)]^2\}$

Por observação da fórmula da Variância, podemos facilmente concluir que quanto maior for a variância maior é o risco, pois maior é a probabilidade de afastamento de r_i face ao valor esperado.

Formas de Analisar a Rentabilidade (de um título)

Abordagem Histórica. Esta considera a rentabilidade futura como uma continuação da rentabilidade passada. Na prática esta abordagem é pouco usada, pois se acreditarmos que os mercados financeiros são eficientes acredita-se também que o preço actual do título reflecte toda a informação disponível e relevante sobre o mesmo, não existindo qualquer valor acrescentado considerar as suas cotações históricas.

$$E(r_i) = \sum_{t=1}^m \frac{r_{i,t}}{m}$$

$r_{i,t} \rightarrow$ representa a taxa de rentabilidade gerada pelo título i no período t
 $m \rightarrow$ representa o numero de período considerados

Exemplo 48: Calcule as taxas de rentabilidade e a taxa de rentabilidade esperada.

Cotações e rentabilidades semanais da PT

Data	Cotação (euros)	Dividendos (euros)	Tx. Rent. $r_{i,j}$
23-07-2003	6,1	0	
31-07-2003	5,96	0	-2,295%
06-08-2003	5,9	0	-1,007%
13-08-2003	6,17	0	4,576%
20-08-2003	6,4	0	3,728%
29-08-2003	6,58	0	2,812%
03-09-2003	6,5	0	-1,216%
10-09-2003	6,36	0	-2,154%
17-09-2003	6,9	0	8,491%
24-09-2003	6,87	0	-0,435%
30-09-2003	6,79	0	-1,164%
		$E(r_i)$	1,134%

$$r_{PT,31/07/03} = \frac{(5,96 + \text{dividendos}) - 6,1}{6,1} = -2,295\%$$

$$E(r_{PT}) = \frac{(-2,295\% - 1,007\% + \dots + 8,491\% - 0,435\% - 1,164\%)}{10} = \frac{0,1134}{10} = 1,134\%$$

Abordagem Previsional. Esta é a outra forma possível de analisar a rentabilidade. A estimativa da taxa de rentabilidade esperada deve-se basear na expectativa de evolução de vários cenários futuros admissíveis, tendo em conta a sua probabilidade de ocorrência e a rentabilidade gerada por cada um desses cenário (ver mais na pagina 2 e 3 da sebenta referente ao capítulo 3).

Formas de Analisar o Risco (de um título)

Abordagem Histórica. Nesta abordagem assume-se que a volatilidade futura é idêntica à volatilidade passada (veja-se o exemplo na página seguinte).

$$\sigma_i^2 = \sum_{t=1}^m \frac{[r_{i,t} - E(r_i)]^2}{m-1}$$

$r_{i,t} \rightarrow$ representa a taxa de rentabilidade gerada pelo título i no período t
 $m \rightarrow$ representa o numero de período considerados

Abordagem Previsional. Para os interessados na abordagem previewal aconselha-se a inscrição na cadeira “Futuros e Opções”, bem como consultar a página 4 da sebenta referente ao 3º capítulo.

Exemplo 49: Calcule o desvio padrão e variância da taxa de rentabilidade semanal da PT.

Cotações e rentabilidades semanais da PT				
Data	Cotação (euros)	Dividendos (euros)	Tx. rent. $r_{i,j}$	$[r_{i,j}-E(r_i)]^2$
23-07-2003	6,1	0		
31-07-2003	5,96	0	-2,295%	0,00117561
06-08-2003	5,9	0	-1,007%	0,00045811
13-08-2003	6,17	0	4,576%	0,00118517
20-08-2003	6,4	0	3,728%	0,00067293
29-08-2003	6,58	0	2,812%	0,00028186
03-09-2003	6,5	0	-1,216%	0,00055199
10-09-2003	6,36	0	-2,154%	0,00108075
17-09-2003	6,9	0	8,491%	0,00541244
24-09-2003	6,87	0	-0,435%	0,00024599
30-09-2003	6,79	0	-1,164%	0,00052813
		$E(r_i)$	1,134%	Total 0,01159298
				s^2 0,00128811
				s 3,589%

$$s_{PT}^2 = \frac{(-2,295\% - 1,134\%)^2 + \dots + (-1,164\% - 1,134\%)^2}{10 - 1} = 0,00128811$$

$$s_{PT} = \sqrt{s_{PT}^2} = 3,589\%$$

Nota: Como se está a calcular a variância amostral utiliza-se o símbolo “ s^2 ”, sendo que “ σ^2 ” é referente à variância populacional, como é bem sabido por todos nós.

Logo, e analisando o conjuntamente o exemplo 48 e 49, podemos concluir que estas acções da PT têm uma rentabilidade média de 1,134% mas um desvio padrão de 3,589%, o que representa uma variação muito grande (logo, grande risco).

Carteiras de Títulos

Todo o investidor racional vai seguir uma estratégia de diversificação, uma vez que maximiza a sua rentabilidade e minimiza o seu risco. Assim, é necessário estimar a rentabilidade e o risco não só de um título mas sim de uma carteira de activos.

Rentabilidade Esperada de uma Carteira de Activos

Para se poder calcular a rentabilidade esperada de uma carteira ($E[r_p]$), é primeiro preciso saber como calcular a taxa de rentabilidade da carteira (r_p).

$$r_p = \sum_{i=1}^n r_i \times w_i$$

$r_p \rightarrow$ taxa de rentabilidade (aleatória) do Portfolio
 $w_i \rightarrow$ peso relativo do título i na carteira

Assim, a taxa de rentabilidade esperada de uma carteira é igual a:

$$E(r_p) = E\left(\sum_{i=1}^n r_i \times w_i\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(r_p) = \sum_{i=1}^n E(r_i) \times w_i$$

$E(r_p) \rightarrow$ taxa de rentabilidade esperada para a carteira p
 $E(r_i) \rightarrow$ taxa de rentabilidade esperada para o título i
 $w_i \rightarrow$ peso relativo do título i na carteira

Exemplo 50: Calcule o valor de mercado da carteira e os pesos relativos dos títulos na carteira, para o momento 0 e para um mês depois.

		PT	BCP
Momento 0	Cotação	9€	2€
	Número de Acções	1.000	1.500
Um mês depois	Cotação	8,1€	2,2€

Momento 0:

$$\text{Valor de Mercado da Carteira} = 9 \times 1000 + 2 \times 1500 = 12.000€$$

$$W_{PT} = 9.000 / 12.000 = 75\%$$

$$W_{BCP} = 3.000 / 12.000 = 25\%$$

Um mês depois:

$$r_{PT} = 8,1/9 - 1 = -10\%$$

$$r_{BCP} = 2,2/2 - 1 = 10\%$$

$$\text{Valor de Mercado da Carteira} = 8,1 \times 9000 + 2,2 \times 1000 = 11.400$$

$$r_p = r_{PT} \times W_{PT} + r_{BCP} \times W_{BCP} = -10\% \times 75\% + 10\% \times 25\% = -5\%$$

$$r_p = 11.400 / 12.000 - 1 = -5\%$$

Exemplo 51: Calcule a taxa de rentabilidade esperada para a carteira.

	A	B
Número de Acções	1.000	2.000
Cotação	10€	4€
$E(r_i)$	15%	20%
σ_i	25%	35%

$$E(r_p) = E(r_A) \cdot W_A + E(r_B) \cdot W_B =$$

$$= 15\% \times \frac{1.000 \times 10}{1.000 \times 10 + 2.000 \times 4} + 20\% \times \frac{2.000 \times 4}{1.000 \times 10 + 2.000 \times 4} = 17, (2)\%$$

Variância da Taxa de Rentabilidade de uma Carteira de Activos

Para podermos retirar conclusões sobre a variância da taxa de rentabilidade de uma carteira de activos é preciso primeiro abordar os seguintes tópicos:

- Covariância entre as taxas de rentabilidade dos títulos “i” e “j”;
- E Coeficiente de Correlação linear entre r_i e r_j .

Covariância entre as taxas de rentabilidade dos títulos “i” e “j” [$\text{cov}(r_i, r_j)$]

A covariância indica-nos o grau de correlação linear entre r_i e r_j . Ou seja, mede a relação linear entre duas taxas de rentabilidade, sendo que:

- $\sigma_{i,j} = 0$, as taxas de rentabilidade são linearmente independentes;
- $\sigma_{i,j} > 0$, existe uma relação linear directa entre as taxas de rentabilidade;
- $\sigma_{i,j} < 0$, existe uma relação linear inversa.

A covariância é definida do seguinte modo:

$$\sigma_{i,j} = \text{cov}(r_i, r_j) = E\{[r_i - E(r_i)][r_j - E(r_j)]\} \longrightarrow \text{População}$$

$$\sigma_{i,j} = \text{cov}(r_i, r_j) = \frac{\sum_{t=1}^m E\{[r_i - E(r_i)][r_j - E(r_j)]\}}{m - 1} \longrightarrow \text{Amostra}$$

Note-se, pela fórmula da covariância (populacional), que esta só pode ser positiva quando a rentabilidade de r_i e r_j sobem.

Coeficiente de Correlação linear entre r_i e r_j

Através dos valores obtidos da covariância poucas conclusões se podem tirar, na medida em que se não há nenhum limite ou valor referência para a covariância, apenas se tiram conclusões sobre o sinal (se existe uma relação linear directa ou inversa). Assim, para colmatar esta limitação temos o coeficiente de correlação linear.

$$\ell_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i \times \sigma_j} \in [-1, 1]$$

Assim, se:

- $\ell = 0$, taxas de rentabilidade linearmente independentes;
- $\ell = 1$, relação linear directa perfeita entre as taxas de rentabilidade;
- $\ell = -1$, relação linear inversa perfeita entre as taxas de rentabilidade.

Exemplo 52: Calcule a covariância e o coeficiente de correlação linear entre as taxas de rentabilidade da PT e BCP.

Data	Taxas de rentabilidade		Verificação
	PT	BCP	
	r_{PT}	r_{BCP}	$\frac{(r_{PT}-E(r_{PT}))(r_{BCP}-E(r_{BCP}))}{10-1}$
23-07-2003			
31-07-2003	-2,295%	1,379%	0,000265589
06-08-2003	-1,007%	-0,680%	0,000606613
13-08-2003	4,576%	4,110%	0,000673267
20-08-2003	3,728%	1,316%	-0,000217416
29-08-2003	2,812%	5,195%	0,000510525
03-09-2003	-1,216%	0,617%	0,000361021
10-09-2003	-2,154%	0,000%	0,000708094
17-09-2003	8,491%	2,454%	0,000220762
24-09-2003	-0,435%	6,587%	-0,000695267
30-09-2003	-1,164%	0,562%	0,000365886
Média	1,134%	2,154%	
Std. Dev.	3,589%	2,396%	total 0,002799075
Covariância	0,000311008		Covariância 0,000311008
Corr. linear	0,362		Corr. Linear 0,361612364

$$\begin{aligned} \text{cov}(r_{PT}, r_{BCP}) &= \frac{(-2,295\% - 1,134\%)(1,379\% - 2,154\%) + \dots + (-1,164\% - 1,134\%)(0,562\% - 2,154\%)}{10-1} \\ &= 0,000311008 \end{aligned}$$

$$\text{cov}(r_{PT}, r_{BCP}) > 0 \Rightarrow r_{PT} \text{ e } r_{BCP} \text{ estão directamente relacionados}$$

Se reparar-mos além desta conclusão, de que as taxas de rentabilidade estão directamente relacionadas, não se conseguem tirar mais conclusões, daí ser importante o coeficiente de correlação linear.

$$\ell_{PT,BCP} = \frac{\sigma_{PT,BCP}}{\sigma_{PT} \times \sigma_{BCP}} = \frac{0,000311008}{3,589\% \times 2,396\%} = 0,362$$

Conclui-se, a partir deste coeficiente de correlação, que existe uma relação linear directa mas não muito forte.

Variância da Taxa de Rentabilidade de uma Carteira de Activos

Expostos os conceitos de covariância e coeficiente de correlação linear existem agora bases para se poder falar da variância da taxa de rentabilidade esperada de uma carteira. Ora vejamos:

$$\begin{aligned} \text{Var}(r_p) &= E\{[r_p - E(r_p)]^2\} = E\left\{\left[\sum_{i=1}^n r_i \times w_i - \sum_{i=1}^n E(r_i) \times w_i\right]^2\right\} = \\ &= E\left\{\left[\sum_{i=1}^n w_i (r_i - E(r_i))\right]^2\right\} = \\ &= E\left\{\left[\sum_{i=1}^n w_i (r_i - E(r_i))\right] \times \left[\sum_{j=1}^n w_j (r_j - E(r_j))\right]\right\} \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \times w_j \times [r_i - E(r_i)] \times [r_j - E(r_j)]\right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \times w_j \times E\{[r_i - E(r_i)] \times [r_j - E(r_j)]\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \times w_j \times \sigma_{i,j} \end{aligned}$$

$$\text{Var}(r_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \times w_j \times \sigma_{i,j}$$

$$\text{Var}(r_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \times w_j \times \sigma_i \times \sigma_j \times \ell_{i,j}$$

Exemplo 53: Calcule o risco da carteira, através do desvio padrão da respectiva taxa de rentabilidade esperada da carteira.

	A	B
Número de Acções	1.000	2.000
Cotação	10€	4€
$E(r_i)$	15%	20%
σ_i	25%	35%
w_i	0,5	0,5
$E(r_p)$	17,5%	
$\rho_{A,B}$	0,3	
σ_p	?	

$$\begin{aligned}
 \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i \times w_j \times \sigma_{i,j} = \sum_{j=1}^2 w_i \times w_A \times \sigma_{i,A} + w_i \times w_B \times \sigma_{i,B} = \\
 &= w_A \times w_A \times \sigma_{A,A} + w_A \times w_B \times \sigma_{A,B} + w_B \times w_A \times \sigma_{B,A} + w_B \times w_B \times \sigma_{B,B} = \\
 &= w_A^2 \times \sigma_A^2 + 2 \times w_A \times w_B \times \sigma_{A,B} + w_B^2 \times \sigma_B^2 = \\
 &= 0,5556^2 \times 0,25^2 + 2 \times 0,5556 \times 0,4444 \times (0,3 \times 0,25 \times 0,35) + 0,4444^2 \times 0,35^2 = \\
 &= 0,0564538
 \end{aligned}$$

$$\text{Nota: } \sigma_{X,X} = E\{[X - E(X)][X - E(X)]\} = E\{[X - E(X)]^2\} = \text{Var}(X)$$

$$\sigma_p = \sqrt{0,0564538} = 0,2376 = 23,76\%$$

Note-se que o desvio padrão da taxa de rentabilidade da carteira não se encontra no intervalo [0,25; 0,35], que correspondia ao desvio padrão da taxa de rentabilidade do título A e do título B. Sabendo, também, que o coeficiente de correlação linear era de 0,3 (como tal não existe uma relação linear forte), podemos concluir que ao haver uma diversificação houve uma diminuição do risco.

$$n = 2 \Rightarrow \text{Var}(r_p) = \text{Var}(w_1 \cdot r_1 + w_2 \cdot r_2) = \text{Var}(w_1 \cdot r_1) + \text{Var}(w_2 \cdot r_2) + 2\text{cov}(w_1 \cdot r_1, w_2 \cdot r_2)$$

$$\text{Var}(r_p) = w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot \sigma_{1,2} + w_2^2 \cdot \sigma_2^2$$

$$n = 3 \Rightarrow$$

$$\text{Var}(r_p) = w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_2^2 + w_3^2 \cdot \sigma_3^2 + 2 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot \sigma_{1,2} + 2 \cdot w_1 \cdot w_3 \cdot \sigma_{1,3} + 2 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot \sigma_{2,3}$$

Exemplo 54: Calcule o risco da carteira, através do desvio padrão da respectiva taxa de rentabilidade esperada da carteira.

	A	B	C
w_i	10%	30%	60%
σ_i	20%	25%	30%

Matriz de Coeficientes de Correlação Linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,3 & 1 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

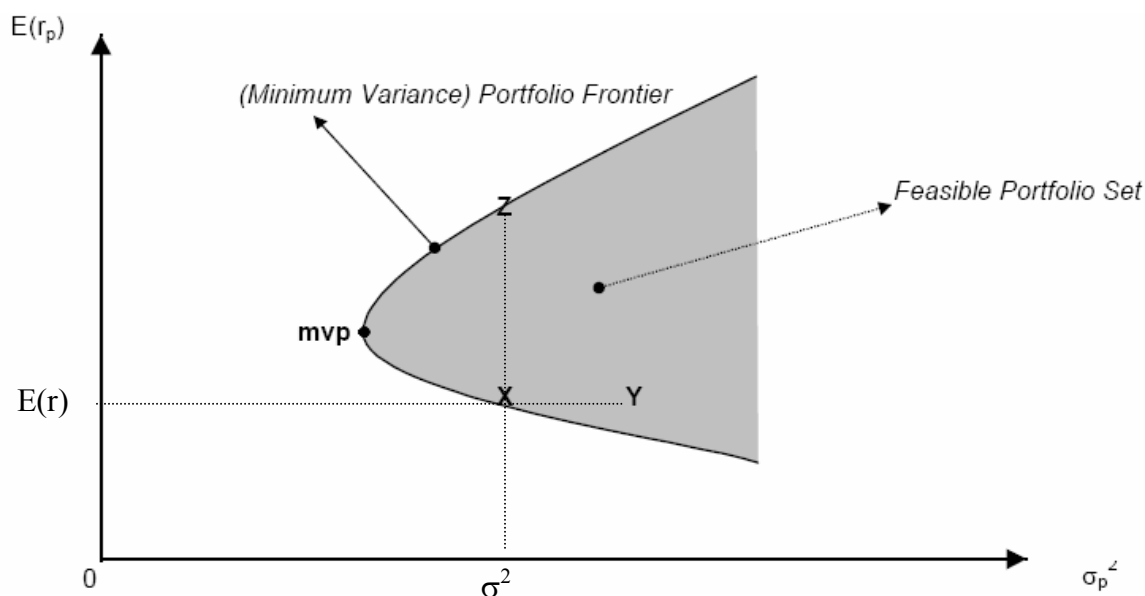
$$\sigma_p = \sqrt{0,1^2 \cdot 0,2^2 + 0,3^2 \cdot 0,25^2 + 0,6^2 \cdot 0,3^2 + 2 \cdot 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,1 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,25 \cdot 0,3}$$

$$= 0,2391 = 23,91\%$$

MODELO DE MARKOWITZ

Conjunto de Possibilidades de Investimento (Feasible Portfolio Set)

O conjunto de possibilidade de investimento é na prática o conjunto de todas as carteiras de activos que é possível constituir. Tal conjunto é representado no gráfico seguinte, e no espaço média-variância, por toda a área sombreada (incluindo a fronteira).



Por análise gráfica podemos facilmente concluir que:

- Z melhor que X (igual risco, maior rentabilidade esperada para Z);
- X melhor que Y (igual rentabilidade esperada, mas maior risco para Y);
- Z melhor que Y (maior rentabilidade esperada e menor risco para Z).

Fronteira de Variância Mínima (Portfolio Frontier)

A Fronteira de Variância Mínima, usualmente denominada de **Portfolio Frontier**, corresponde à fronteira do conjunto de possibilidades de investimento. A Portfolio Frontier engloba as carteiras de variância mínima para os diversos níveis de rentabilidade esperada possíveis.

Todas as carteiras que se encontram na Portfolio Frontier são conhecidas por **Carteiras de Fronteira**, e como será óbvio estas são as carteiras que oferecem risco mínimo para o seu nível de rentabilidade esperado.

Se repararmos a **Carteira MVP**, ou seja Minimum Variance Portfolio (e não como no basket de Most Valuable Player), corresponde à carteira de variância mínima, portanto a carteira com menor risco de entre todas as possíveis.

Com o intuito de se proceder à dedução da equação representativa da Portfolio Frontier à que ter em mente que o objectivo é minimizar a variância (risco) da carteira, assim virá que:

$$\text{Min } \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{i,j}$$

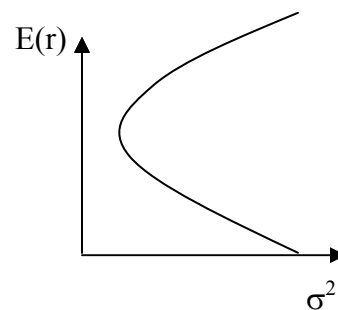
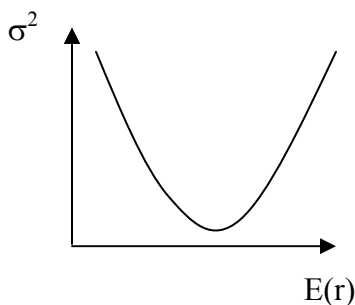
$$\text{s.a.: } \begin{cases} \sum_{i=1}^n E(r_i) \cdot w_i = E(r_p) \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{cases}$$

➡

Solução:

$$\sigma_p^2 = a \cdot E(r_p)^2 + b \cdot E(r_p) + c$$

Relembrando conceitos matemáticos, a equação de uma parábola é genericamente definida por $y = ax^2 + bx + c$, assim tendo em conta a expressão obtida para a portfolio frontier, concluímos facilmente que esta é uma parábola.



Exemplo 55A: Calcule a Portfolio Frontier gerada pelas acções A e B.

	A	B
$E(r_i)$	15%	20%
σ_i	25%	35%
$\ell_{A,B}$	0,3	

$$\text{Min}_{\{w_A, w_B\}} \sigma_p^2 = 0,25^2 \cdot w_A^2 + 0,35^2 \cdot w_B^2 + 2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot 0,25 \cdot 0,35 \cdot 0,3$$

$$\text{s.a.:} \begin{cases} 0,15w_A + 0,2w_B = E(r_p) \\ w_A + w_B = 1 \end{cases}$$

1º Passo: Função Lagrangeana

$$\text{Min}_{\{w_A, w_B, \lambda, \gamma\}} L = [0,25^2 \cdot w_A^2 + 0,35^2 \cdot w_B^2 + 2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot 0,25 \cdot 0,35 \cdot 0,3] + \lambda [0,15w_A + 0,2w_B - E(r_p)] + \gamma [w_A + w_B - 1]$$

2º Passo: Cálculo das Condições de 1ª Ordem e 2ª Ordem

Condição de 1ª ordem:

- $\frac{\partial L}{\partial w_A} = 0 \Leftrightarrow 2 \times 0,25^2 w_A + 2 \times 0,25 \times 0,35 \times 0,3 \times w_B + \lambda 0,15 + \gamma = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial w_B} = 0 \Leftrightarrow 2 \times 0,35^2 w_B + 2 \times 0,25 \times 0,35 \times 0,3 \times w_A + \lambda 0,2 + \gamma = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 0,15w_A + 0,2w_B - E(r_p) = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 0 \Leftrightarrow w_A + w_B - 1 = 0$



Veja-se que ao resolver as condições de 1ª ordem sou obrigado a respeitar as restrições iniciais, o que faz todo o sentido.

Condição de 2ª Ordem:

- Matriz de 2ª derivadas (Matriz Hessiana).
- Tem que ser semi-definida positiva.
- Esta condição é sempre verificada (não é necessário ir calculá-la).

3º Passo: Cálculo do w_A e w_B

$$\begin{cases} 0,15w_A + 0,2w_B = E(r_p) \\ w_A + w_B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_A = \frac{0,2 - E(r_p)}{0,05} \\ w_B = \frac{E(r_p) - 0,15}{0,05} \end{cases}$$

4º Passo: Cálculo de σ_p^2

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \left[0,25^2 \left(\frac{0,2 - E(r_p)}{0,05} \right)^2 + 0,35^2 \left(\frac{E(r_p) - 0,15}{0,05} \right)^2 + 2 \left(\frac{0,2 - E(r_p)}{0,05} \right) \left(\frac{E(r_p) - 0,15}{0,05} \right) \cdot 0,25 \cdot 0,35 \cdot 0,3 \right] \\ &= \dots = \\ &= 53.E(r_p)^2 - 17,3503.E(r_p) + 1,4725 \end{aligned}$$

Equação da Portfolio Frontier Gerada pelas Obrigações A e B

$$\sigma_p^2 = 53.E(r_p)^2 - 17,3503.E(r_p) + 1,4725$$

Exemplo 55B: Determine a composição MVP

A composição mvp é aquela onde se verifica uma menor variância (risco) da carteira de obrigações, como tal:

$$\text{Min } \sigma_p^2 = 53.E(r_p)^2 - 17,3503.E(r_p) + 1,4725$$

Condição de 1ª Ordem:

$$\bullet \quad \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial E(r_p)} = 0 \Leftrightarrow 106E(r_p) - 17,3503 = 0 \Leftrightarrow E(r_{mvp}) = 0,16368$$

Condição de 2ª Ordem:

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 \sigma_p^2}{\partial E(r_p)^2} > 0 \Leftrightarrow 106 > 0 \Rightarrow \text{Proposição verdadeira}$$

Composição:

$$\begin{aligned} \bullet \quad w_A &= \frac{0,2 - 0,16368}{0,05} = 0,7264 \\ \bullet \quad w_B &= \frac{0,16368 - 0,15}{0,05} = 0,2736 \end{aligned}$$

Exemplo 55C: Calcule o desvio padrão da taxa de rentabilidade da carteira mvp (σ_{mvp}).

1ª Forma de Resolução

$$\sigma_p^2 = 53.E(r_p)^2 - 17,3503.E(r_p) + 1,4725$$

$$\sigma_{mvp} = \sqrt{53 \times 0,16368^2 - 17 \times 0,16368 + 1,4725} = 22,93\%$$

2ª Forma de Resolução

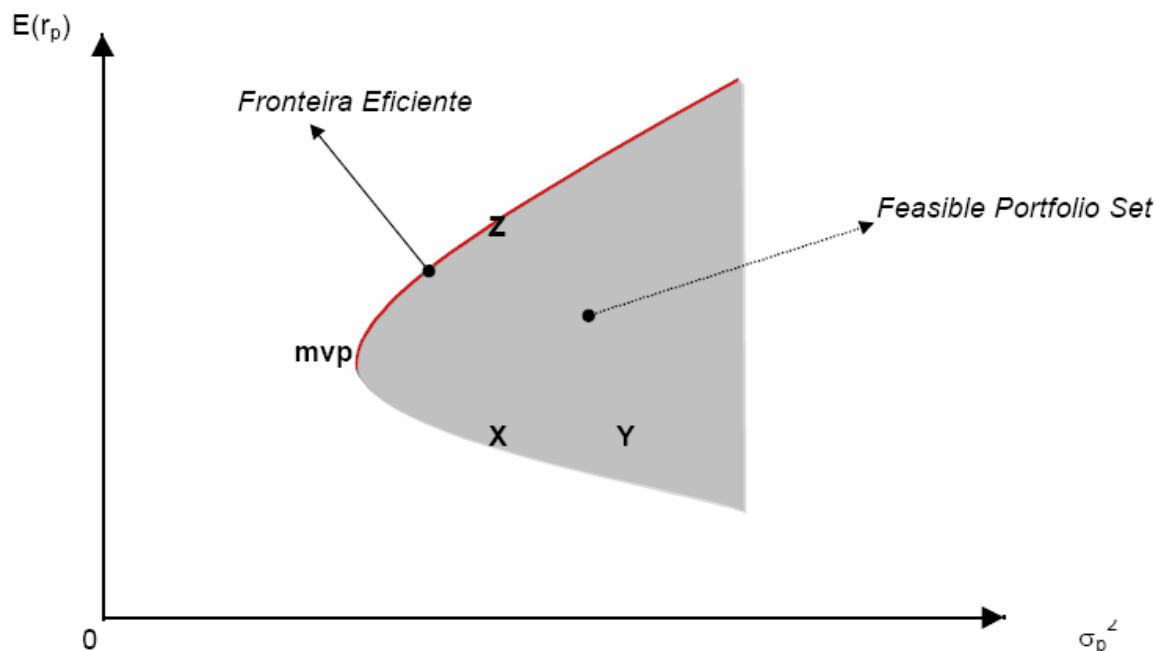
$$\sigma_p^2 = w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot \sigma_{1,2} + w_2^2 \cdot \sigma_2^2$$

$$\sigma_{mvp} = \sqrt{0,7264^2 \times 0,25^2 + 0,2736^2 \times 0,35^2 + 2 \times 0,7264 \times 0,2736 \times 0,3 \times 0,25 \times 0,35} = 22,93\%$$

Fronteira Eficiente de Markowitz

Geometricamente a Fronteira Eficiente de Markowitz é o troço da Portfolio Frontier com inclinação positiva, ou seja, é o conjunto das carteiras que optimizam o binómio rentabilidade-risco.

Isto significa dizer que quando uma carteira está na Fronteira Eficiente de Markowitz não existe outra carteira que ofereça maior rentabilidade esperada ($E(r)$) para o mesmo risco (σ), e não existe nenhuma carteira que ofereça menor risco (σ) para igual rentabilidade esperada ($E(r)$).



A equação da Fronteira Eficiente de Markowitz é facilmente descrita como:

$$\begin{cases} \sigma_p^2 = a \cdot E(r_p)^2 + b \cdot E(r_p) + c \\ E(r_p) \geq E(r_{mvp}) \end{cases}$$

Como tal, qualquer investidor racional deverá escolher uma carteira situada sobre a Fronteira Eficiente de Markowitz. Mas o investidor deverá escolher qual carteira? Obviamente que depende do perfil de risco de cada investidor.

Exemplo 55D: Determine a equação da Fronteira Eficiente de Markowitz.

$$\begin{cases} \sigma_p^2 = 53 \cdot E(r_p)^2 - 17,3503 \cdot E(r_p) + 1,4725 \\ E(r_p) \geq 16,368\% \end{cases}$$

Exemplo 55E: Diga se a carteira “i” com a composição $(w_A^i, w_B^i) = (80\%, 20\%)$ é eficiente e se pertence à Portfolio Frontier.

- $E(r^i) = 0,8 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 0,2 = 16\%$

Como, $E(r^i) < E(r_{mvp}) \Leftrightarrow 16\% < 16,368\%$, então a carteira é ineficiente.

- $\sigma^i = \sqrt{0,8^2 \times 0,25^2 + 0,2^2 \times 0,35^2 + 2 \times 0,8 \times 0,2 \times 0,3 \times 0,25 \times 0,35} = 23,0867\%$

$$23,0867\% = \sqrt{53 \times 0,16^2 - 17,3503 \times 0,16 + 1,4725} \Leftrightarrow 23,0867\% = 23,0867\% \text{ Prop Ver.}$$

Logo, se a ultima proposição é verdadeira, é porque a carteira “i” pertence à Portfolio Frontier. Todavia a carteira não é eficiente (logo encontra-se na parte de baixo do gráfico).

Exemplo 55F: Caso o objectivo seja obter uma carteira eficiente com um desvio padrão de rendibilidade da carteira (σ) igual a 23,087%, defina a carteira “e” a constituir.

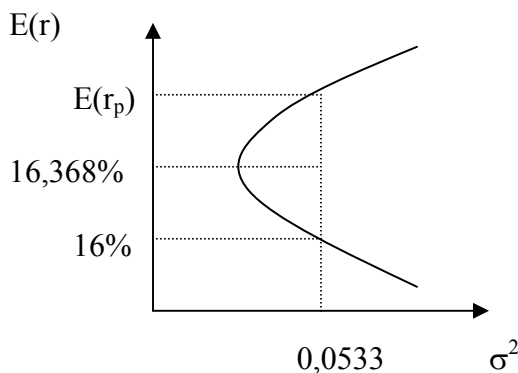
1ª Forma de Resolução

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= 53 \cdot E(r_p)^2 - 17,3503 \cdot E(r_p) + 1,4725 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (0,23087)^2 &= 53 \cdot E(r_p)^2 - 17,3503 \cdot E(r_p) + 1,4725 \Leftrightarrow (\text{aplica-se a formula resolvente}) \\ \Leftrightarrow E(r_p) &= 16,75\% \end{aligned}$$

$$\begin{cases} w_A^e + w_B^e = 1 \\ 0,15 w_A^e + 0,2 w_B^e = 16,74\% \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_A^e = 65,2\% \\ w_B^e = 34,8\% \end{cases}$$

2ª Forma de Resolução

Esta forma consiste em recorrer ao gráfico para calcular a rentabilidade esperada da carteira, depois o cálculo da composição da carteira é igual à forma como se calculou anteriormente.



$$E(r_p) = 16,368\% + (16,368\% - 16\%) = 16,74\%$$

Funções de Utilidade

As funções utilidade permitem caracterizar as preferências do investidor em termos de rentabilidade e risco. Logo, é natural que para cada investidor exista uma função utilidade. Sendo que qualquer investidor racional vai escolher a carteira de activos que possuir a maior utilidade.

Assim, a função utilidade (associada à escolha da carteira p) mais utilizada no âmbito das teorias das carteiras é:

$$U_p = E(r_p) - \frac{A}{2} \cdot \sigma_p^2, \quad A > 0 \quad (\text{a Utilidade é adimensional})$$

O parâmetro A traduz a aversão ao risco. Sendo que quando $\Delta A > 0$ aumenta o grau de aversão ao risco.

Note-se que a função utilidade traduz dois importantes conceitos económicos:

- Hipótese da Não Saciedade – quanto maior $E(r_p)$ maior a utilidade;
- Hipótese da Aversão ao Risco – quanto maior σ^2 (o risco) menor a utilidade.

Exemplo 56: Existem duas alternativas de investimento, diga qual delas a escolher para um investidor com um perfil $A = 1$, e para um com perfil $A = 10$.

- Acção SLB com $E(r_{SLB}) = 20\%$ e $\sigma_{SLB} = 30\%$;
- BT a 1 ano e com Valor de Cotação igual a 98,04%.

Investidor de Perfil A=1

$$U_{SLB} = E(r_{SLB}) - \frac{1}{2} * \sigma_{SLB}^2 = 0,2 - 0,5 * 0,3^2 = 0,155$$

$$U_{BT} = E(r_{BT}) - \frac{1}{2} * \sigma_{BT}^2 = r_{BT} - 0,5 * 0 = 0,02$$

- $98,04(1+r) = 100 \Leftrightarrow r = 0,02$
- Não esquecer que a taxa de rentabilidade de um BT é uma constante.

$U_{SLB} > U_{BT} \Rightarrow$ Logo escolher as ações SLB

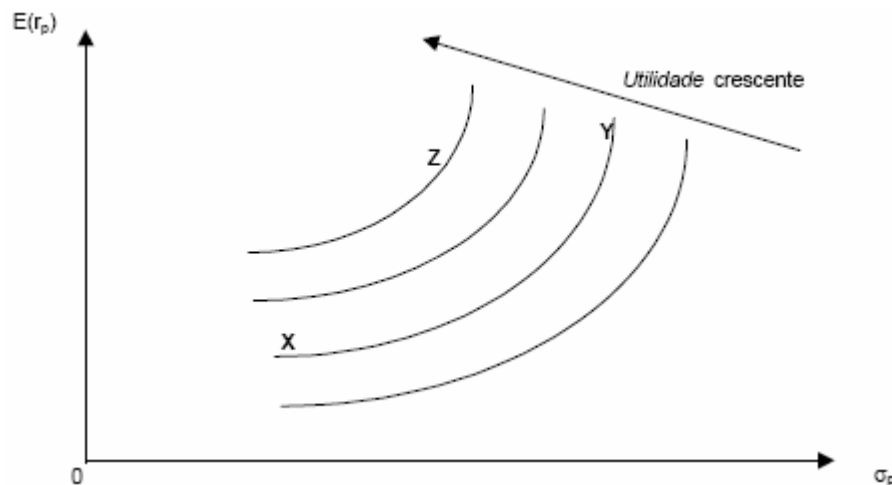
Investidor de Perfil A=10

$$U_{SLB} = 0,2 - 5 * 0,3^2 = -0,25$$

$$U_{BT} = r_{BT} - 5 * 0 = 0,02$$

$U_{SLB} < U_{BT} \Rightarrow$ Logo escolher os BT

A função utilidade de um investidor pode ser representada graficamente através de um Mapa de Curvas de Indiferença, mapa este que expressa as preferências do investidor em termos de rentabilidade e risco.



As curvas de indiferença devem ser interpretadas do seguinte modo:

- Quaisquer carteiras posicionadas sobre a mesma curva de indiferença possuem igual utilidade esperada. Por exemplo, no gráfico anterior, as carteiras “X” e “Y” são igualmente desejáveis para o investidor.
- Quanto mais a noroeste estiver a curva de indiferença sobre a qual se situa a carteira de investimentos, maior é a respectiva utilidade esperada. Por exemplo, o investidor prefere a carteira “Z” relativamente às carteiras “X” ou “Y”.

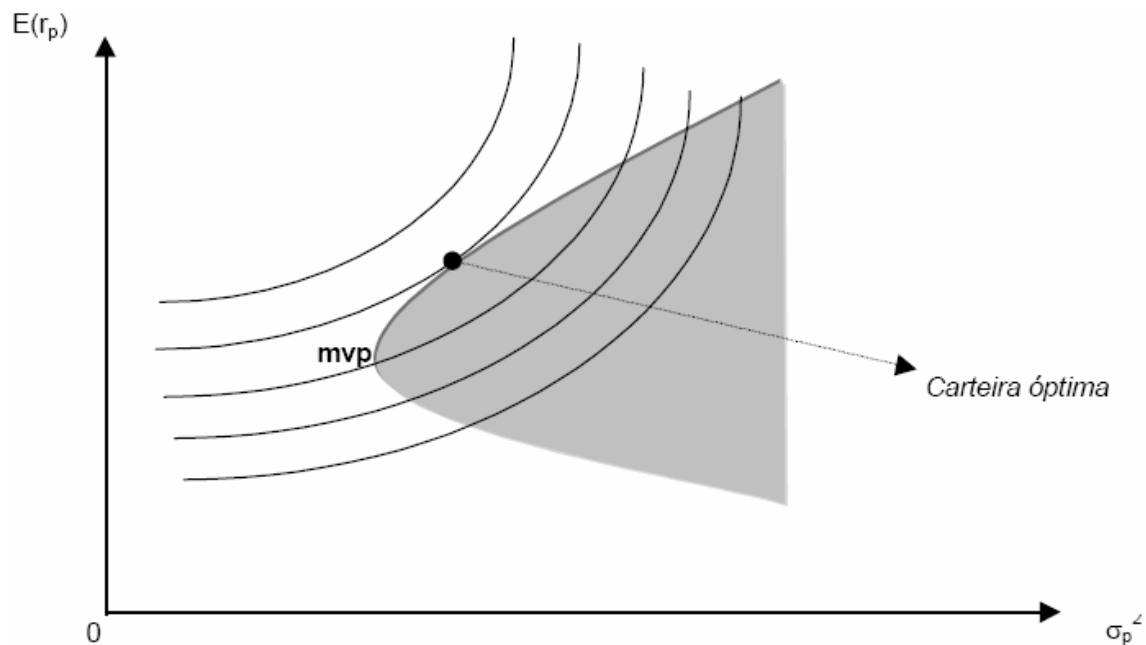
Assim, qualquer investidor procurará escolher uma carteira sobre a curva de indiferença mais a noroeste possível.

Escolha da Carteira Ótima

Para se poder concluir sobre qual a carteira ótima, primeiro à que ter em mente duas conclusões já tiradas até agora:

- i) Qualquer investidor racional deve escolher uma carteira situada sobre a Fronteira Eficiente de Markowitz;
- ii) Qualquer investidor racional vai tentar escolher uma carteira situada sobre a Curva de Indiferença mais a noroeste possível.

Assim, a Carteira Ótima corresponde ao ponto de tangencia entre a Fronteira Eficiente de Markowitz e o mapa de curvas de indiferença.



Para escolher a carteira ótima é necessário resolver o seguinte problema de optimização:

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{\{E(r_p), \sigma_p^2\}} U_p(E(r_p), \sigma_p^2) \\ \text{s.a.: } & \begin{cases} \sigma_p^2 = a.E(r_p)^2 + b.E(r_p) + c \\ E(r_p) \geq E(r_{mvp}) \end{cases} \end{aligned}$$

Esta restrição é redundante, na medida em que as curvas de indiferença têm inclinação positiva

Exemplo 57 (Continuação ao Exemplo 55): Calcule a carteira óptima a escolher por um investidor com a função utilidade $U_p = E(r_p) - \sigma_p^2$ (logo $A=2$).

$$\text{Max}_{\{E(r_p), \sigma_p^2\}} U_p = E(r_p) - \sigma_p^2$$

$$\text{s.a.: } \begin{cases} \sigma_p^2 = 53.E(r_p)^2 - 17,3503.E(r_p) + 1,4725 \\ E(r_p) \geq 16,368\% \end{cases}$$

1º Passo: Função Lagrangeana

$$\text{Max}_{\{E(r_p), \sigma_p^2, \lambda\}} L = (E(r_p) - \sigma_p^2) + \lambda(\sigma_p^2 - 53.E(r_p)^2 + 17,3503.E(r_p) - 1,4725)$$

2º Passo: Cálculo das Condições de 1ª Ordem

$$\frac{\partial L}{\partial E(r_p)} = 0 \Leftrightarrow 1 - 106E(r_p)\lambda + 17,3503\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_p^2} = 0 \Leftrightarrow -1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \sigma_p^2 - 53.E(r_p)^2 + 17,3503.E(r_p) - 1,4725 = 0$$

3º Passo: Calcular $E(r_p)$ e σ_p^2

$$\begin{cases} 1 - 106E(r_p)\lambda + 17,3503\lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \sigma_p^2 - 53.E(r_p)^2 + 17,3503.E(r_p) - 1,4725 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E(r_p) = 17,312\% \\ \lambda = 1 \\ \sigma_p^2 = 0,05725 \end{cases}$$

4º Passo: Calcular a composição da carteira

$$\begin{cases} 17,312\% = w_A \cdot 0,15 + w_B \cdot 0,2 \\ w_A + w_B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_A = 53,76\% \\ w_B = 46,24\% \end{cases}$$

MODELO DE TOBIN

Enquanto o Modelo de Markowitz pressupunha a possibilidade de investimento apenas em acções, o Modelo de Tobin considera que o investidor pode aplicar uma parte da sua riqueza no activo sem risco (f).

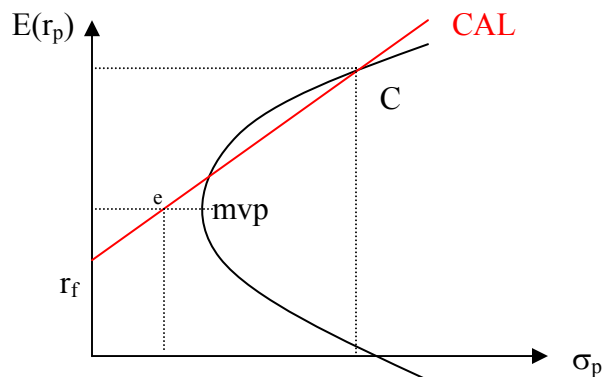
Activo sem risco (f)

O activo sem risco é um investimento com uma taxa de rentabilidade certa (não é uma variável aleatória) e o seu desvio padrão é nulo, consequentemente a covariância entre as taxas de rentabilidade do activo sem risco e de qualquer outro título é também nula. Na prática um activo sem risco poderá ser Bilhetes do Tesouro, numerário e depósitos. Resumindo:

- $\sigma_f = 0$
- $E(r_f) = r_f$

Capital Allocation Line (CAL)

A Capital Allocation Line representa as combinações de f (activo sem risco) e de C (activo com risco).



Este gráfico mostra que a “introdução do activo sem risco na carteira de investimento permite expandir a fronteira eficiente de Markowitz, isto é, permite obter portfolios mais eficientes do que os situados sobre a fronteira eficiente dos activos com risco”. Por exemplo, a carteira “e” para igual rentabilidade esperada que a carteira mvp possui um risco inferior.

Assim, o Portfolio “p” é uma combinação de activos repartida da seguinte forma:

- Activo f (sem risco) na proporção wf ;
- E carteira de activos C (com risco) na proporção wc .

Já sabemos que:

- $w_f + w_c = 1$
- $E(r_f) = r_f$
- $\sigma_f = 0$
- $E(r_p) = r_f \cdot w_f + E(r_c) \cdot w_c$

Como tal, e desenvolvendo matematicamente, obtemos que:

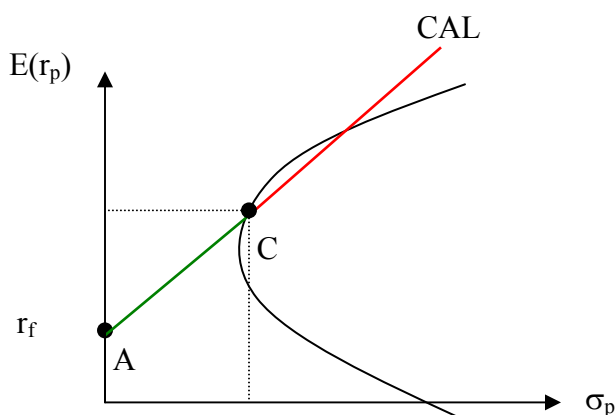
- $\sigma_p = \sqrt{w_f^2 \times \sigma_f^2 + w_c^2 \times \sigma_c^2 + 2 \times w_f \times w_c \times \sigma_{f,c}} = \sqrt{w_c^2 \times \sigma_c^2} = w_c \times \sigma_c$
- $w_c = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$
- $w_f + w_c = 1 \Leftrightarrow w_f = 1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$

Por ultimo, e tendo por base o atrás exposto, chega-se à expressão da **Capital Allocation Line (CAL)**:

$$E(r_p) = r_f \cdot \left(1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_c}\right) + E(r_c) \cdot \frac{\sigma_p}{\sigma_c} \Leftrightarrow E(r_p) = r_f + \frac{\sigma_p}{\sigma_c} \cdot (E(r_c) - r_f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(r_p) = r_f + \frac{E(r_c) - r_f}{\sigma_c} \cdot \sigma_p$$

Relembrando a matemática, a expressão de uma recta pode ser facilmente definida por “ $y = a + bx$ ”. Veja-se, então, que r_f corresponde à ordenada na origem (a) e que $\frac{E(r_c) - r_f}{\sigma_c}$ corresponde à inclinação (b). Graficamente a representação da CAL poderá ser exemplificada na figura seguinte.



Ponto A: $w_f = 1 \wedge w_c = 0$

Ponto C: $w_f = 0 \wedge w_c = 1$

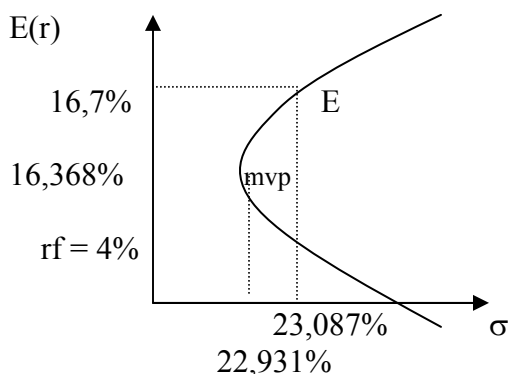
Linha Verde: $w_f < 1 \wedge w_c > 0$

Linha Vermelha: $w_f < 0 \wedge w_c > 1$

Na linha vermelha o que se está a dizer é que existem investimentos na carteira C e financiamento à taxa de juro do activo sem risco (desinvestimento em f)

Exemplo 58A (Continuação do Exemplo 55 e 57): Calcule o desvio padrão da rentabilidade da combinação (f, E) para uma taxa de rentabilidade esperada de 16,368%, e sabendo que:

- A taxa de rentabilidade do activo sem risco (r_f) é de 4%;
- A carteira E tem uma rentabilidade esperada de 16,7% e um desvio padrão de 23,087%.



1º Forma de Resolução

Esta primeira forma de resolução consiste em pegar na equação da CAL e calcular a variável desconhecida.

$$16,368\% = 4\% + \frac{16,7\% - 4\%}{23,087\%} \cdot \sigma_p \Leftrightarrow \sigma_p = 22,483\%$$

2º Forma de Resolução

Esta forma de resolução consiste em calcular o peso relativo de (f, E) na carteira, multiplicando depois o peso relativo do activo com risco pelo seu risco.

$$\begin{cases} 16,368\% = 4\% \cdot w_f + 16,7\% \cdot w_e \\ w_f + w_e = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_f = 2,6\% \\ w_e = 97,4\% \end{cases}$$

$$\sigma_p = w_e \cdot \sigma_e = 97,4\% \cdot 23,087\% = 22,483\%$$

Exemplo 58B: Diga qual a combinação (f, E) que oferece uma taxa de rentabilidade esperada igual a 18%.

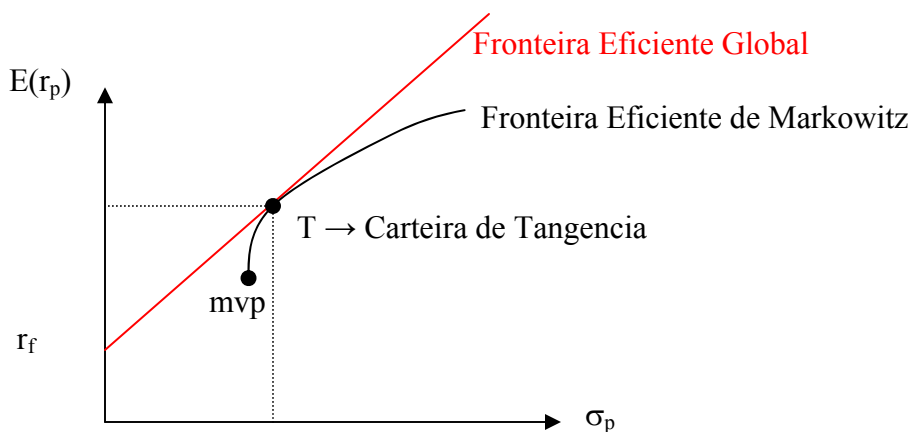
$$\begin{cases} 18\% = 4\% \cdot w_f + 16,7\% \cdot w_e \\ w_f + w_e = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_f = -10,24\% \\ w_e = 110,24\% \end{cases}$$

Logo, se w_f é negativo então é porque vou pedir um financiamento. Basta só imaginar o seguinte cenário:

Riqueza inicial = 100€		
Momento 0	Financiamento a 1y à taxa 4%	-10,24€
	Investir na carteira E	110,24€
Momento 1	Amortizar o Financiamento	$-10,24(1+4\%) = -10,65€$
	Vender carteira de acções	$110,24(1+16,7\%) = 128,65€$
Riqueza Final = 118€		

Temos, então, uma taxa de rentabilidade de: $r_p = (118-100)/100 = 18\%$

Fronteira Eficiente Global



A Fronteira Eficiente Global é “geometricamente representada pela semi-recta com origem no ponto $(r_f, 0)$ e tangente à Fronteira Eficiente de Markowitz”, é portanto o lugar geométrico das carteiras eficientes. A expressão da Fronteira Eficiente Global é dada por:

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r_T) - r_f}{\sigma_T} \cdot \sigma_p$$

Sendo $E(r_T)$ e σ_T a taxa de rentabilidade esperada e o desvio padrão da carteira de Tangencia

Como tal, qualquer investidor racional deverá escolher uma combinação (f, T) .

A Carteira de Tangencia é a única carteira verdadeiramente eficiente situada sobre a fronteira eficiente de Markowitz, ou seja, é a única carteira integralmente composta por activos com risco que ainda é eficiente.

Como determinar a carteira de tangencia T?

T: Inclinação da Fronteira Eficiente de Markowitz no ponto p=T	=	Inclinação da Fronteira Eficiente Global
---	---	--

Vejamos um exemplo prático de como calcular a carteira de tangencia T.

Exemplo 59A (continuação do exemplo 55, 57, 58): Calcule a rentabilidade esperada ($E(r_T)$) e o desvio padrão (σ_T) da carteira de tangencia T.

$$\text{Fronteira Eficiente de Markowitz: } \begin{cases} \sigma_p^2 = 53.E(r_p)^2 - 17,3503.E(r_p) + 1,4725 \\ E(r_p) \geq 16,368\% \end{cases}$$

$$\text{Fronteira Eficiente Global: } 4\% + \frac{E(r_T) - 4\%}{\sigma_T} \times \sigma_p$$

Notas:

- $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}}$
- $\frac{\partial u(x)^n}{\partial x} = n \cdot u'(x) \cdot u(x)^{n-1}$
- $\sigma_p = (53.E(r_p)^2 - 17,3503.E(r_p) + 1,4725)^{1/2}$

T:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial E(r_p)}{\partial \sigma_p} \right|_{p=T} &= \frac{E(r_T) - 4\%}{\sigma_T} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[\left. \frac{\partial \sigma_p}{\partial E(r_p)} \right|_{p=T} \right]^{-1} &= \frac{E(r_T) - 4\%}{\sigma_T} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} \cdot [106E(r_p) - 17,3503] \cdot [53E(r_p)^2 - 17,3503E(r_p) + 1,4725]^{\frac{1}{2}-1} \right]_{p=T}^{-1} &= \frac{E(r_T) - 4\%}{\sigma_T} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[\frac{2 \cdot [53E(r_p)^2 - 17,3503E(r_p) + 1,4725]^{\frac{1}{2}}}{106E(r_p) - 17,3503} \right]_{p=T} &= \frac{E(r_T) - 4\%}{\sigma_T} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{[53E(r_T)^2 - 17,3503E(r_T) + 1,4725]^{\frac{1}{2}}}{106E(r_T) - 17,3503} = \frac{E(r_T) - 4\%}{[53E(r_T)^2 - 17,3503E(r_T) + 1,4725]^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot [53E(r_T)^2 - 17,3503E(r_T) + 1,4725] = [E(r_T) - 4\%] \cdot [106E(r_T) - 17,3503] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (106E(r_T)^2 - 106E(r_T)^2) + (-34,7006E(r_T) + 17,3503E(r_T) + 0,04 \cdot 106 \cdot E(r_T)) + 2,945 - 0,694012 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13,1103E(r_T) = 2,250988 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(r_T) = 17,1696\%$$

$$\sigma_T = [53 \cdot 17,1696\%^2 - 17,3503 \cdot 17,1696\% + 1,4725]^{\frac{1}{2}} = 23,65\%$$

T: $E(r_T) = 17,1696\%$
 $\sigma_T = 23,65\%$

Exemplo 59B: Imagine que possui uma carteira cuja rentabilidade esperada é de 16% e o desvio padrão de 23%. Esta carteira é eficiente?

Para a carteira ser considerada eficiente deverá estar na Fronteira Eficiente Global, vamos então verificar se está ou não.

$$16\% \stackrel{?}{=} 4\% + \frac{17,17\% - 4\%}{23,65\%} \cdot 23\% \Leftrightarrow 16\% \stackrel{?}{=} 16,8\%$$

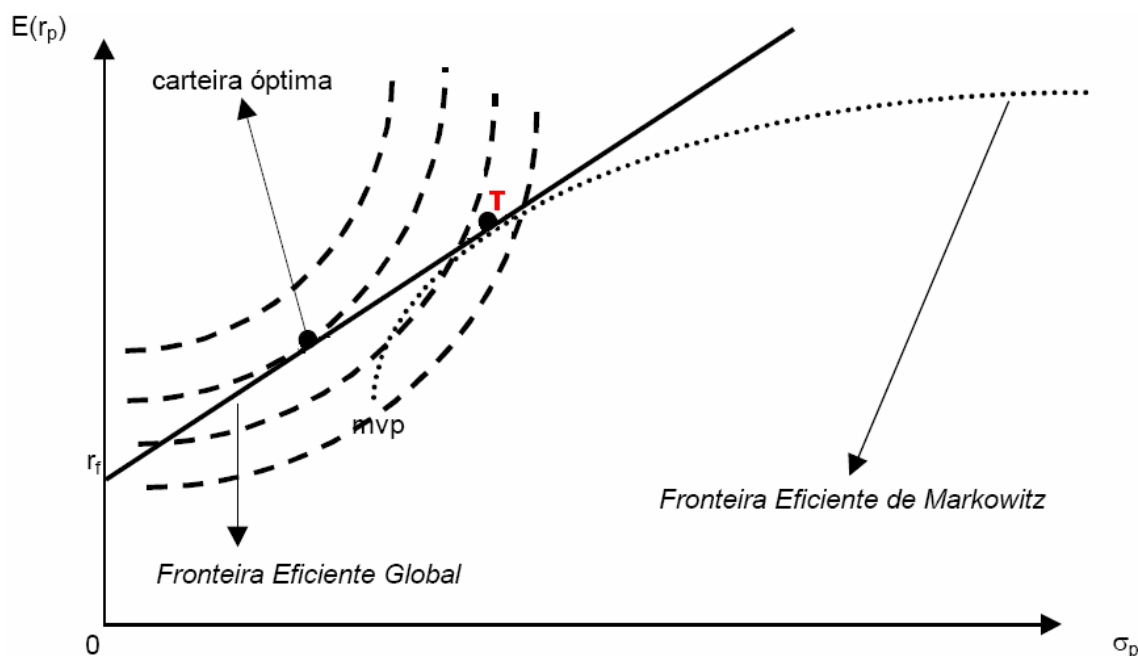
Logo, esta Proposição é Falsa. Como tal, a minha actual carteira tem uma composição não eficiente, pois com um risco de 23% é possível obter uma carteira com uma rentabilidade maior (neste caso de 16,8%).

Exemplo 59C: Então qual é a combinação (f, T) em que a rentabilidade esperada é de 16,8%.

$$\begin{cases} 16,8\% = 4\% \cdot w_f + 17,17\% \cdot w_T \\ w_f + w_T = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_f = 2,81\% \\ w_T = 97,19\% \end{cases}$$

$$\sigma_p = \sigma_T \cdot w_T = 97,19\% \cdot 23,65\% = 23\%$$

Escolha da Carteira Ótima



O investidor deverá escolher a carteira situada simultaneamente sobre a curva de indiferença mais a noroeste possível e sobre a fronteira eficiente global. Consequentemente, a carteira ótima é dada pelo ponto de tangencia entre a fronteira eficiente global e a curva de indiferença mais a noroeste possível.

Objectivo: Maximizar a utilidade

Sujeito a: Carteira ter que estar sobre a Fronteira Eficiente Global

Solução: Ponto de tangencia entre o mapa de Curvas de Indiferença e a FE Global

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{\{E(r_p), \sigma_p\}} U_p(E(r_p), \sigma_p) \\ & \text{s.a.: } E(r_p) = r_f + \frac{E(r_T) - r_f}{\sigma_T} \cdot \sigma_p \end{aligned}$$

Exemplo 60 (continuação do exemplo 55, 57, 58, 59): Determine a carteira ótima para um investidor com a seguinte função utilidade: $U_p = E(r_p) - \sigma_p^2$ (logo $A=2$).

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{\{E(r_p), \sigma_p\}} U_p = E(r_p) - \sigma_p^2 \\ & \text{s.a.: } E(r_p) = 4\% + \frac{17,17\% - 4\%}{23,65\%} \times \sigma_p \end{aligned}$$

$$\text{Max}_{\{E(r_p), \sigma_p, \lambda\}} L = (E(r_p) - \sigma_p^2) + \lambda(E(r_p) - 0,04 - 0,5569\sigma_p)$$

Condições de 1ª Ordem:

- $\frac{\partial L}{\partial E(r_p)} = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$
- $\frac{\partial L}{\partial \sigma_p} = 0 \Leftrightarrow -2\sigma_p - 0,5569\lambda = 0 \Leftrightarrow \sigma_p = 27,85\%$
- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow E(r_p) - 0,04 - 0,5569\sigma_p = 0 \Leftrightarrow E(r_p) = 19,5\%$

O sujeito deverá escolher uma carteira com uma $E(r_p)$ de 19,5% e com um σ_p de 27,85%.

Caso Prático 3.3

O Fundo de Investimento ESC pretende otimizar a decomposição da sua carteira de activos em quatro grandes áreas de negócios: obrigações, acções, imobiliário e liquidez (ou seja, depósitos bancários). O quadro seguinte resume as previsões efectuadas sobre a evolução dos quatro segmentos de mercado durante o próximo ano bem como a actual composição da carteira do Fundo ESC.

	Obrigações	Acções ¹	Imobiliário	Liquidez
Taxa de rentabilidade esperada	4.0%	8%	20%	3%
Desvio-padrão da taxa de rentabilidade	2.0%	25%	15%	0%
Composição actual da carteira	55%	15%	20%	10%

As correlações históricas entre as taxas de rentabilidade dos diversos mercados são resumidas no quadro seguinte:

	Obrigações	Acções	Imobiliário
Obrigações	1		
Acções	-0.4	1	
Imobiliário	0.5	-0.1	1

Com base nos elementos relativos aos segmentos accionista, obrigacionista e imobiliário, deduziu-se a seguinte equação para a *portfolio frontier*:

$$\sigma_p^2 = 0.7430E(r_p)^2 - 0.0494E(r_p) + 0.0011.$$

¹ As previsões para o mercado accionista baseiam-se no índice Dow Jones Eurostock 50.

Pretende-se que:

- Calcule a taxa de rentabilidade esperada e o respectivo desvio-padrão para a carteira de variância mínima.
- Análise a eficiência da actual composição do Fundo ESC, sabendo que a carteira de tangência possui uma rentabilidade esperada igual a 14.15% e um desvio-padrão igual a 9.47%.
- Calcule a taxa de rentabilidade esperada e o respectivo desvio-padrão para a carteira ótima, assumindo a seguinte função de utilidade: $U \equiv \ln[E(r_p) - 4\sigma_p^2]$.
- Sabendo que a taxa de rentabilidade esperada a 1 ano para o índice Dow Jones Eurostock 50 é igual a 7%, calcule o parâmetro beta da componente accionista do Fundo ESC.

a) $E(r_p)$ e σ_p da carteira mvp

$$\min_{\{E(r_p)\}} \sigma_p^2 = 0,743E(r_p)^2 - 0,0494E(r_p) + 0,0011$$

Condição de 1ª Ordem:

$$\bullet \quad \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial E(r_p)} = 0 \Leftrightarrow 2 \times 0,743 \times E(r_p) - 0,0494 = 0 \Leftrightarrow E(r_p) = 3,324\%$$

Condição de 2ª Ordem:

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 \sigma_p^2}{\partial E(r_p)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 2 \times 0,743 > 0 \rightarrow \text{Condição verificada}$$

$$\sigma_{mvp} = \sqrt{0,743 \times 0,03324^2 - 0,0494 \times 0,03324 + 0,0011} = 1,67\%$$

b) Análise da eficiência da composição do fundo ESC

Antes de mais diga-se que:

- Quando não há activo sem risco à disposição do investidor as carteiras eficientes encontram-se na Fronteira Eficiente de Markowitz;
- Quando há activo sem risco à disposição do investidor as carteiras eficientes encontram-se na Fronteira Eficiente Global.

Como tal, este exercício é resolvido em duas fases, primeiro calcula-se a taxa de rentabilidade esperada e o desvio padrão da carteira. À posteriori, verifica-se se esta carteira se encontra na Fronteira Eficiente Global.

1º Passo: Taxa de Rentabilidade Esperada da Carteira e Desvio Padrão da Carteira

$$E(r_p) = 0,04 \cdot 0,55 + 0,08 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,03 \cdot 0,1 = 7,7\%$$

$$\sigma_p = \sqrt{2\%^2 \cdot 55\%^2 + 25\%^2 \cdot 15\%^2 + 15\%^2 \cdot 20\%^2 + 2 \cdot 55\% \cdot 15\% \cdot (-0,4) \cdot 2\% \cdot 25\% + 2 \cdot 55\% \cdot 20\% \cdot 0,5 \cdot 2\% \cdot 15\% + 2 \cdot 15\% \cdot 20\% \cdot (-0,1) \cdot 25\% \cdot 15\%} = 4,6928\%$$

2º Passo: Fronteira Eficiente Global

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r_T) - r_f}{\sigma_T} \cdot \sigma_p$$

$$E(r_p) = 3\% + \frac{14,15\% - 3\%}{9,47\%} \cdot \sigma_p$$

3º Passo: Verificar se a carteiras está na Fronteira Eficiente Global

$$7,7\% \stackrel{?}{=} 3\% + \frac{14,15\% - 3\%}{9,47\%} \cdot 4,6928\% \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7,7\% = 8,526\% \text{ Proposição Falsa}$$

Logo, a composição actual não é eficiente. O mesmo será dizer que com este nível de risco ($\sigma_p = 4,6928\%$) é possível obter uma carteira cuja composição proporciona uma rentabilidade esperada de 8,526%, todavia a minha carteira actual apenas proporciona uma rentabilidade esperada de 7,7%.

Questão adicional 1: Qual a composição (f, T) que proporciona uma rentabilidade esperada de 8,526%?

$$\begin{cases} 8,526\% = 3\% \cdot w_f + 14,15\% \cdot w_T \\ w_f + w_T = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_f = 50,44\% \\ w_T = 49,56\% \end{cases} \quad \begin{aligned} \sigma_p &= \sigma_T \cdot w_T = \\ &= 9,47\% \cdot 49,56\% = \\ &= 4,693\% \end{aligned}$$

Questão adicional 2: Quanto investir nas obrigações, acções e imobiliário, sabendo que há 100.000€ para investir e que a composição da carteira T é de (wo,wa,wi)=(10%,70%,20%)?

Nota: matematicamente é impossível que a composição da carteira seja esta para uma rentabilidade esperada de 8,526%, todavia admita-se a título de exemplo estes valores

$$w_f = 50,44\% \rightarrow 50.440\text{€}$$

$$w_T = 49,56\% \rightarrow 49.560\text{€}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Obrigações: } 49,56\% * 10\% * 100.000\text{€} = 4.956\text{€} \\ \text{Acções: } 49,56\% * 70\% * 100.000\text{€} = 34.692\text{€} \\ \text{Imobiliário: } 49,56\% * 20\% * 100.000\text{€} = 9.912\text{€} \end{array} \right\} 49.560\text{€}$$

c) Taxa de rentabilidade esperada e desvio padrão da carteira ótima

$$\text{Max}_{\{E(r_p), \sigma_p\}} U_p = \ln(E(r_p) - 4\sigma_p^2)$$

$$\text{s.a.: } E(r_p) = 3\% + \frac{14,15\% - 3\%}{9,47\%} \times \sigma_p$$

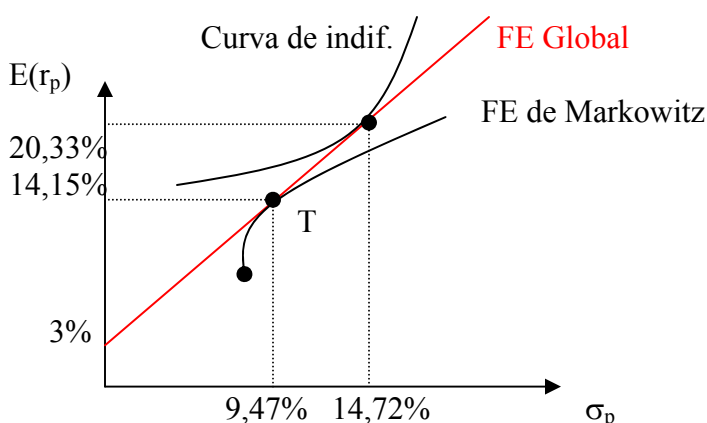
1º Passo: Maximização da Função Lagrangeana

$$\text{Max}_{\{E(r_p), \sigma_p, \lambda\}} L = \ln(E(r_p) - 4\sigma_p^2) + \lambda(3\% + 1,1774\sigma_p - E(r_p))$$

2º Passo: Calculo das condições de 1ª ordem

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial L}{\partial E(r_p)} &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{E(r_p) - 4\sigma_p^2} - \lambda = 0 \\ \bullet \quad \frac{\partial L}{\partial \sigma_p} &= 0 \Leftrightarrow \frac{-8\sigma_p}{E(r_p) - 4\sigma_p^2} + 1,1774\lambda = 0 \\ \bullet \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0 \Leftrightarrow 3\% + 1,1774\sigma_p - E(r_p) = 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{E(r_p) - 4\sigma_p^2} \\ \frac{-8\sigma_p}{E(r_p) - 4\sigma_p^2} + 1,1774\lambda = 0 \\ 3\% + 1,1774\sigma_p - E(r_p) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} - \\ \frac{-8\sigma_p + 1,1774}{E(r_p) - 4\sigma_p^2} = 0 \\ - \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} - \\ \sigma_p = 14,72\% \\ E(r_p) = 20,33\% \end{array} \right.$$



O Caso Prático 3.3 será concluído mais adiante, pois agora será abordado outras questões teóricas importantes para a resolução do resto do exercício.

Teorema da Separação

No modelo de Tobin a escolha da carteira ótima é efectuada em duas etapas, e são elas:

- Identificação da carteira T (igualando inclinações), o que em nada depende das preferências do investidor;
- E escolha da combinação ótima entre “f” e “T” (ponto de tangencia entre mapa de CI e Fronteira Eficiente Global), o que já depende do perfil de risco do investidor.

Esta separação em duas etapas é conhecida como Teorema da Separação, pois na 1ª etapa a decisão em nada depende do investidor, enquanto na 2ª etapa a decisão depende do perfil de risco do investidor.

DIVERSIFICAÇÃO E RISCO

A diversificação contribui para a redução do risco, tal como já foi dito várias vezes ao longo do caderno. O que leva qualquer investidor racional a prosseguir uma estratégia de diversificação.

Exemplo 61A: Considere três acções, cujas características são sumariadas no quadro seguinte. Admita que pretende constituir uma carteira composta pelas acções Y e Z, e com uma rentabilidade de 17%, qual será o desvio padrão (risco) da carteira?

	Acção X	Acção Y	Acção Z	Rentabilidade esperada	Desvio padrão
	Coeficientes de correlação				
Acção X	1			10%	20%
Acção Y	0.3	1		15%	25%
Acção Z	0.6	0.8	1	20%	30%

$$\begin{cases} 15\% \times w_Y + 20\% \times w_Z = 17\% \\ w_Y + w_Z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_Y = 60\% \\ w_Z = 40\% \end{cases}$$

Tal carteira terá um nível de risco igual a:

$$\sigma_{Y,Z} = \sqrt{(0.6)^2 \times (0.25)^2 + (0.4)^2 \times (0.3)^2 + 2 \times 0.6 \times 0.4 \times 0.25 \times 0.3 \times 0.8} \cong 25.632\%.$$

Note-se que o desvio padrão da carteira é inferior à média dos desvios padrão dos títulos componentes ($0,6 \times 25\% + 0,4 \times 30\% = 27\%$), uma vez que o coeficiente de correlação linear é inferior a 1, comprovando-se assim que a diversificação diminui o risco.

Será possível reduzir o desvio-padrão da carteira, para idêntico nível de rentabilidade esperada (17%), mediante a inclusão da acção “X” na carteira? Isto é, será possível reduzir o risco da carteira via diversificação?

A resposta é afirmativa, veja o exemplo seguinte.

Exemplo 62B: Admita que pretende constituir uma carteira composta pelas acções X, Y e Z, e com uma rentabilidade de 17%, qual será o desvio padrão (risco) da carteira?

$$\begin{aligned} \text{Min } \sigma_p^2 = & 0,2^2 \times w_X^2 + 0,25^2 \times w_Y^2 + 0,3^2 \times w_Z^2 + 2 \times w_X \times w_Y \times 0,2 \times 0,25 \times 0,3 + \\ & + 2 \times w_X \times w_Z \times 0,2 \times 0,3 \times 0,6 + 2 \times w_Y \times w_Z \times 0,25 \times 0,3 \times 0,8 \end{aligned}$$

Sujeito a:

- $0,1w_X + 0,15w_Y + 0,2w_Z = 0,17$
- $w_X + w_Y + w_Z = 1$

Solução: $(w_X, w_Y, w_Z) = (18,158\%; 23,684\%; 58,158\%)$

Com efeito,

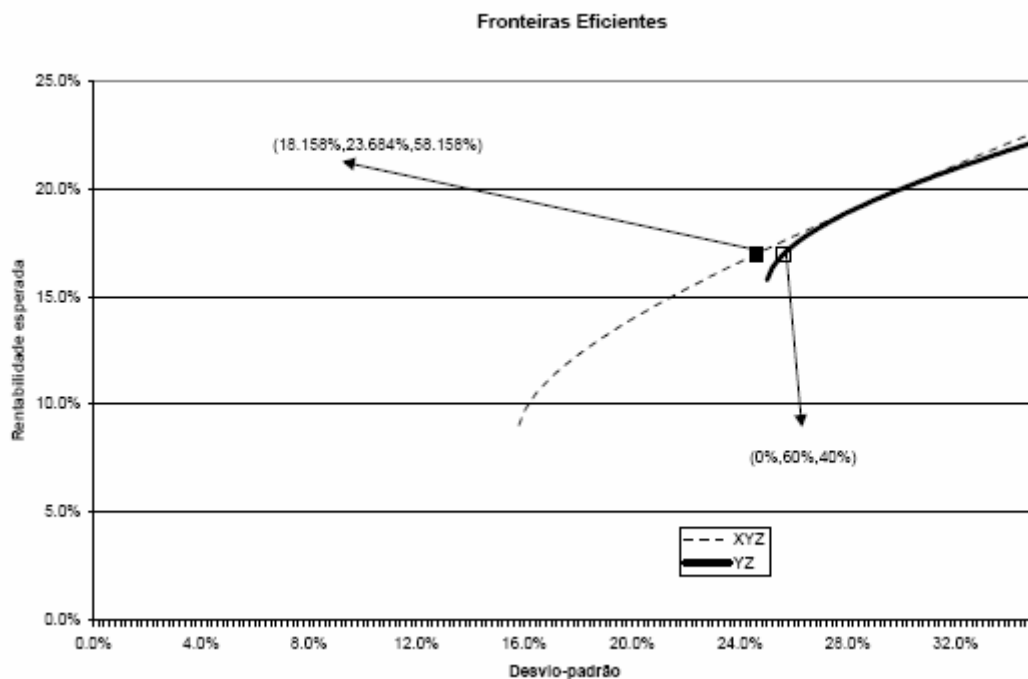
$$E(r_{X,Y,Z}) = 0.18158 \times 10\% + 0.23684 \times 15\% + 0.58158 \times 20\% = 17\%,$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_{X,Y,Z}^2 = & (0.18158)^2 \times (0.2)^2 + (0.23684)^2 \times (0.25)^2 + (0.58158)^2 \times (0.3)^2 \\ & + 2 \times 0.18158 \times 0.23684 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.3 + 2 \times 0.18158 \times 0.58158 \times 0.2 \times 0.3 \times 0.6 \\ & + 2 \times 0.23684 \times 0.58158 \times 0.25 \times 0.3 \times 0.8 \\ = & 0.060688 \end{aligned}$$

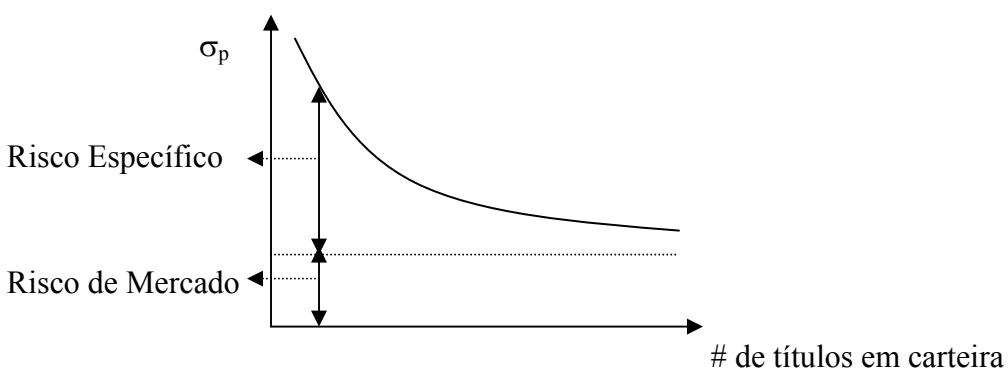
$$\sigma_{X,Y,Z} = (0.060688)^{0.5} = 24,635\%$$

Logo, $\sigma_{X,Y,Z} = 24,635\% < \sigma_{Y,Z} = 25,632\%$



Risco de Mercado e Risco Específico

O exemplo anterior mostra que é possível reduzir o risco via diversificação. Todavia, não é possível eliminar o risco via diversificação. Veja-se o gráfico seguinte que mostra o comportamento típico do desvio padrão de uma taxa de rentabilidade de uma carteira à medida que se introduzem mais títulos na composição da mesma.



É importante salientar, através da análise gráfica, que a partir de um determinado número de títulos o risco da carteira deixa de diminuir. Ou seja, a diversificação permite reduzir mas não eliminar o risco da carteira. Isto acontece porque o risco de uma acção engloba duas componentes:

- **Risco Específico** → Resulta de factores que afectam apenas uma empresa ou conjunto limitado de empresas. Um exemplo poderá ser um administrador de

um Hospital, SA que está doente ou está envolvido num escândalo. Logo, é um risco não, directamente, quantificável.

- **Risco de Mercado** → Resulta de factores que afectam (em igual sentido mas em diferente magnitude) a generalidade do mercado. Por exemplo: ciclos económicos, ou subidas do preço do petróleo.

Enquanto o Risco Específico é eliminado via diversificação, porque existem efeitos de compensação pois os factores de risco específico diferem de empresa para empresa, o Risco de Mercado não é eliminado via diversificação, pois os factores de risco de mercado afectam todas as acções em igual sentido.

Assim sendo, qualquer investidor racional deve possuir uma “**Carteira Completamente Diversificada**”, ou seja, uma carteira só com risco de mercado.

CAPITAL ASSET PRICING MODEL (CAPM)

Trata-se de um modelo de equilíbrio derivado de pressupostos simplificadores (pressupostos estes que possuem pouca aderência à realidade), o qual permite estimar a rentabilidade esperada para uma acção em função da taxa de rentabilidade esperada para o mercado accionista.

Pressupostos

1. Os investidores possuem expectativas homogéneas, isto é, possuem iguais Taxas de Rentabilidade Esperada ($E(r)$), iguais desvios padrão (σ) e iguais coeficientes de correlação linear para todos os títulos. Exemplo: todos os investidores quando questionados de qual a taxa de rentabilidade esperada das acções BCP, todos responderiam 10%.

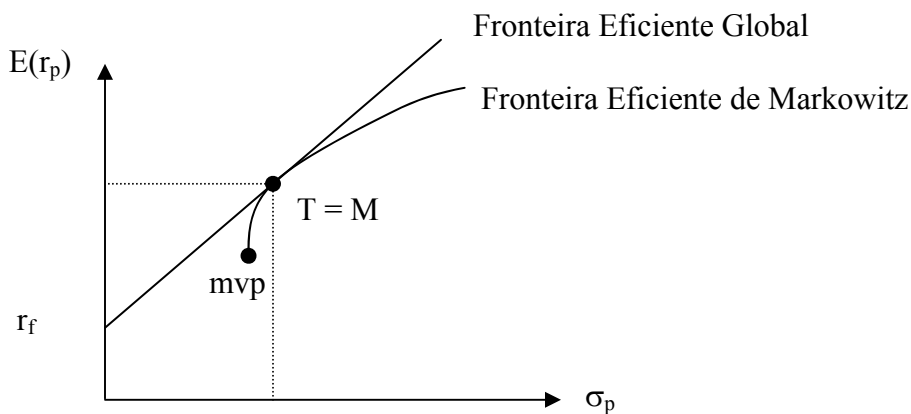


Fronteira Eficiente de Markowitz igual para todos os investidores

2. A taxa de juro sem risco (r_f) é igual para todos os investidores.

Destes dois pressupostos resulta a importante conclusão de que, então, a carteira de tangencia T é igual para todos os investidores. Logo, a Carteira de Tangencia (T) é igual à Carteira Cópia de Mercado (M).

Uma Carteira Cópia de Mercado (M) é uma carteira composta por todas as acções existentes no mercado exactamente nas proporções dadas pelo peso relativo que cada acção possui no mercado. Na prática a carteira cópia de mercado é aproximada com base num índice bolsista, exemplo: PSI20, IBEX, DAX, FTSE, etc.

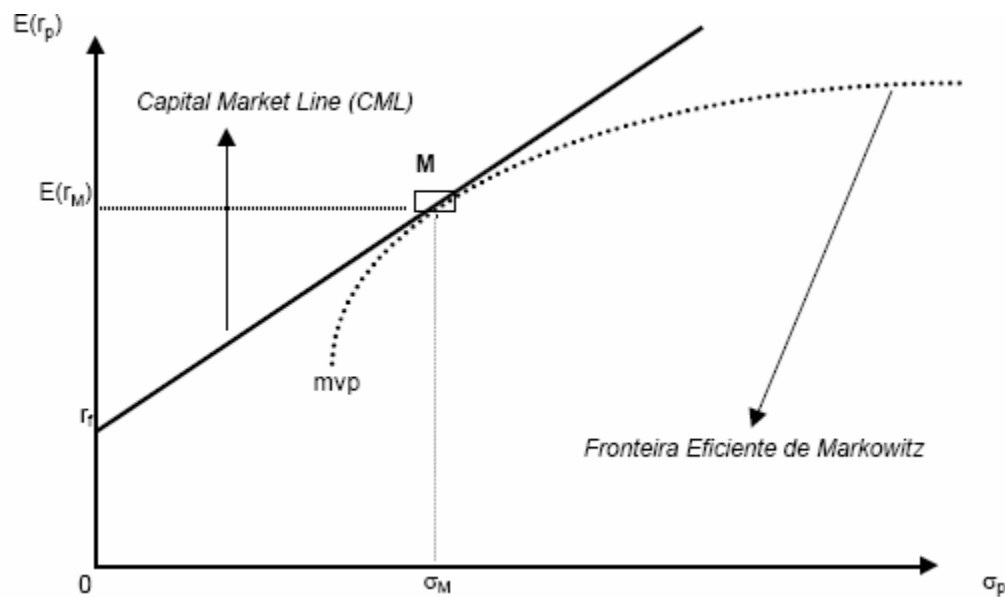


Outros pressupostos:

- i) O mercado accionista funciona em concorrência perfeita, ou seja, todos os investidores são *price takers*.
- ii) Todos os investidores possuem o mesmo horizonte temporal de investimento (*single-period model*).
- iii) O conjunto de possibilidades de investimento é apenas composto por activos transaccionados em mercados financeiros e tais activos financeiros assumem-se perfeitamente divisíveis.
- iv) Não existem impostos nem custos de transacção.
- v) Todos os investidores têm acesso gratuito e instantâneo a toda a informação (mercados eficientes).
- vi) Os investidores são *rational mean-variance optimizers*, i.e.:
 - vi .1) são não saciáveis;
 - vi .2) são avessos ao risco; e
 - vi .3) formulam as suas decisões de investimento apenas com base na taxa de rentabilidade esperada e respectivo desvio-padrão das várias carteiras de investimento.

Capital Market Line (CML)

Assim sendo, e à luz dos pressuposto do CAPM, sabemos que $T = M$. Como tal, a fronteira eficiente global é constituída por combinações entre o activo sem risco e a carteira cópia de mercado (M). Esta semi-recta é designada por Capital Market Line.



Equação da CML:
$$E^{CML}(r_p) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \cdot \sigma_p$$

Notas:

- $E(r_M) - r_f \rightarrow$ Prémio de risco (adicional de remuneração a exigir por investir numa carteira com risco de mercado)
- $(E(r_M) - r_f) / \sigma_M \rightarrow$ Market Price of Risk (adicional de remuneração a exigir por unidade adicional de risco)

É importante reter que $E^{CML}(r_p)$ corresponde à taxa de rentabilidade a exigir para uma carteira completamente diversificada (só com risco de mercado). Logo, a CML engloba todas as carteiras eficientes completamente diversificadas. Isto porque qualquer carteira situada sobre a CML consiste sempre numa combinação entre o activo sem risco e a carteira cópia de mercado, que não possui risco específico.

A Capital Market Line serve, então, para calcular a taxa de rentabilidade a exigir para uma carteira completamente diversificada.

Caso Prático 3.4

Da análise da carteira de ações MPN (denominada em EUR) apuraram-se os seguintes indicadores:

.Rendibilidade esperada para o próximo ano = 18%; e

.Variância da taxa de rendibilidade = 244.

Por outro lado, prevê-se que o índice Dow Jones Eurostock 50 registre um acréscimo anual de 23% e a análise da variância do índice indica um valor de 310.

Sabendo que os Bilhetes do Tesouro a 1 ano estão, neste momento, a ser emitidos a 3%, pretende-se que analise a eficiência da carteira MPN.

Informação do Problema:

- $E(r_{MPN}) = 18\%$
- $\sigma_{MPN} = (0,0244)^{0,5} = 15,62\%$
- $E(r_M) = 23\%$
- $\sigma_M = (0,0310)^{0,5} = 17,61\%$
- $r_f = 3\%$

1ª Hipótese de Resolução

A única carteira somente com ações (sem o activo sem risco) na Capital Market Line é a carteira M. Mas MPN (carteira só com ações) é diferente da carteira M. Logo, MPN não está na Capital Market Line, e não é eficiente.

2ª Hipótese de Resolução

$$18\% \stackrel{?}{=} 3\% + \frac{23\% - 3\%}{17,61\%} \times 15,62\% \Leftrightarrow 18\% = 20,74\% \text{ Proposição Falsa.}$$

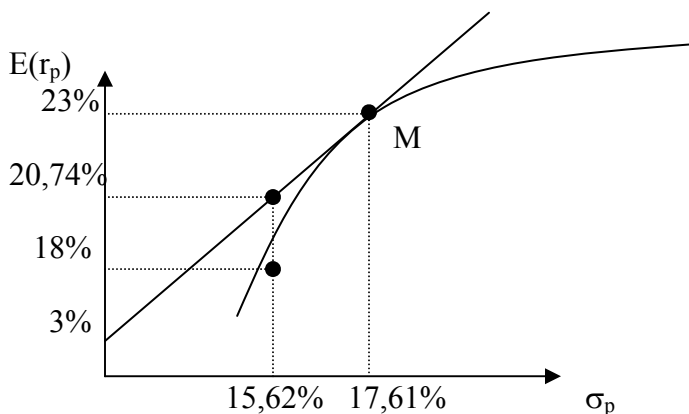
Logo, MPN não é eficiente, pois não pertence à CML.

3ª Hipótese de Resolução

A carteira MPN não é eficiente pois é possível obter uma composição (w_f , w_M) com desvio padrão 15,62%, mas com $E(r_{MPN}) = 20,74\%$ (maior que 18%).

$$\begin{cases} 20,74\% = 3\% * w_f + 23\% * w_M \\ w_f + w_M = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_f = 11,3\% \\ w_M = 88,7\% \end{cases}$$

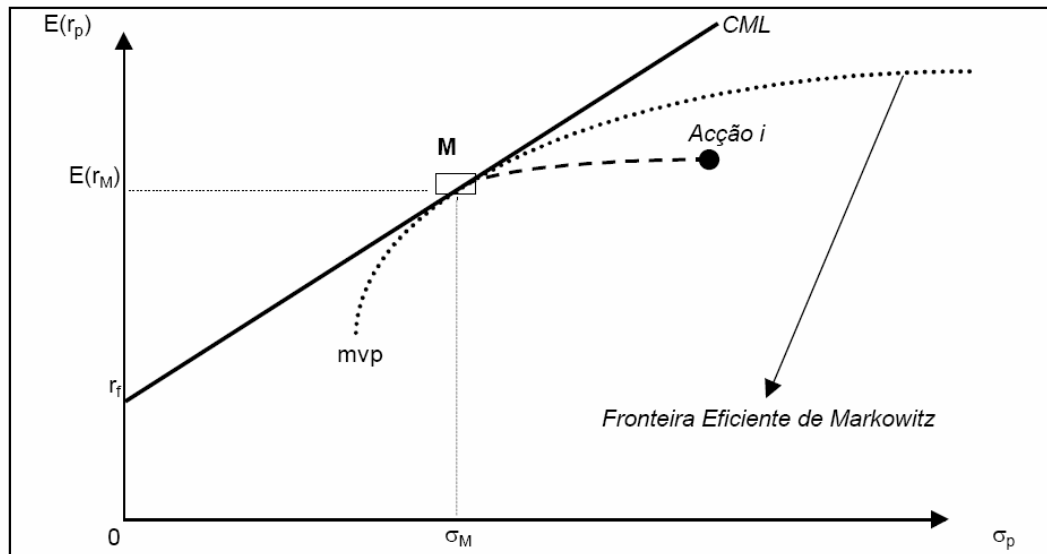
$$\sigma_p = w_M * \sigma_M = 88,7\% * 17,61\% = 15,62\%$$



Security Market Line (SML)

A Security Market Line serve para calcular a taxa de rentabilidade mínima a exigir para uma acção ou carteira em função do seu nível de risco.

Considere uma qualquer acção “i”. No espaço média – desvio-padrão, tal acção constitui um ponto do conjunto de possibilidades de investimento de *Markowitz*, o qual está necessariamente situado abaixo da fronteira eficiente de *Markowitz* e, portanto, também abaixo da CML. Isto porque, uma acção, considerada isoladamente é sempre uma carteira ineficiente, na medida em que não está completamente diversificada (vide gráfico seguinte).



Seja a carteira “p” uma combinação entre a acção “i” e a carteira “M”, com pesos relativos iguais a w_i e $(1 - w_i)$, respectivamente. As diversas combinações possíveis são geometricamente representadas pelo arco “Mi”. A taxa de rentabilidade esperada para a carteira “p” e o respectivo desvio-padrão são dados por:

$$E(r_p) = E(r_i) \times w_i + E(r_M) \times (1 - w_i); e$$

$$\sigma_p = \sqrt{w_i^2 \sigma_i^2 + (1 - w_i)^2 \sigma_M^2 + 2w_i (1 - w_i) \sigma_{i,M}}$$

A inclinação do arco “Mi” é igual a:

$$\frac{\partial E(r_p)}{\partial \sigma_p} = \frac{\frac{\partial E(r_p)}{\partial w_i}}{\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i}}$$

Teorema da Derivada da Função Composta:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= [E(r_i) - E(r_M)] \times \left[\frac{2w_i \sigma_i^2 - 2(1 - w_i) \sigma_M^2 + 2(1 - 2w_i) \sigma_{i,M}}{2\sqrt{w_i^2 \sigma_i^2 + (1 - w_i)^2 \sigma_M^2 + 2w_i (1 - w_i) \sigma_{i,M}}} \right]^{-1}$$

$$= \frac{[E(r_i) - E(r_M)] \times \sqrt{w_i^2 \sigma_i^2 + (1 - w_i)^2 \sigma_M^2 + 2w_i(1 - w_i)\sigma_{i,M}}}{w_i \sigma_i^2 - (1 - w_i) \sigma_M^2 + (1 - 2w_i) \sigma_{i,M}}$$

No ponto “M” (isto é, com $w_i = 0$), a inclinação do arco “Mi” é simplesmente dada por:

$$\left(\frac{\partial E(r_p)}{\partial \sigma_p} \right)_{p=M} = \frac{[E(r_i) - E(r_M)] \times \sqrt{\sigma_M^2}}{-\sigma_M^2 + \sigma_{i,M}} = \frac{[E(r_i) - E(r_M)] \times \sigma_M}{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}$$

Mas, como no ponto “M” a inclinação do arco “Mi” tem de ser idêntica ao *slope* da CML, então:

$$\begin{aligned} \frac{[E(r_i) - E(r_M)] \times \sigma_M}{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2} &= \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \\ \Leftrightarrow E(r_i) \times \sigma_M^2 - E(r_M) \times \sigma_M^2 &= E(r_M) \times (\sigma_{i,M} - \sigma_M^2) - r_f \times (\sigma_{i,M} - \sigma_M^2) \\ \Leftrightarrow E(r_i) \times \sigma_M^2 &= r_f \times \sigma_M^2 + [E(r_M) - r_f] \times \sigma_{i,M} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\text{SML : } E^{\text{SML}}(r_i) = r_f + \frac{[E(r_M) - r_f]}{\sigma_M^2} \times \sigma_{i,M}$$

sendo:

$E^{\text{SML}}(r_i) \equiv$ taxa de rentabilidade de equilíbrio da acção “i”, ou seja, taxa de rentabilidade a exigir para a acção “i”;

$\frac{[E(r_M) - r_f]}{\sigma_M^2} \times \sigma_{i,M} \equiv$ prémio de risco da acção “i”; e

$\sigma_{i,M} \equiv$ covariância entre as taxas de rentabilidade da acção “i” e da carteira cópia de mercado “M”.

A equação da SML (também conhecida por equação fundamental do CAPM), que está no rectângulo a vermelho, pode também ser escrita como:

$$\text{SML : } E^{\text{SML}}(r_i) = r_f + [E(r_M) - r_f] \times \beta_i$$

Sendo:

- $E^{\text{SML}}(r_i) \rightarrow$ Taxa de rentabilidade mínima a exigir para a acção i (assumindo que a acção i está inserida numa carteira completamente diversificada)
- $[E(r_M) - r_f] \rightarrow$ Prémio de risco do mercado

- $\beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} = \frac{\text{cov}(r_i, r_M)}{\text{var}(r_M)}$
- $[E(r_M) - r_f] \times \beta_i \rightarrow \text{Prémio de risco da acção } i$

O parâmetro β da acção i mede o nível de risco de mercado da acção. Ou seja, mede a sensibilidade da taxa de rentabilidade da acção face a variações da taxa de rentabilidade do mercado. Assim, se β aumentar, o risco de mercado também aumentou.

Note-se que $\beta_i = \frac{\partial E(r_i)}{\partial E(r_M)}$.

Exemplo 63: Calcule o Beta dos Bilhetes do Tesouro (β_f) e o Beta da Carteira Cópia de Mercado (β_M).

$$\beta_f = \frac{\sigma_{f,M}}{\sigma_M^2} = \frac{0}{\sigma_M^2} = 0 \qquad \beta_M = \frac{\sigma_{M,M}}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_M^2} = 1$$

Exemplo 64: Suponha que o Beta da PT (β_{PT}) é igual a 1,4 e suponha que o PSI20 cresce 10%. Quanto se espera que a taxa de rentabilidade da PT cresça?

$$r_{PT} = 10\% \times 1,4 = 14\%$$

Este exemplo funciona apenas como forma explicativa para se compreender o parâmetro Beta, não fazer isto em prova.

Porque razão $E^{SML}(r_i)$ se denomina a Taxa de Rentabilidade Mínima?

Esta é a taxa de rentabilidade mínima a exigir para a acção i porque esta apenas compensa o nível de risco de mercado da acção (e não o seu nível de risco específico). Ou seja, esta é portanto a remuneração a exigir por uma acção que esteja inserida numa carteira completamente diversificada.

Logo, se investir 100% na acção i a taxa de rentabilidade deve ser superior (pois obviamente o risco é também superior, na medida em que existe risco específico).

Relação entre a Taxa de Rentabilidade Mínima e a sua sensibilidade face a variações no Mercado

A SML estabelece uma relação linear entre a rentabilidade a exigir para um título e o nível de risco de mercado. Isto é, quanto maior for a covariância entre as taxas de rentabilidade do título e do mercado (ou seja, a relação entre as duas taxas de rentabilidade), maior será o parâmetro beta e maior será o prémio de risco da acção.

$$\text{cov}(r_i, r_M) \uparrow \rightarrow \beta_i \uparrow \rightarrow [E(r_M) - r_f] \times \beta_i \uparrow \rightarrow E^{SML}(r_i) \uparrow$$

A explicação para tal é lógica, pois quanto mais sensível uma acção for face a variações no mercado, maior é o seu risco, e como tal maior deverá ser a taxa de rentabilidade mínima a exigir.

Exemplo 65A: Tendo em conta as informações a seguir disponibilizadas calcule a taxa de rentabilidade mínima a exigir para a acção A e B.

- Taxa de juro dos BT a um ano = 4%;
- Taxa de rentabilidade esperada para o PSI20 no próximo ano = 17%;
- Desvio padrão da taxa de rentabilidade do PSI20 = 25%

	Acção A	Acção B
σ_i	20%	30%
$\ell_{i,M}$	0,3	0,7

$$\beta_A = \frac{0,3 \times 0,2 \times 0,25}{0,25^2} = 0,24$$

$$E^{SML}(r_A) = 4\% + (17\% - 4\%) * 0,24 = 7,12\%$$

$$\beta_B = \frac{0,7 \times 0,3 \times 0,25}{0,25^2} = 0,84$$

$$E^{SML}(r_B) = 4\% + (17\% - 4\%) * 0,84 = 14,92\%$$

Veja-se que a acção B tem mais risco, pois é também mais sensível face a variações no mercado (coeficiente de correlação linear alto).

Alpha (α) de Jensen

O parâmetro α mede o desajustamento (ou diferença) entre a taxa de rentabilidade esperada pelo gestor para a acção i e a taxa de rentabilidade mínima (ou de equilíbrio) a exigir para a acção i.

$$\alpha_i = \begin{array}{c} \text{Taxa de Rentabilidade Esperada} \\ \text{pelo Gestor} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Taxa de Rentabilidade Mínima a} \\ \text{exigir para a acção i} \end{array}$$

$$\alpha_i = E(r_i) - E^{SML}(r_i)$$

O parâmetro α permite assim formular decisões de compra ou venda:

- $\alpha > 0 \rightarrow$ Comprar acção para inserir em carteira completamente diversificada.
- $\alpha < 0 \rightarrow$ Vender acção pois a rentabilidade esperada para o título nem sequer é suficiente para remunerar o respectivo risco de mercado.

É importante notar o seguinte.

A $E^{SML}(r_i)$ deve compensar o risco de Mercado, como já foi dito, e $E(r_i)$ deve compensar além do risco de mercado o risco específico. Isto significa que mesmo sendo a diferença entre estas duas positiva, não se possa afirmar que compensa comprar a acção. Imagine a seguinte situação:

- O Risco Específico da acção i é um valor muito alto;
- $E(r_i) - E^{SML}(r_i) = 2\%$

Assim, apesar da acção i compensar o risco de mercado, a sua rentabilidade esperada é manifestamente insuficiente para compensar o risco específico elevado. Como tal, apenas é admissível dar a decisão de comprar se esta mesma acção estiver inserida numa carteira completamente diversificada, onde o risco específico é eliminado.

Exemplo 65B: Formule uma decisão de trading sabendo que o gestor espera as seguintes taxas de rentabilidade para o próximo ano.

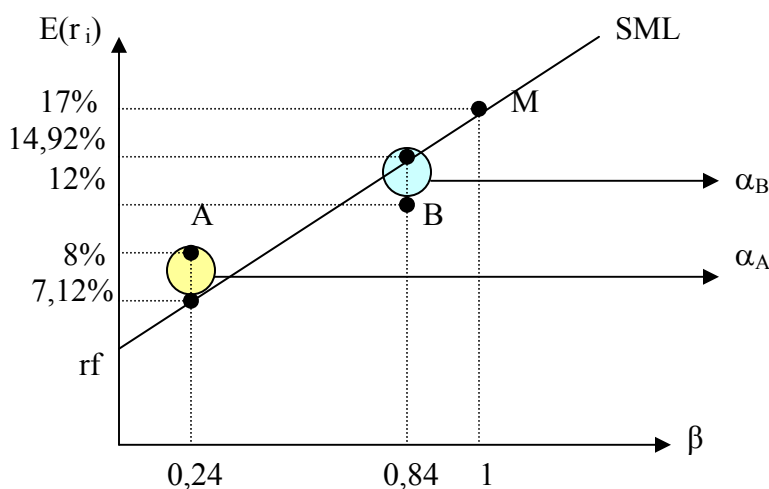
	Acção A	Acção B
$E(r_i)$	8%	12%

Acção A: Expectativas dos gestor maiores que o mínimo exigido ($8\% > 7,12\%$), logo deve comprar (desde que a acção esteja inserida numa carteira completamente diversificada).

$$\alpha_A = 0,88\%$$

Acção B: Expectativas do gestor menores do que o mínimo exigido ($12\% < 14,92\%$) logo deve vender.

$$\alpha_B = -2,92\%$$



Carteira “p” de n Acções

Tratando-se não de uma acção, considerada isoladamente, mas sim de uma carteira de acções p, a equação SML é semelhante:

$$\text{SML} : E^{\text{SML}}(r_p) = r_f + [E(r_M) - r_f] \times \beta_p$$

Sendo:

- $E^{\text{SML}}(r_p) \rightarrow$ Taxa de rentabilidade de equilíbrio da carteira p
- $\beta_p = \frac{\sigma_{p,M}}{\sigma_M^2} = \frac{\text{cov}(r_p, r_M)}{\text{var}(r_M)} = \sum_{i=1}^n \beta_i \times w_i$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \beta_p &= \frac{\text{COV}(r_p, r_M)}{\sigma_M^2} \\ &= \frac{1}{\sigma_M^2} \text{COV}\left(\sum_{i=1}^n r_i w_i, r_M\right) \\ &= \frac{1}{\sigma_M^2} \sum_{i=1}^n w_i \text{COV}(r_i, r_M) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i \frac{\text{COV}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} \end{aligned}$$

$$\beta_p = \sum_{i=1}^n \beta_i \times w_i$$

Exemplo 65C: Calcule a taxa de rentabilidade mínima a exigir para a carteira (w_A, w_B) = (40%, 60%).

1ª Hipótese de Resolução

$$\beta_p = \beta_A \times w_A + \beta_B \times w_B = 0,24 \times 0,4 + 0,84 \times 0,6 = 0,6$$

$$E^{\text{SML}}(r_p) = 4\% + (17\% - 4\%) \times 0,6 = 11,8\%$$

Para que esta carteira compense o risco de Mercado deve gerar uma rentabilidade de 11,8%.

2ª Hipótese de Resolução

$$E^{SML}(r_p) = E^{SML}(r_A) * w_A + E^{SML}(r_B) * w_B = 7,12\% * 0,4 + 14,92\% * 0,6 = 11,8\%$$

Caso Prático 3.3 (continuação)

d) Parâmetro beta da componente accionista do fundo ESC

$$\beta_{ACC} = ?$$

$$E(r_M) = 7\%$$

$E(r_{ACC}) = 8\%$ (assume-se que estes 8% corresponde à rentabilidade mínima a exigir)

$$E(r_{ACC}) = r_f + [E(r_M) - r_f] \times \beta_{ACC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\% = 3\% + (7\% - 3\%) \cdot \beta_{ACC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta_{ACC} = 1,25$$

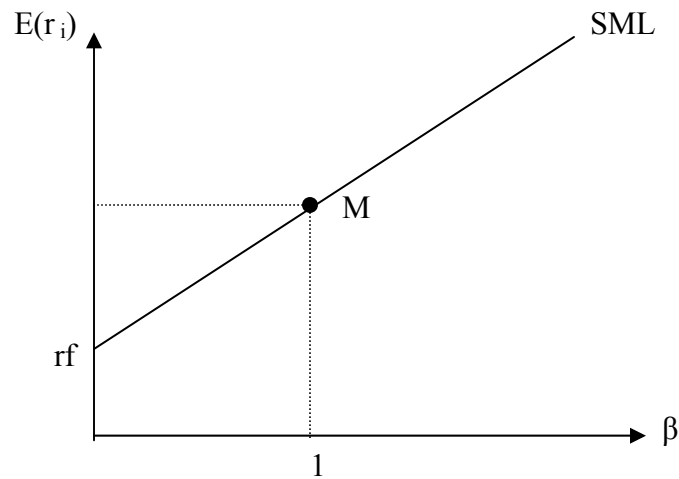
Caso Prático 3.7

	Acção A	Acção B	Carteira cópia do mercado	Activo sem risco
Rendibilidade esperada	19.45%	20.5%	15%	3%
Rendibilidade esperada de equilíbrio	?	?	15%	3%
Coeficiente de correlação linear com a carteira cópia do mercado	0.9	0.8	1	0
Desvio padrão da taxa de rentabilidade esperada	12%	15%	8%	0%

Pretende-se que:

- Desenhe a *Security Market Line*.
- Calcule os parâmetros *beta* das duas acções.
- Posicione as duas acções na *Security Market Line*.
- Calcule os parâmetros *alfa* (de Jensen) das duas acções.
- Formule a decisão de investimento a tomar face a cada uma das duas acções.
- Calcule o índice Treynor das duas acções.
- Calcule o índice Sharpe das duas acções.

a) Security Market Line

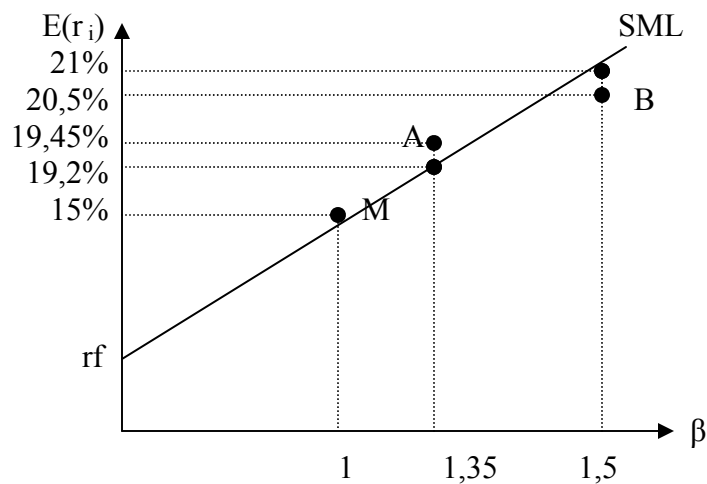


b) Parâmetro beta das duas acções

$$\beta_A = \frac{\sigma_{A,M}}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma_A \times \sigma_M \times \ell_{A,M}}{\sigma_M^2} = \frac{12\% \times 8\% \times 0,9}{8\%^2} = 1,35$$

$$\beta_B = \frac{\sigma_{B,M}}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma_B \times \sigma_M \times \ell_{B,M}}{\sigma_M^2} = \frac{15\% \times 8\% \times 0,8}{8\%^2} = 1,5$$

c) Posicionamento das duas acções na SML



$$E^{SML}(r_A) = 3\% + (15\% - 3\%) \times 1,35 = 19,2\%$$

$$E^{SML}(r_B) = 3\% + (15\% - 3\%) \times 1,5 = 21\%$$

d) Parâmetros alfa de Jensen

$\alpha_A = 19,45\% - 19,2\% = 0,25\% \rightarrow$ Comprar (desde que para inserir numa carteira completamente diversificada)

$\alpha_B = 20,5\% - 21\% = -0,5\% \rightarrow$ Vender

SINGLE INDEX MODEL

Este modelo estabelece uma relação, não entre taxas de rentabilidade esperadas, mas sim entre as taxas de rentabilidade efectivamente geradas por uma determinada acção (ou carteira) e um índice representativo do mercado accionista.

Assim, a taxa de rentabilidade aleatória da acção i é igual a:

$$r_i = \alpha_i + [r_f + (r_M - r_f)\beta_i] + \varepsilon_i$$

Sendo:

- $\alpha_i \rightarrow$ Alfa de Jensen;
- $r_f \rightarrow$ Taxa de juro sem risco;
- $r_M \rightarrow$ Taxa de rentabilidade aleatória do Mercado;
- $\varepsilon_i \rightarrow$ Taxa de rentabilidade residual da acção i , ou seja, a parcela da taxa de rentabilidade da acção i que resulta de factores de risco específico;
- $[r_f + (r_M - r_f)\beta_i] \rightarrow$ Taxa de rentabilidade da acção i que é explicada por factores de risco de mercado;
- $r_i, r_M, \varepsilon_i \rightarrow$ Variáveis aleatórias.

Notas:

- $E(\varepsilon_i) = 0$, pois tenho uma carteira completamente diversificada, logo o risco específico não existe;
- $Cov(r_M, \varepsilon_i) = 0$, pois o risco de Mercado não contempla risco específico;
- $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$

A grande diferença entre o CAPM e o Single Market Model consiste no facto de o primeiro considerar rentabilidades esperadas e o segundo utilizar taxas de rentabilidade observadas.

Apliquemos os valores esperados aos dois membros da expressão:

$$\begin{aligned} E(r_i) &= E(\alpha_i + [r_f + (r_M - r_f)\beta_i] + \varepsilon_i) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E(r_i) &= \alpha_i + r_f + E[(r_M - r_f)\beta_i] + E(\varepsilon_i) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E(r_i) &= \alpha_i + r_f + [E(r_M - r_f)] \cdot \beta_i + 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow E(r_i) = \alpha_i + r_f + [E(r_M) - r_f] \cdot \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(r_i) = \alpha_i + E^{SML}(r_i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha_i = E(r_i) - E^{SML}(r_i)} \quad \text{Obtém-se o parâmetro alfa na sua forma habitual}$$

Agora apliquemos a variância aos dois membros da expressão:

$$V(r_i) = V(\alpha_i + [r_f + (r_M - r_f)\beta_i] + \varepsilon_i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(r_i) = V[r_M \cdot \beta_i - r_f \cdot \beta_i + \varepsilon_i] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(r_i) = V[r_M \cdot \beta_i + \varepsilon_i] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(r_i) = V[r_M \cdot \beta_i] + V[\varepsilon_i] + 2\text{cov}(r_M \cdot \beta_i, \varepsilon_i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(r_i) = \beta_i^2 \cdot V[r_M] + V[\varepsilon_i] + 2 \cdot \beta_i \cdot \text{cov}(r_M, \varepsilon_i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(r_i) = \beta_i^2 \cdot V[r_M] + V[\varepsilon_i] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sigma_i^2 = \beta_i^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2} \longrightarrow \text{Fórmula do Risco Total}$$

Nota:

$$V[a+X] = V[X]$$

“a” é uma constante

Sendo:

- $\sigma_i^2 \rightarrow$ Risco Total
- $\beta_i^2 \cdot \sigma_M^2 \rightarrow$ Risco de Mercado
- $\sigma_{\varepsilon_i}^2 \rightarrow$ Risco Específico

Assim, se “i” corresponder à carteira i, e se a componente $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ for zero então “i” é uma carteira completamente diversificada, pois não existe custo específico.

Caso Prático 3.9

Considere as seguintes informações:

	Rentabilidade Esperada	Desvio Padrão da Rentabilidade	Coef. correlação com o mercado
Acção A		7%	0.9
Acção B		14%	0.8

Carteira Mercado	16%	12%
Activo Risco Nulo	5%	

O coeficiente de correlação linear entre as rendibilidades de A e B é de 0.75. Admita que pode fazer aplicações e financiamentos à taxa do activo sem risco.

Pretende-se que:

- Determine a composição de uma carteira que inclua apenas as acções A e B, de modo a que a sua rentabilidade esperada seja de 13%.
- Determine o risco total e o risco específico da carteira calculada na alínea anterior.
- A carteira é totalmente diversificada? Justifique.
- Admita que tem EUR10,000 para investir. Qual a melhor forma de aplicar este valor de modo a obter uma rentabilidade esperada de 18%?

a) Composição da Carteira (w_A , w_B) com $E(r_p) = 13\%$

Assumindo que $\alpha_A = \alpha_B = 0$, então:

- $\beta_A = \frac{\sigma_{A,M}}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma_A \times \sigma_M \times \ell_{A,M}}{\sigma_M^2} = \frac{7\% \times 12\% \times 0,9}{12\%^2} = 0,525$
- $\beta_B = \frac{\sigma_{B,M}}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma_B \times \sigma_M \times \ell_{B,M}}{\sigma_M^2} = \frac{14\% \times 12\% \times 0,8}{12\%^2} = 0,933$
- $E^{SML}(r_A) = r_f + [E(r_M) - r_f] \times \beta_A = 5\% + (16\% - 5\%) \times 0,525 = 10,775\%$
- $E^{SML}(r_B) = r_f + [E(r_M) - r_f] \times \beta_B = 5\% + (16\% - 5\%) \times 0,933 = 15,267\%$

$$\begin{cases} 13\% = E(r_A) \cdot w_A + E(r_B) \cdot w_B \\ w_A + w_B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13\% = 10,775\% \cdot w_A + 15,267\% \cdot w_B \\ w_A + w_B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_A = 50,5\% \\ w_B = 49,5\% \end{cases}$$

b) Risco Total e Risco Específico

Risco Total:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w_A^2 \cdot \sigma_A^2 + w_B^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot \ell_{A,B} \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B = \\ &= 0,505^2 \cdot 0,07^2 + 0,495^2 \cdot 0,14^2 + 2 \cdot 0,505 \cdot 0,495 \cdot 0,75 \cdot 0,07 \cdot 0,14 \\ &= 0,0097259044 \end{aligned}$$

$$\sigma_p = \sqrt{0,0097259044} = 9,862\%$$

Risco Específico:

$$\beta_p = 0,505 \times 0,525 + 0,495 \times 0,933 = 0,72696$$

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon_p}^2 \Leftrightarrow 0,0097259044 = 0,72696^2 \times 0,12^2 + \sigma_{\epsilon_p}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{\epsilon_p} = 4,6\%$$

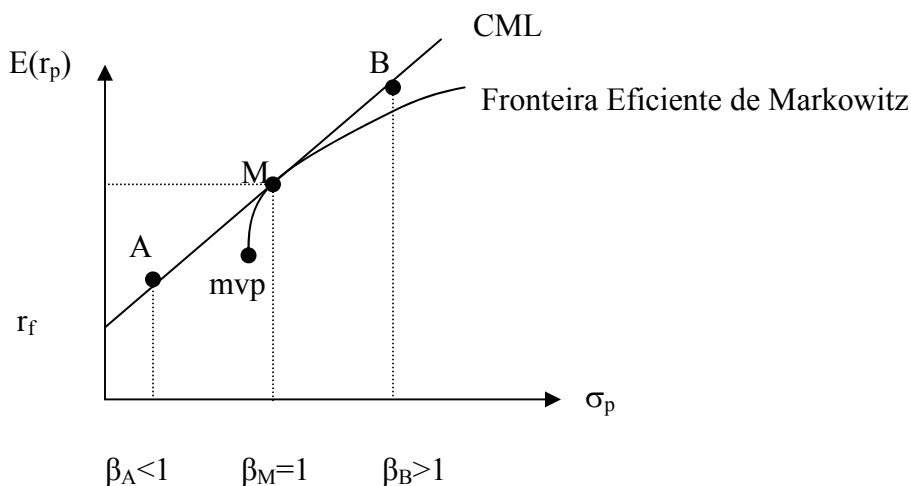
Nota 1: Ter cuidado ao dizer que o Risco de Mercado é igual a (9,862% - 4,6% = 5,262%), pois matematicamente não é correcto fazer-se isto, na medida em que: $\sqrt{\sigma_i^2} \neq \sqrt{\beta_i^2 \cdot \sigma_M^2} + \sqrt{\sigma_{\epsilon_i}^2}$.

Nota 2: Ao introduzir mais títulos na minha carteira consigo com os iguais 13% de rentabilidade ter menos risco (pois no limite elimino os 4,6% de risco específico).

c) Carteira Não Diversificada

Esta carteira não é completamente diversificada porque o risco específico é diferente de zero.

A justificação de que a carteira não é completamente diversificada, não pode ser feita através do facto do beta ser diferente de 1. Pois, uma carteira pode ser completamente diversificada sem que tenha um beta igual a 1, veja o seguinte exemplo, em que a carteira A é completamente diversificada com um beta inferior a 1, e a carteira B é também completamente diversificada com um beta superior a 1.



d) $(w_M, w_f) = ?$

A melhor forma de aplicar os 10.000€ é aplicando-os numa carteira eficiente, pois é a que terá um menor risco para uma rentabilidade esperada de 18%. Como tal, esta carteira eficiente será uma carteira situada graficamente na recta CML, logo uma combinação entre a carteira M (cópia de mercado) e o activo sem risco.

Objectivo: $E(r_p) = 18\%$

$$\begin{cases} 18\% = 16\% \cdot w_M + 5\% \cdot w_f \\ w_M + w_f = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_M = 1,1818 \\ w_f = -0,1818 \end{cases}$$

INDICADORES DE AVALIAÇÃO DA PERFORMANCE

Os indicadores da avaliação da performance de activos ou carteira de activos servem para relativizar a rentabilidade (seja a histórica ou esperada) em função do nível de risco assumido.

Índice de Sharpe (IS)

$$IS_p = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$$

Sabe-se que $(r_p - r_f)$ corresponde à rentabilidade gerada a mais da carteira quando comparada com o investimento no activo sem risco, ou seja, o Excess Return. Assim, temos que a expressão do Índice de Sharpe signifique o Excess Return por unidade de risco total.

Como é obvio, quanto maior for o Índice de Sharpe melhor será.

Exemplo 66A: Tendo em conta o seguinte quadro calcule o Índice de Sharpe.

	Carteira A	Carteira B	PSI20
Taxa de Rentabilidade do último ano	20%	15%	18%
Desvio Padrão da Taxa de Rentabilidade	30%	20%	25%
β	1,1	0,7	1
$r_f = 4\%$			

$$IS_A = \frac{20\% - 4\%}{30\%} = 0,533$$

$$IS_B = \frac{15\% - 4\%}{20\%} = 0,55$$

$IS_A < IS_B \rightarrow B$ remunera melhor o seu nível de risco total

$$IS_M = \frac{18\% - 4\%}{25\%} = 0,56$$

Logo, nenhuma das duas carteiras conseguiu bater o mercado. Era, portanto, preferível comprar acções do PSI20 a comprar a carteira A ou B.

Índice de Treynor (IT)

$$IT_p = \frac{r_p - r_f}{\beta_p}$$

O Índice de Treynor evidencia o Excess Return por unidade de risco de mercado. Este índice serve para comparar carteiras completamente diversificadas (pois o risco específico não é contemplado).

Como é obvio quanto maior este índice for, melhor a carteira se comporta.

Exemplo 66B: Calcule o Índice de Treynor. Depois diga se a carteira A é completamente diversificada ou não.

$$IT_A = \frac{20\% - 4\%}{1,1} = 0,1454$$

$$IT_B = \frac{15\% - 4\%}{0,7} = 0,15714$$

$IT_A < IT_B \rightarrow B$ remunera melhor o seu nível de risco de mercado

$$IT_M = \frac{18\% - 4\%}{1} = 0,14$$

$$IT_M < IT_A < IT_B$$

Logo ambas as carteiras bateram o Mercado em termos de remuneração do risco de mercado.

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= \beta_A^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_\epsilon^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,3^2 &= 1,1^2 \cdot 0,25^2 + \sigma_\epsilon^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sigma_\epsilon^2 &= 0,014375 \neq 0, \text{ Logo não é completamente diversificada} \end{aligned}$$

Alpha de Jensen (α)

$$\alpha_i = E(r_i) - E^{SML}(r_i)$$

ou

$$\alpha_i = r_p - (r_f + (r_M - r_f) \times \beta_p)$$

Conforme já tínhamos dito atrás, o alfa só considera a componente risco de mercado, pois apenas tem em conta o parâmetro beta.

Quanto maior for o alfa melhor.

Exemplo 66C: Calcule o alfa de jensen.

$$\alpha_A = 20\% - [4\% + (18\% - 4\%) \cdot 1,1] = 0,6\%$$

$$\alpha_B = 15\% - [4\% + (18\% - 4\%) \cdot 0,7] = 1,2\%$$

$$\alpha_A < \alpha_B \rightarrow B \text{ tem melhor performance}$$

M-Squared (M^2)

$$M_p^2 = \frac{\text{Taxa de Rentabilidade que a carteira teria apresentado se } \sigma_p \text{ fosse igual a } \sigma_M}{\sigma_p} - r_M$$

A única forma de calcular a taxa de rentabilidade que a carteira apresentaria se tivesse igual risco à carteira cópia de mercado, é combinando a carteira com o activo sem risco. Assim, tem-se a combinação “c” entre:

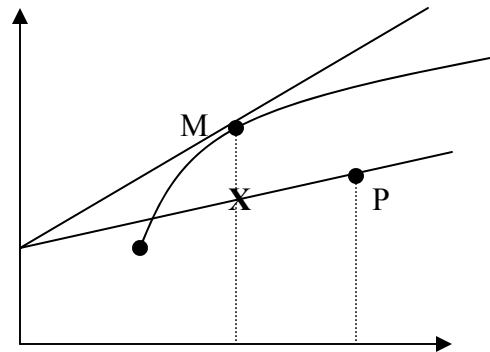
- $w_p \rightarrow$ carteira p
- $w_f = 1 - w_p \rightarrow$ activo sem risco

$$\begin{aligned} V[r_c] &= V[r_p \cdot w_p + r_f \cdot (1 - w_p)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V[r_c] &= V[r_p \cdot w_p] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V[r_c] &= w_p^2 \cdot V[r_p] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_p^2 &= \frac{V[r_M]}{V[r_p]} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow w_p &= \frac{\sigma_M}{\sigma_p} \end{aligned}$$

$$M_p^2 = \left[\frac{\sigma_M}{\sigma_p} \cdot r_p + \left(1 - \frac{\sigma_M}{\sigma_p} \right) \cdot r_f \right] - r_M$$

Representação gráfica da carteira que apresenta igual risco à carteira cópia de mercado.



Exemplo 66D: Calcule o M-Squared.

$$M_A^2 = \left[\frac{25\%}{30\%} \cdot 20\% + \left(1 - \frac{25\%}{30\%} \right) \cdot 4\% \right] - 18\% = 17,33\% - 18\% = -0,67\%$$

Rentabilidade que a carteira A geraria se tivesse o risco igual a σ_M

Rentabilidade da carteira M com risco σ_M

No fundo igualou-se os riscos e depois comparou-se as rentabilidades, concluindo-se que não se conseguiu bater o mercado.

$$M_B^2 = \left[\frac{25\%}{20\%} \cdot 15\% + \left(1 - \frac{25\%}{20\%} \right) \cdot 4\% \right] - 18\% = 17,75\% - 18\% = -0,25\%$$

$M_A^2 < M_B^2 \rightarrow B$ tem melhor performance que a carteira A, mas nenhuma delas conseguiu bater o Mercado

AVALIAÇÃO DE ACÇÕES E DIREITOS

Antes de iniciarmos este capítulo começemos por esclarecer a definição de Acção. Assim, Acção é um título representativo de uma parcela do capital social de uma sociedade.

VALOR CONTABILÍSTICO

$$\text{Valor Contabilístico} = \frac{\text{Capitais Próprios (CP')}}{\text{\# de acções}}$$

Todavia este método é muito pouco usado para avaliar acções, Pois, não tem em conta o que irá acontecer no futuro, sendo apenas um indicador histórico.

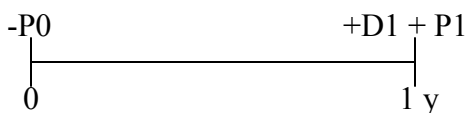
MODELO DE GORDON: AVALIAÇÃO VIA DIVIDENDOS

Fair Value

Começemos por considerar as seguintes siglas/abreviaturas:

- **Pi** = Valor de equilíbrio no momento i
→ P0 = Valor de equilíbrio no momento 0 ou Fair Value
- **Di** = Dividendos por acção no ano i (*DPS = Dividend Per Share*)
→ D1 = Dividendos por acção do ano 1
- **r** = taxa de rentabilidade mínima exigida para a acção = $r_f + [E(r_M) - r_f] \times \beta$

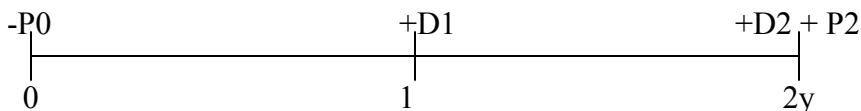
Investimento com Horizonte Temporal de 1 ano



$$P0 = \frac{D1}{1+r} + \frac{P1}{1+r}$$

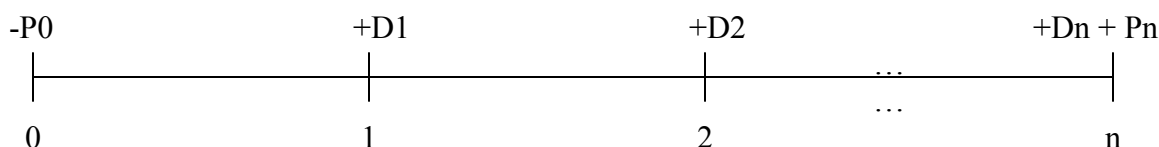
Para actualizar os Cash Flows, à que faze-lo utilizando uma taxa adequada ao risco da acção. Como tal calcula-se a taxa de rentabilidade mínima a exigir.

Investimento com Horizonte Temporal de 2 anos



$$P0 = \frac{D1}{1+r} + \frac{D2}{(1+r)^2} + \frac{P2}{(1+r)^2}$$

Investimento com Horizonte Temporal de n anos



$$P0 = \frac{D1}{1+r} + \frac{D2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{Dn}{(1+r)^n} + \frac{Pn}{(1+r)^n}$$

Pressupostos do Modelo de Gordon

Pressuposto 1: $\bar{r}$

A taxa de rentabilidade a exigir para a acção é constante.

Pressuposto 2: $D_k = D_{k-1} \cdot (1+g)$

Os dividendos por acção evoluem a uma taxa constante. Logo, “g” corresponde à taxa de crescimento constante dos dividendos.

Pressuposto 3: $r > g$

Investimento com Horizonte Temporal ilimitado



$$P0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{D1}{1+r} + \frac{D2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{Dn}{(1+r)^n} + \frac{Pn}{(1+r)^n} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{D1}{1+r} + \frac{D2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{Dn}{(1+r)^n} \right] + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{Pn}{(1+r)^n} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{D1}{1+r} + \frac{D2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{Dn}{(1+r)^n} \right] + 0 \stackrel{\text{pressuposto 2}}{\Leftrightarrow}$$

Nota: P0 é igual ao valor actual de todos os dividendos futuros.

$$\Leftrightarrow P0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{D1}{1+r} + \frac{D1 \cdot (1+g)}{(1+r)^2} + \dots + \frac{Dn \cdot (1+g)^{n-1}}{(1+r)^n} \right] \Leftrightarrow$$

Soma dos n termos de uma progressão geométrica de razão $\left(\frac{1+g}{1+r} \right)$ e 1º termo $\frac{D1}{1+r}$.

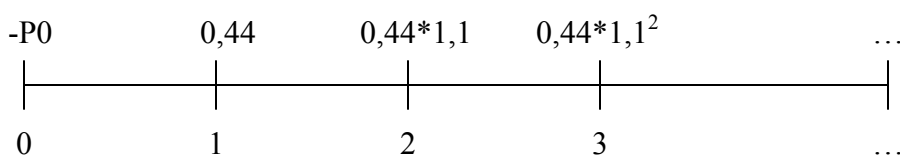
$$\Leftrightarrow P0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{D1}{1+r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^n}{1 - \left(\frac{1+g}{1+r} \right)} \right] \Leftrightarrow P0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[D1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^n}{(1+r) - (1+g)} \right] \text{ pressuposto 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P0 = \frac{D1}{r - g}$$

Assim, podemos muito facilmente calcular o Fair Value de uma obrigação. Todavia, tenha-se em conta que são usados pressupostos muito redutores da realidade, assim normalmente só se utiliza esta fórmula a partir de determinada altura da vida futura da empresa (em que se assume que os dividendos evoluem a taxa de crescimento constante).

Exemplo 67: Avalie a acção SLB, sabendo que:

- DPS esperado para o próximo ano = 0,44€
- Admita-se que nos seguintes anos os dividendos crescem à taxa de 10% ao ano;
- Taxa de juro sem risco = 2%;
- Taxa de rentabilidade esperada para o PSI20 = 14%;
- $\beta_{SLB} = 1,5$.



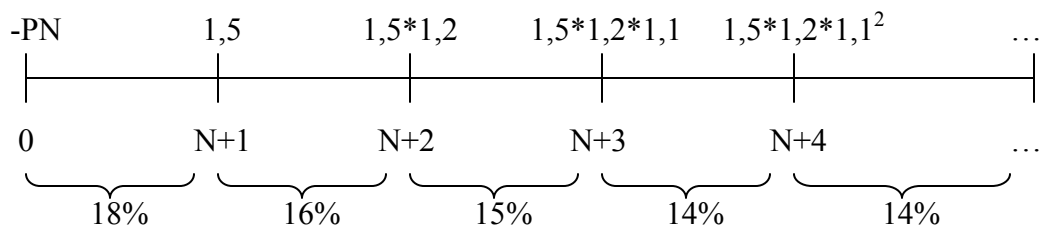
$$r = 2\% + (14\% - 2\%) * 1,5 = 20\%$$

$$P0 = \frac{0,44}{20\% - 10\%} = 4,4\text{€}$$

Caso Prático 4.1

Determine, no final do ano N, o valor da acção cujos os elementos previsionais estão resumidos no quadro seguinte:

	Ano N+1	Ano N+2	Ano N+3	Ano N+4 e seguintes
Proximo dividendo	1,5 Eur			
Taxa de crescimento dos dividendos	25%	20%	10%	10%
Taxa de rentabilidade minima exigida	18%	16%	15%	14%

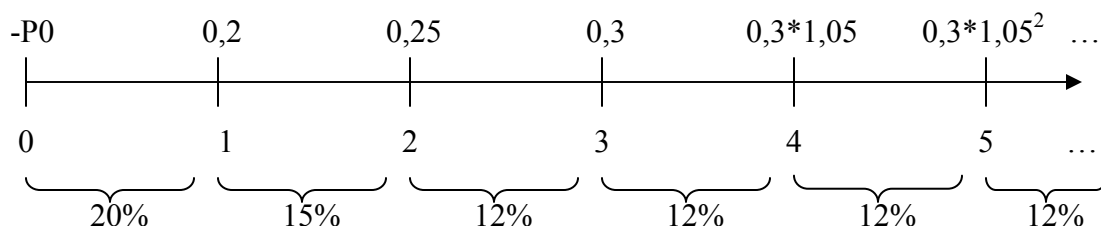


$$PN = \frac{1,5}{1+18\%} + \frac{1,5 \times 1,2}{(1+18\%)(1+16\%)} + \frac{1,5 \times 1,2 \times 1,1}{(1+18\%)(1+16\%)(1+15\%)} + \frac{\frac{1,5 \times 1,2 \times 1,1^2}{14\% - 10\%}}{(1+18\%)(1+16\%)(1+15\%)}$$

$$= 38,44\text{€}$$

Exemplo 68: Calcule o P0 da seguinte acção:

	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4 e Seguintes
DPS	0,2€	0,25€	0,3€	$g = 5\%$
Taxa de Rentabilidade mínima a exigir para a acção	20%	15%	12%	12%



$$P0 = \frac{0,2}{1+20\%} + \frac{0,25}{(1+20\%)(1+15\%)} + \frac{\frac{0,3}{20\% - 5\%}}{(1+20\%)(1+15\%)} = 3,45\text{€}$$

Taxa de Crescimento Constante dos Dividendos (g)

A partir de certa altura da vida futura da empresa assume-se que os dividendos evoluem a uma taxa de crescimento constante. Esta taxa de crescimento constante é a taxa “g”.

Para os dividendos crescerem a taxa constante (g), então a Taxa de Rentabilidade dos Capitais Próprios (RCP') e a Taxa de Distribuição dos Dividendos (TDD) têm que ser constantes.

$$\text{Se } \overline{\text{TDD}} \wedge \overline{\text{RCP}'} \Rightarrow \bar{g}$$

Exemplo 69: Calcule a taxa de crescimento constante dos dividendos (g), sabendo que:

- Capitais Próprios no final do ano N = $\text{CP}'_N = 200.000\text{€}$
- Taxa de Rentabilidade dos Capitais Próprios = $\text{RCP}'_k = 20\%$
- Taxa de Distribuição dos Dividendos = $\text{TDD} = 25\%$

Nota1: Neste exemplo assume-se que a RCP é constante

$$\text{Nota2: } \text{RCP}'_k = \frac{\text{RL}_k}{\text{CP}'_{k-1}}$$

$$\text{Nota3: } \text{TDD} = \frac{\text{D}}{\text{RL}}$$

	N+1	N+2	N+3
Capitais Iniciais	200.000	230.000	264.500
RL (=CP'*RCP')	40.000	46.000	52.900
Dividendos (=RL*TDD)	10.000	11.500	13.225
Capitais Finais	230.000	264.500	304.175
g		15%	15%

$$g = \frac{264.500 - 230.000}{230.000} \text{ ou } \frac{304.175 - 264.500}{264.500} = 15\%$$

Uma forma bem mais expedita e fácil de calcular a taxa de crescimento constante dos dividendos é:

$$g = \text{RCP}'(1 - \text{TDD})$$

Esta fórmula permite tirar duas conclusões:

- Quanto maior a RCP maior será g.
- Quanto menor TDD maior será g. Isto explica-se por, se a TDD é menor, é porque existem mais lucros retidos, logo há mais potencial de crescimento futuro dos dividendos.

Valor de Crescimento Zero de uma Acção (VCZ)

O Valor de Crescimento Zero (VCZ) de uma acção corresponde ao Fair Value (P_0) de uma acção, se a Taxa de Distribuição de Dividendos for igual a 100%, ou seja, com “g” igual a 0. Veja-se:

$$VCZ = P_0 \xrightarrow{\text{Se}} TDD = 100\% \Rightarrow g = 0$$

Se a TDD for igual a 100% é natural que “g” seja igual a 0, porque se não existe lucros retidos, então também não existe potencial de crescimento futuro dos dividendos.

$$D_1 = RLA_1 * TDD = RLA_1 * 100\% = RLA_1$$



Resultado Líquido por Acção ($EPS = \text{Earning Per Share}$)

$$VCZ = P_0 = \frac{D_1}{r - g} = \frac{RLA_1}{r}$$

$$VCZ = \frac{RLA_1}{r}$$

Valor Actual das Oportunidades de Crescimento (VAOC)

O VAOC corresponde à parcela do valor da acção que valoriza a perspectiva de crescimento futuro dos dividendos. Portanto:

$$P_0 = VCZ + VAOC \Leftrightarrow \boxed{VAOC = P_0 - VCZ}$$

Exemplo 70A: Calcule o VCZ e VAOC, sabendo que:

- $\overline{RLA}$ previsto para o próximo ano = 0,6€
- $\overline{TDD} = 30\%$
- Taxa de rentabilidade mínima exigida por acção = 20%
- $\overline{RCP'} = 25\%$

$$\text{Como } \overline{TDD} \wedge \overline{RCP'} \Rightarrow \overline{g} = 25\% * (1 - 30\%) = 17,5\%$$

$$P_0 = \frac{0,6 \times 30\%}{20\% - 17,5\%} = 7,2\text{€}$$

$$VCZ = \frac{0,6}{20\%} = 3\text{€}$$

$$VAOC = 7,2\text{€} - 3\text{€} = 4,2\text{€} > 0 \text{ (nota: } RCP' > r \text{)}$$

Exemplo 70B: Calcule o VCZ e VAOC, sabendo que:

- $\overline{RLA}$ previsto para o próximo ano = 0,6€
- $\overline{TDD} = 30\%$
- Taxa de rentabilidade mínima exigida por acção = 20%
- $\overline{RCP}' = 15\%$

Como $\overline{TDD} \wedge \overline{RCP}' \Rightarrow \bar{g} = 15\% \cdot (1 - 30\%) = 10,5\%$

$$P_0 = \frac{0,6 \times 30\%}{20\% - 10,5\%} = 1,89\text{€}$$

$$VCZ = \frac{0,6}{20\%} = 3\text{€}$$

$$VAOC = 1,89\text{€} - 3\text{€} = -1,11\text{€} < 0 \text{ (nota: } \overline{RCP}' < r \text{)}$$

Deste ultimo exemplo temos a retirar que:

- $\overline{RCP}' > r \Rightarrow VAOC > 0$
 - $\overline{RCP}' < r \Rightarrow VAOC < 0$

Logo, podemos depreender que para os dividendos crescerem é necessário que os resultados sejam retidos e reinvestidos na empresa, pois só assim haverá maior potencial de crescimento futuro dos dividendos. Isto porque, se a RCP for maior que a taxa de rentabilidade disponível para o accionista em alternativas idêntico risco (r), então o investidor vai preferir reinvestir os seus resultados na empresa

Caso contrário, se a RCP for menor que a taxa de rentabilidade disponível no mercado para investimentos de idêntico risco, então o investidor vai preferir investir os seus resultados fora da empresa, o que faz com que seja menor potencial de crescimento futuro dos dividendos, logo um VAOC negativo.

AValiação de Accções Via Múltiplos

PER (Price Earning Ratio) de Mercado

$$PER_0 = \frac{VC_0}{RLA_1}$$

O PER corresponde ao Valor de Cotação, que deve ser a média entre Bid e Ask, dividido pelo RLA_1 , a expectativa do próximo resultado líquido.

Este é um critério de decisão meramente qualitativo, pois a decisão de trading deve ser feita comparando P_0 com os Valores de Cotação (ask ou bid).

Note-se que quanto menor for o PER melhor.

Exemplo 71: Determine o PER da seguinte acção, sabendo ainda que o EPS previsto para o próximo ano é de 0,5€.

	Bid	Ask	Mid
Vc	1,95€	2,05€	$(1,95+2,05)/2 = 2€$

$$PER = 2€ / 0,5€ = 4$$

Este valor diz-nos que em média, e grosso modo, necessito de 4 anos para recuperar o investimento na acção.

PER (Price Earning Ratio) de Equilíbrio

$$PER_0 = \frac{P_0}{RLA_1}$$

$$PER_0 = \frac{P_0}{RLA_1} = \frac{\frac{D_1}{r-g}}{\frac{RLA_1 \times TDD}{r-g}} = \frac{TDD}{r-g}$$

$$PER_0 = \frac{TDD}{r-g}$$

Caso Prático 4.4

A empresa TPG prevê manter uma taxa de distribuição de dividendos uniforme ao longo do tempo. O PER (Price Earnings Ratio) das suas acções é, presentemente, igual a 8 e afigura-se ajustado face às perspectivas da empresa, as quais apontam para um crescimento médio anual de 12%. Face ao risco da empresa, os accionistas requerem uma taxa de rentabilidade mínima de 17%.

Pretende-se:

a) A determinação do Valor Actual das Oportunidades de Crescimento (VAOC), sabendo que o resultado líquido por acção previsto para o próximo ano é de EUR 2.

b) A análise do valor obtido na alínea anterior.

a)

$$VCZ = \frac{RLA_1}{r} = \frac{2€}{17\%} = 11,76€$$

$$PER_0 = \frac{P_0}{RLA_1} \Leftrightarrow 8 = \frac{P_0}{2€} \Leftrightarrow P_0 = 16€$$

$$VAOC = P_0 - VCZ = 16€ - 11,76€ = 4,24€$$

b)

O VAOC é positivo, assim garantidamente a RCP' é maior que r . Como tal, o investidor prefere que o lucros sejam reinvestidos na empresa, pois esta proporciona uma maior rentabilidade do que investir em alternativos investimentos com idêntico risco.

Veja-se o que se dizia:

$$PER_0 = \frac{TDD}{r - g} \Leftrightarrow 8 = \frac{TDD}{17\% - 12\%} \Leftrightarrow TDD = 40\%$$

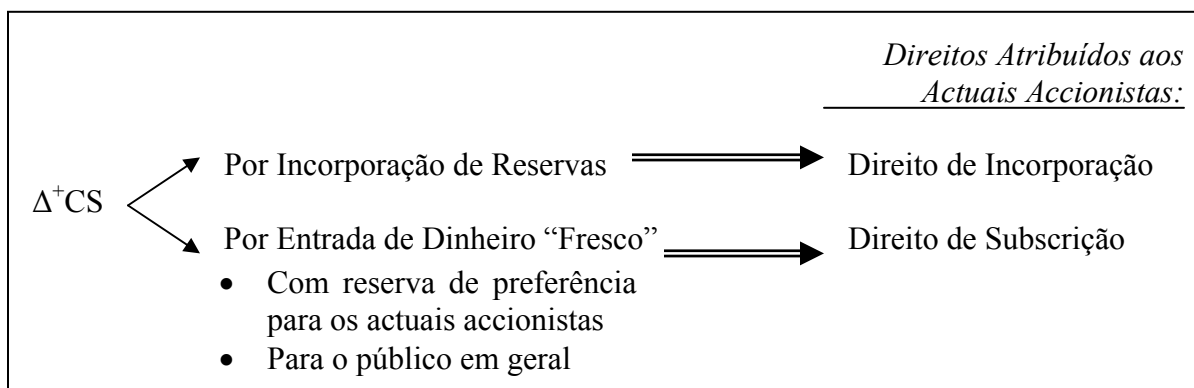
$$g = RCP' * (1 - TDD) \Leftrightarrow 12\% = RCP' * (1 - 40\%) \Leftrightarrow RCP' = 20\%$$

$$RCP' > r \Leftrightarrow 20\% > 17\%$$

AVALIAÇÃO DE DIREITOS

Introdução

Quando uma empresa ou sociedade decide fazer um aumento de Capital Social, pode fazê-lo de duas formas, que dão origem a diferentes direitos atribuídos aos accionistas. Assim, o aumento de Capital Social pode ser feito por incorporação de reservas, que dá origem ao Direito de Incorporação. Ou pode fazê-lo por entrada de dinheiro “fresco”, que dá origem ao Direito de Subscrição. Veja-se o seguinte esquema.



O aumento de capital por incorporação de reservas não se traduz em qualquer aumento de capital próprio, mas apenas num aumento de capital social compensado por uma diminuição de reservas. Esta medida pode ter diferentes motivações como evitar a distribuição de reservas, cumprir obrigações legais ou, ainda, reduzir a cotação média de acções (para aumentar a liquidez).

O Direito de Incorporação traduz-se no direito do actual accionista em receber gratuitamente novas acções (proporcionalmente ao numero de acções antigas já detidas em carteira).

Quando o aumento de Capital Social é feito por entrada de dinheiro “fresco” com reserva de preferência para os actuais accionistas existe Direito de Subscrição. Assim, e concluindo, o Direito de Subscrição é o direito de preferência conferido aos actuais accionistas na subscrição de novas acções.

Exemplo 72A: Tendo em conta a seguinte situação, analise os Direitos de Incorporação e os Direitos de Subscrição.

“A empresa GN, com um Capital Social no valor de EUR10.000.000 (representado por 10.000.000 com um valor nominal de EUR1 e com um valor de cotação actualmente igual a EUR4), pretende aumentar o seu Capital Social para EUR20.000.000 por via de:

- *Incorporação de Reservas:* emissão de 4.000.000 de acções com um valor nominal de EUR1;
- *Reserva de Preferência para accionistas:* emissão de 5.000.000 de acções com um valor nominal de EUR1, ao preço de EUR2,70 cada;
- Emissão de 1.000.000 de acções para o público, com um valor nominal de EUR1 e ao preço de EUR2,8 cada.”

Direitos de Incorporação

Existem 10.000.000 direitos de incorporação os quais permitem receber gratuitamente 4.000.000 novas acções.

Assim, cada Direito de Incorporação (isto é, cada acção antiga acção) dá o direito de receber 0,4 novas acções. Veja-se:

$$\text{Factor de Incorporação} = \frac{\# \text{ de novas acções a emitir via incorporação de reservas}}{\# \text{ de acções em circulação antes do aumento de CS}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{FI = \frac{An_i}{A_0}}$$

$$FI = \frac{4.000.000}{10.000.000} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4$$

←
Lote Padrão → O número 5, corresponde ao número, ou múltiplos deste, de acções que eu preciso ter em carteira para receber novas acções sem desperdício.

Direitos de Subscrição

As actuais 10.000.000 acções conferem o direito a comprar 5.000.000 de novas acções a 2,7€ cada.

Como tal, cada Direito de Subscrição (isto é, cada acção antiga) permite comprar 0,5 acções novas (a 2,7€ cada).

$$\text{Factor de Subscrição} = \frac{\# \text{ de novas acções a emitir via reserva de preferência}}{\# \text{ de acções em circulação antes do aumento de CS}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{FS} = \frac{An_s}{A_0}$$

$$\text{FS} = \frac{5.000.000}{10.000.000} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Lote Padrão → O número 2, corresponde ao número, ou múltiplos deste, de acções que eu preciso ter em carteira para receber novas acções sem desperdício.

Exemplo 72B: Continuando o exemplo agora pretende-se que:

- Admitindo possuir 57 acções GN, determine o número de novas acções a obter gratuitamente.
- Admitindo possuir 57 acções GN, determine o número de novas acções que pode subscrever preferencialmente.

a)

$$57 * 0,4 = 22,8 \Rightarrow 22 \text{ Novas acções}$$

Ou

$$\begin{array}{l} 5 \text{ antigas} \quad \underline{\quad} \quad 2 \text{ novas} \\ 57 \text{ antigas} \quad \underline{\quad} \quad x \text{ novas} \end{array} \quad x = 22,8 \Rightarrow 22 \text{ Novas acções}$$

Veja-se ainda o número de Direitos de Incorporação não exercidos:

- $57 \text{ DI} - \frac{22}{0,4} \text{ DI} = 2 \text{ DI}$
- $\frac{22,8 - 22}{0,4} \text{ DI} = 2 \text{ DI}$

Dado que possuo 2 direito de incorporação não exercidos para não desperdiçá-los ou vendo estes dois direito de incorporação em bolsa, ou compro 3 direitos de incorporação em bolsa (que dá direito a uma nova acção).

b)

$$57 * 0,5 = 28,5 \Rightarrow 28 \text{ Novas acções}$$

Ou

$$\begin{array}{l} 2 \text{ antigas} \quad \underline{\quad} \quad 1 \text{ nova} \\ 57 \text{ antigas} \quad \underline{\quad} \quad x \text{ novas} \end{array} \quad x = 28,5 \Rightarrow 28 \text{ Novas acções}$$

Veja-se ainda o número de Direitos de Subscrição não exercidos:

- $57 \text{ DS} - \frac{28}{0,5} \text{ DS} = 1 \text{ DS}$
- $\frac{28,5 - 28}{0,5} \text{ DS} = 1 \text{ DS}$

Dado que possuo 1 direito de subscrição não exercido para não desperdiçá-lo ou vendo este direito de subscrição em bolsa, ou compro 1 direitos de subscrição em bolsa (que dá direito a poder comprar uma nova acção).

Preço Teórico da Acção após o Aumento de Capital Social



Capitalização

Bolsistas antes = # de acções em circulação × Cotação = $A0 \times P0$
do Δ^+CS

Capitalização

Bolsistas após = $A1 \times P1 = (A0 \times P0) + (An_i \times 0) + (An_s \times Ps) + (An_p \times Pp)$
 Δ^+CS

- $A1 = A0 + An_i + An_s + An_p$
- An_i = # de acções a emitir via incorporação de reservas
- An_s = # de acções a emitir via reserva de preferências
- An_p = # de acções a emitir para o público em geral
- Ps = preço de emissão via reserva de preferência
- Pp = preço de emissão para o público em geral

Assim, podemos calcular o $P1$, preço das acções após o aumento de capital social, através de:

$$P1 = \frac{A0 \cdot P0 + An_i \cdot 0 + An_s \cdot Ps + An_p \cdot Pp}{A0 + An_i + An_s + An_p}$$

Exemplo 72C: Continuando o exemplo agora pretende-se que:

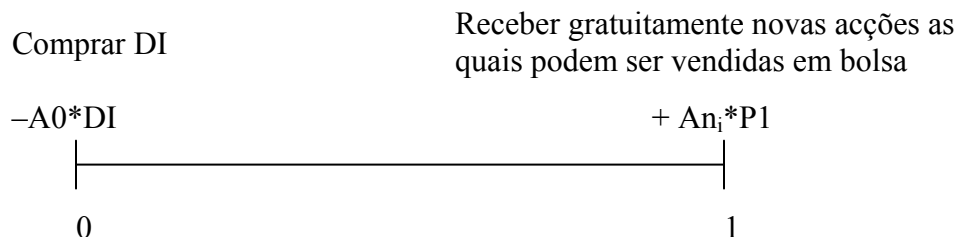
c) Estime o preço teórico das acções GN após o aumento de capital social.

c)

$$P1 = \frac{10.000.000 \times 4 + 4.000.000 \times 0 + 5.000.000 \times 2,7 + 1.000.000 \times 2,8}{10.000.000 + 4.000.000 + 5.000.000 + 1.000.000} = 2,815\text{€}$$

Valor Teórico dos Direitos

Direitos de Incorporação (DI)



Assim, e ignorando o desfaseamento temporal, temos que:

$$A0 \cdot DI = An_i \cdot P1 \Leftrightarrow \boxed{DI = \frac{An_i}{A0} P1} \Leftrightarrow \boxed{DI = FI \cdot P1}$$

Se reparar-mos a formula atrás encontrada faz todo o sentido, porque sendo o DI o direito de receber novas acções, então este DI deve ser avaliado pelo preço teórico da acção após o aumento de CS (P1) multiplicado pelo Factor de Incorporação (a quantas novas acções corresponde 1DI).

Exemplo 72D: Continuando o exemplo agora pretende-se que:

d) Calcule o valor teórico de um direito de incorporação

$$DI = 0,4 \cdot 2,815 = 1,126\text{€}$$

Assim se 1DI corresponder a 0,4 novas acções, então o valor de 1DI deve corresponder a 0,4P1.

Imagine-se um accionista com 10 acções antigas, logo 10 Direitos de Incorporação (DI), para este é indiferente vender já os 10DI ou exercer os 10DI.

- Vender já os 10 DI
 $10 \cdot 1,126\text{€} = 11,26\text{€}$
- Exercer os 10 DI
 $10 \cdot 0,4 = 4 \text{ novas acções}$
 $4 \cdot 2,815\text{€} = 11,26\text{€}$

Direitos de Subscrição (DS)

Comprar DS

Exercer o DS e vender as novas acções

$$-A_0 \cdot DS$$

$$-A_n \cdot P_s + A_n \cdot P_1$$

0

1

$$A_0 \cdot DS = -A_n \cdot P_s + A_n \cdot P_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{DS = \frac{A_n}{A_0} (P_1 - P_s)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{DS = FS \cdot (P_1 - P_s)}$$

Exemplo 72E: Continuando o exemplo agora pretende-se que:

e) Calcule o valor teórico de um direito de subscrição.

$$DS = 0,5 (2,815 - 2,7) = 0,0575\text{€}$$

Imagine-se um accionista com 10 acções antigas, logo 10 Direitos de Subscrição (DS), para este é indiferente vender já os 10DS ou exercer os 10DS.

- Vender os 10 DS
 $10 \cdot 0,0575 = 0,575\text{€}$
- Exercer os 10 DS
 $10 \cdot 0,5 = 5$ novas acções
 - o $-5 \cdot 2,7 = -13,5\text{€}$ (comprou-se as 5 novas acções exercendo o DS)
 - o $+5 \cdot 2,815 = 14,075\text{€}$ (vendeu-se as 5 novas acções) $14,075 - 13,5 = 0,575\text{€}$

Preço de Equilíbrio para o Público

O Preço de Equilíbrio para o público será o preço que não beneficia nem prejudica os actuais accionistas e o público em geral. O preço de equilíbrio para o público será tal que:

$$\boxed{P_p = P_1}$$

Exemplo 72F: Continuando o exemplo agora pretende-se que:

- f) Determine o preço de emissão ao público de equilíbrio.
- g) Mostre que o preço de venda ao público (2,8€) prejudica os actuais accionistas.

f)

$$\left\{ \begin{array}{l} P1 = \frac{10.000.000 \times 4 + 4.000.000 \times 0 + 5.000.000 \times 2,7 + 1.000.000 \times Pp}{10.000.000 + 4.000.000 + 5.000.000 + 1.000.000} \\ P1 = Pp \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P1 = Pp = 2,816\text{€}$$

g)

Supondo que possuo 10 acções antigas. Então:

Valor da Carteira antes $\Delta^+CS = 10 \times 4 = 40\text{€}$

Valor da Carteira após o Δ^+CS (sabendo que: $P1=2,815\text{€}$ e $Pp=2,8\text{€}$)

- Se acompanhar o $\Delta^+CS = -5 \times 2,7 + (10+4+5) \times 2,815 = 39,985\text{€} < 40$
- Se não acompanhar o $\Delta^+CS = 10 \times 2,815 + 10DI \times 1,126 + 10DS \times 0,0575 = 39,985\text{€} < 40$

Valor da Carteira após o Δ^+CS (sabendo que: $P1=Pp=2,816\text{€}$)

- Se acompanhar o $\Delta^+CS = -5 \times 2,7 + (10+4+5) \times 2,816 = 40\text{€} = 40$
- Se não acompanhar o $\Delta^+CS = 10 \times 2,816 + 10DI \times 1,1264 + 10DS \times 0,058 = 40\text{€} = 40$
 - o Valor do $DS=0,5 \times (2,816-2,7)=0,058$
 - o Valor do $DI=0,4 \times 2,816 = 1,1264$

Assim, note-se que na 1ª hipótese o accionista fica prejudicado, contudo na 2ª hipótese quando é usado o preço de equilíbrio o accionista não sai prejudicado nem beneficiado.

Caso Prático 4.8

A empresa CSC, cujo capital social é actualmente representado por 600,000 acções com o valor nominal de EUR 5, decidiu, em Assembleia Geral, proceder a um aumento do seu capital social por via de:

- Incorporação de reservas, através da emissão de 180,000 acções, com valor nominal de EUR 5;
- Reserva de preferência para accionistas, através da emissão de 240,000 acções, com o valor nominal de EUR 5 e ao preço de EUR 10, cada;
- Emissão de 600,000 acções para o público, com um valor nominal de EUR 5.

Sabendo que hoje a cotação das acções CSC é de EUR 15 e que a subscrição das novas acções terá lugar durante os próximos dias, pretende-se que:

- Determine o preço de equilíbrio para cada nova acção a emitir junto do público;
- Calcule o valor teórico dos direitos associados às acções CSC;
- Se, em Bolsa, os direitos de subscrição estiverem cotados a EUR 0.40, que estratégia de especulação poderá ser adoptada?
- Mostre que o preço de equilíbrio não beneficia nem prejudica os actuais investidores

Notas antes de iniciar o exercício:

- $A_0 = 600.000$ acções e $P_0 = 15\text{€}$
- $An_i = 180.000$ acções
- $An_s = 240.000$ acções e $P_s = 10\text{€}$
- $An_p = 600.000$ acções e $P_p = ?$
- $FI = \frac{An_i}{A_0} = \frac{180.000}{600.000} = 0,3$
- $FS = \frac{An_s}{A_0} = \frac{240.000}{600.000} = 0,4$

a) Cálculo do Preço de Equilíbrio

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = \frac{15 \times 600.000 + 0 \times 180.000 + 10 \times 240.000 + P_p \times 600.000}{600.000 + 180.000 + 240.000 + 600.000} \\ P_1 = P_p \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_1 = P_p = 11,176\text{€}$$

b) Cálculo dos DI e DS

$$DI = FI * P_1 = 0,3 * 11,176 = 3,3528\text{€}$$

$$DS = FS \cdot (P_1 - P_s) = 0,4 * (11,176 - 10) = 0,4704\text{€}$$

Note-se que a única diferença entre P_0 e P_1 , quando em equilíbrio, é precisamente o valor dos direitos. Isto é:

$P_0 - P_1 = DI + DS$	$\Leftrightarrow 15 - 11,176 = 3,3528 + 0,4704 \Leftrightarrow 3,823 = 3,823 \text{ c.q.d}$
-----------------------	---

Daí P0 ser conhecido por *Preço Rights On* (preço que tem implícito exercer os DS e DI) e o P1 ser conhecido por *Preço Ex-Rights*.

c)

Como os Direitos de Subscrição estão cotados em bolsa a 0,4€ e valem 0,4704€, então a lógica manda comprar o máximo possível de Direitos de Subscrição. Está, então, a usar-se uma estratégia de especulação, pois acredito que irá haver um ganho esperado, contudo incerto. A incerteza nesta situação é não saber se vendo as novas acções a 11,176€.

Prove-se o que se estava dizendo, supondo que vou comprar 10 DS:

Comprar 10 DS	10DS * 0,4€	-4€
Exercer os 10 DS	4novas acções*10€	-40€
Venda das 4 novas acções	4 acções*11,176€	44,704€
Total		0,704€

Porque razão alguém venderia os DS a um preço mais baixo (como 0,4€)?

O mais certo a ter acontecido foi alguém que não calculou correctamente o valor actual das acções (P0), ou então calculou este (P0) tendo por base o preço a que comprou as acções, o que está obviamente errado. Ora se P0 está mal calculado, P1 também estará (veja-se a formula de calculo de P1), o que faz com que também DS esteja mal calculada.

Além da Estratégia de Especulação existe outra Estratégia que conheça?

Além da estratégia de Especulação, que consiste em acreditar que irá haver um ganho esperado, existe também a Estratégia de Arbitragem, que tem por base ganhos certos (isto é, ganhos sem risco), obviamente que isto é tremendamente difícil de encontrar.

d) Preço de Equilíbrio não beneficia nem prejudica os actuais investidores

Valor da Carteira antes do Δ^+CS	10*15	150
Valor Após o Δ^+CS		
- Acompanha o Δ^+CS	$(10+3+4)*11,176 - 4*10$	150
- Não Acompanha o Δ^+CS	$10*11,176 + 10DI*3,3528 + 10DS*0,4704$	150
- Exerce os 10DI mas vende os 10DS	$10*11,176 + 3*11,176 + 10*0,4704$	150

Assim, se for definido $P1=Pp$ a operação torna-se neutra para os actuais accionistas e investidores, pois não são prejudicados, nem beneficiados.

Caso Prático 4.9

Em Junho de N, a empresa SSN,SA aumentou o capital de 473,072,798.32 EUR para 2,000,000,000 EUR através de:

- uma primeira alteração do valor nominal de 4.99 EUR para 5 EUR;

- uma segunda alteração do valor nominal de 5 EUR para 1 EUR (*stock split*);
- aumento de capital de 474,020,840 EUR para 2,000,000,000 EUR por via da emissão de 1,093,409,520 acções ordinárias por incorporação de reservas de 432,569,640 acções ordinárias por emissão reservada a accionistas, ao preço de 1 EUR.

Considerando o preço *rights-on* de 43.5 EUR, calcule:

- o preço teórico *rights-on* após o *stock split*;
- o preço teórico *ex-rights*;
- o valor de um direito de subscrição;
- o valor de um direito de incorporação.

a) P0 após o stock Split = ?

Com um capital social inicial de EUR 473,072,798.32 e um valor nominal de EUR 4.99, a empresa tinha 94,804,168 acções emitidas. Para elevar o valor nominal para o número redondo EUR 5, é necessário atribuir (por contrapartida de reservas) mais um cêntimo por cada acção, ou seja EUR 948,042.

Situação após este passo: capital social de EUR 474,020,840, mesmo número de acções, mas com valor nominal de EUR 5.

	Situação Inicial	Sit. após ajustamento VN
Número de Acções	94.804.168,00	94.804.168,00
VN	4,99	5,00
Capital Social	473.072.798.32	474.020.840,00
Preço	43,50	43,50
Capitalização Bolsista	4.123.981.308,00	4.123.981.308,00
Result. transitados + reservas		-948.041,68
Capitais próprios		Não se alteram

O passo seguinte é o desdobramento das acções, para passar o valor nominal de EUR 5 para EUR 1, operação designada nos países de língua inglesa *stock split*. O capital social mantém-se e o número de acções quintuplica (para 474,020,840). O preço divide-se por cinco, e assim o preço *rights-on* aplicável passa a ser $43.5 \div 5 = \text{EUR } 8.70$. A capitalização bolsista não sofre alterações.

	Situação de partida	Após Stock Split
Número de Acções	94.804.168,00	474.020.840,00
VN	5,00	1,00
Capital Social	474.020.840,00	474.020.840,00
Preço	43,50	8,70
Capitalização Bolsista	4.123.981.308,00	4.123.981.308,00
Result. transitados + reservas		Não se alteram
Capitais próprios		Não se alteram

Resumindo, um Stock Split é uma operação em que:

- Aumenta o número de acções em circulação (desdobramento de acções). Neste caso o novo número de acções em circulação é igual ao número de acções em circulação antes do stock split vezes 5.
 $94.804.168 \times 5 = 474.020.840$ Acções
- E ao mesmo tempo o valor nominal das acções decresce. Neste caso divide-se o antigo valor nominal por 5.
 $V_n: 5\text{€} / 5 = 1\text{€}$

Como tal, o P0 após o stock split é simplesmente $43,5\text{€} / 5 = 8,7\text{€}$

b)

$$P1 = \frac{8,7 \times 474.020.840 + 1 \times 432.569.640}{474.020.840 + 1.093.409.520 + 432.569.640} = 2,28\text{€}$$

c)

$$DS = (P1 - P_s) * FS = (2,28 - 1) \times \frac{432.569.640}{474.020.840} = 1,166\text{€}$$

d)

$$DI = P1 * FI = 2,28 \times \frac{1.093.409.520}{474.020.840} = 5,255\text{€}$$

Caso Prático 4.5

Prevê-se que, dentro de um ano, as acções da empresa VRP apresentem um PER (Price Earnings Ratio) de 5 e um VAOC (Valor Actual das Oportunidades de Crescimento) igual a EUR -10. Para os próximos anos, estima-se que a taxa de distribuição de dividendos e a rentabilidade dos capitais próprios, da empresa VRP, atinjam 25% e 12%, respectivamente.

Determine o valor actual das acções VRP, assumindo que a taxa de rendimento requerida pelos investidores manter-se-à inalterável para todo o horizonte de análise considerado.

Dados do Problema:

- $PER = 5$
- $VAOC = -10€$
- $\overline{TDD} = 25\%$
- $\overline{RCP'} = 12\%$

Formulas a usar para a resolução:

- $P0 = VAOC + VCZ$
- $PER = \frac{TDD}{r - g}$
- $PER = \frac{P0}{RLA_1}$
- $g = RCP' (1 - TDD)$
- $VCZ = \frac{RLA1}{r}$

Resolução:

$$g = 12\% (1 - 25\%) = 9\%$$

$$PER = \frac{TDD}{r - g} \Leftrightarrow 5 = \frac{25\%}{r - 9\%} \Leftrightarrow r = 14\%$$

$$\left\{ \begin{array}{l} PER = \frac{P0}{RLA_1} \\ P0 = VAOC + VCZ \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 = \frac{P0}{RLA_1} \\ P0 = -10 + \frac{RLA1}{14\%} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P0 = 70/3 \\ RLA1 = 14/3 \end{array} \right.$$

ISCTE – ESCOLA DE GESTÃO

LICENCIATURA EM OGE – GESTÃO FINANCEIRA I

EXAME – 2ª ÉPOCA 2004/05

Duração: 3 horas

28/Janeiro/2005

CASO 1 (3 valores)

Responda (sucinta e objectivamente) a somente duas das questões seguintes:

- a) Comente a seguinte afirmação e classifique-a como sendo verdadeira ou falsa: “Uma obrigação será vendida a desconto quando a taxa do cupão é menor do que a *yield to maturity*”
- b) Considere uma operação de aumento de capital social por incorporação de reservas de 200 mil acções. Existindo actualmente em circulação 1 milhão de acções, qual é o número de acções a obter gratuitamente por um accionista que possui actualmente 1,047 acções? E qual é o número de direitos de incorporação não exercidos (automaticamente)?
- c) Comente a seguinte afirmação, indicando se a mesma é verdadeira ou falsa: “Considerando o diferencial *bid-ask* para a taxa de juro sem risco, deixa de existir uma única carteira integralmente composta por activos com risco que é eficiente”.

Resolução

a) Taxa de Cupão < YTM $\Rightarrow$ VT0 < 100% ?

Afirmação verdadeira, pois o obrigacionista irá exigir um desconto ao nível do preço para compensar a insuficiência do cupão. Veja-se o seguinte exemplo em que a taxa de cupão é 3% e a YTM igual a 4%.

$$VT = \frac{3\%}{(1+4\%)} + \frac{103\%}{(1+4\%)^2} < 100\%$$

Todavia é, ainda, possível que a taxa de cupão seja inferior à YTM e mesmo assim a obrigação não seja vendida a desconto, basta existir por exemplo um prémio de reembolso. Exemplo:

$$VT = \frac{3\%}{(1+4\%)} + \frac{103\%+10\%}{(1+4\%)^2} > 100\%$$

b)

A0 = 1.000.000 acções

Ani = 200.000 acções

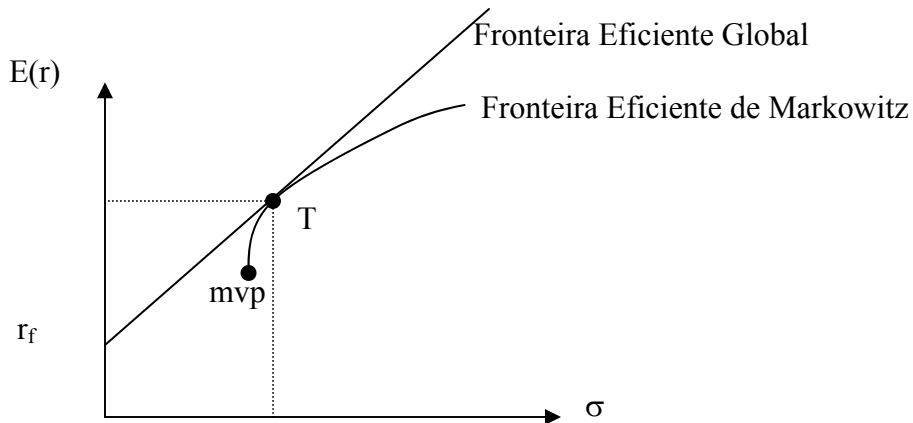
FI = 0,2

Número de Acções a receber = 0,2 * 1.047 = 209,4 $\Rightarrow$ 209 acções

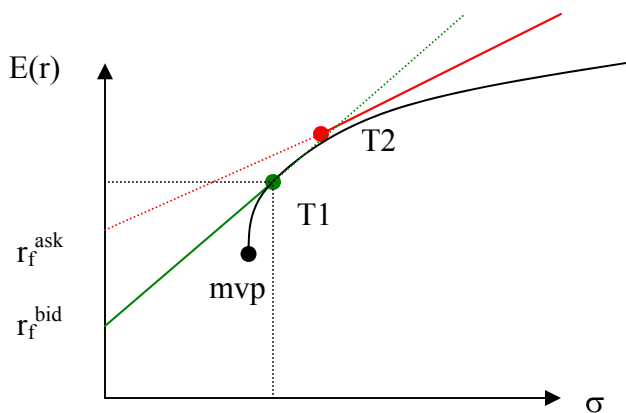
Número de DI não exercidos = $1047DI - 209/0,2 DI = 2DI$

c)

Quando existe apenas um r_f :



Quando existe um diferencial bid-ask para r_f à que ter em conta que r_f^{bid} serve para aplicar fundos e r_f^{ask} para contrair financiamento. Então:



Logo, afirmação verdadeira, pois todas as carteiras entre T1 e T2 são integralmente compostas por activos com risco e são eficientes.

CASO 2 (5 valores)

Em 3 de Janeiro de 2005 (2ª feira) foram estimadas as seguintes taxas de juro sem risco para o EUR (taxas efectivas anuais, na base de calendário ACT/ACT):

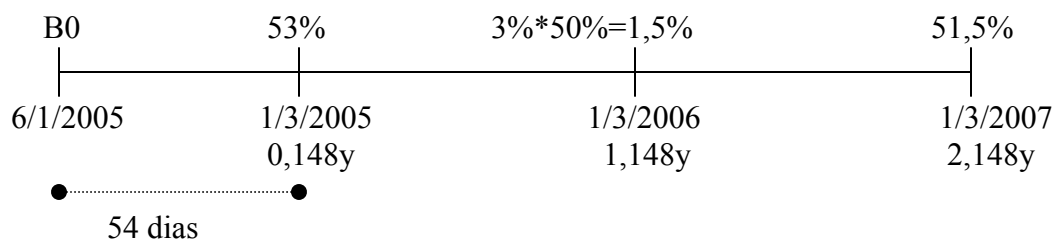
Prazos	3 meses	6 meses	1 ano	1.5 anos	2 anos
Taxas	2.00%	2.15%	2.25%	2.60%	2.75%

Nota: arredonde os períodos em anos e as estimativas percentuais à 3ª casa decimal.

- Uma obrigação do Tesouro português tem uma taxa de cupão de 3% (cupão anual na base de calendário 30/360) e vencimento em 01/03/2007. O reembolso será feito ao par, sendo metade reembolsado junto com o próximo cupão e a outra metade na maturidade. Sabendo que o número de dias de juros vencidos é 305 (base de calendário 30/360) e que a obrigação está cotada a 100.25%-100.35%, pretende-se que formule uma decisão de *trading*. (1.5v)
- Admita que um investidor adquiriu em 03/01/2005 a OT e que a estrutura temporal de taxas de juro (ETTJ) em 1/3/2005 reflecte, em relação às taxas *spot* da ETTJ actual, um choque multiplicativo de -100 b.p.. Estime a TRR efectiva anual (base de calendário ACT/ACT) obtida pelo investidor que vendeu a obrigação em 01/03/2005? (1.5v)
- As obrigações da empresa AMM receberam uma notação de *rating* BB (S&P), vencem no dia 1 de Setembro de 2005, e pagam uma taxa de cupão igual à Euribor a 3 meses acrescida de 50 *basis points* (cupão trimestral na base de calendário 30/360). O reembolso é ao par, faltando nesta data reembolsar apenas 60%. A taxa do próximo cupão é 2.5% e o *credit spread* de equilíbrio da classe de risco BB é 1% face às taxas de juro sem risco e 0.90% face às taxas interbancárias. Pretende-se que avalie esta obrigação. (2.0v) - Nota: esta alínea é independente da alínea b)

Resolução

a)



Calculo das taxas por extrapolação e interpolação linear:

- $r(0; 0,148) = 1,939\%$
- $r(0; 1,148) = 2,354\%$
- $r(0; 2,148) = 2,794\%$

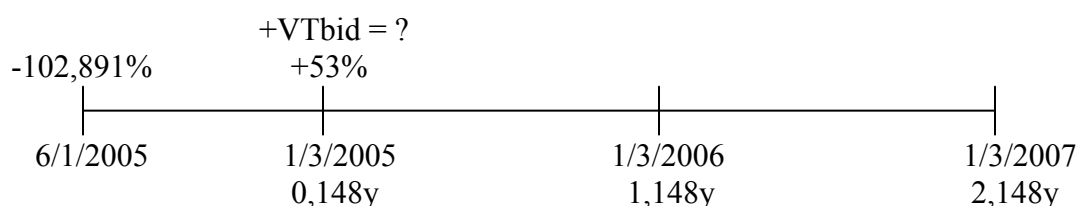
$$B0 = \frac{53\%}{(1+1,939\%)^{0,148}} + \frac{1,5\%}{(1+2,354\%)^{1,148}} + \frac{51,5\%}{(1+2,794\%)^{2,148}} = 102,85\%$$

$$AI = \frac{305}{360} \times 3\% = 2,541\%$$

	Bid	Ask
Vc	100,25%	100,35%
AI	2,541%	2,541%
VT	102,791%	102,891%

Logo, Não Vender e Não Comprar.

b)



O valor exacto de VTbid em 1/3/2005 não se sabe, todavia é possível calcular o Fair Value a vigorar nessa data, que é praticamente igual ao VTbid. Ou seja:

- $VTbid \approx B_{1/3/2005}$

Mas para podermos calcular esse Fair Value temos ainda que calcular as taxas às quais vamos actualizar os Cash Flows. Assim temos que:

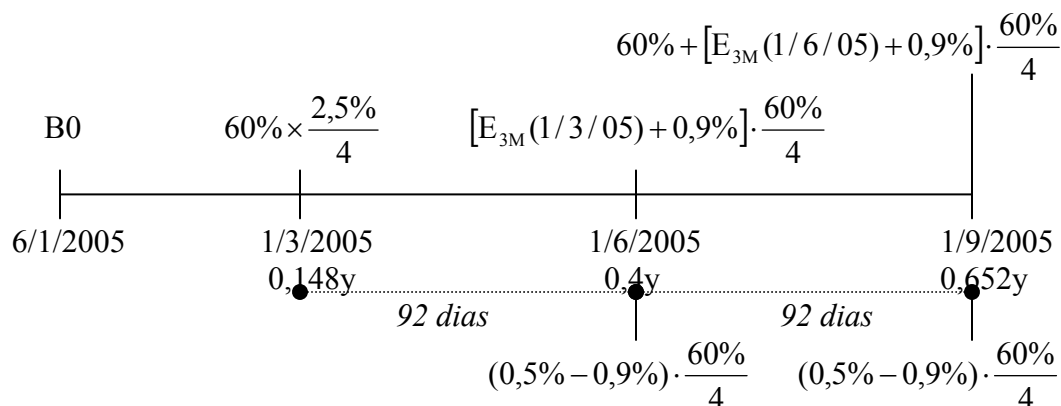
- $[1+r(0,148; 1,148)] = [1+r(0, 1)] \cdot [1-1\%] \Rightarrow r(0,148; 1,148) = 1,2275\%$
- $[1+r(0,148; 2,148)] = [1+r(0, 2)] \cdot [1-1\%] \Rightarrow r(0,148; 2,148) = 1,7225\%$

$$B_{1/3/2005} = \frac{1,5\%}{(1+1,2275\%)} + \frac{51,5\%}{(1+1,7225\%)^2} = 51,252\%$$

TRR:

$$102,891\%(1+TRR)^{0,148} = 51,252\% + 53\% \Leftrightarrow TRR = 9,292\%$$

c)



Calculo das Taxas de Spot sem risco por interpolação linear:

- $r(0; 0,4) = 2,09\%$
- $r(0; 0,652) = 2,18\%$

Actualizando os dois Cash Flows que está na parte superior do gráfico para a Next Coupon date (1/3/2005) sabemos que o seu valor actual é igual a 60%.

$$B0 = \frac{\left[60\% + \frac{60\% \times 2,5\%}{4} \right]}{\left[1 + 1,939\% + 1\% \right]^{0,148}} + \frac{(0,5\% - 0,9\%) \cdot \frac{60\%}{4}}{\left[1 + 2,09\% + 1\% \right]^{0,4}} + \frac{(0,5\% - 0,9\%) \cdot \frac{60\%}{4}}{\left[1 + 2,18\% + 1\% \right]^{0,652}} =$$

$$= 60\% \times 100,076\% = 60,0459\%$$

Para a resposta estar totalmente correcta devia-se responder que o B0 era igual 100,076%, pois no momento zero já recebi 40% do Valor Nominal e o mercado obrigacionista cota as obrigações na percentagem do Valor Nominal que falta receber (e não na percentagem do Valor Nominal inicial).

CASO 3 (7 valores)

- a) Considere a seguinte informação relativa a 2 activos, X e Y.

	X	Y
$E(r_i)$	16%	8%
σ_i	24%	?
$\sigma_{X,Y}$	1.2%	
$\rho_{X,Y}$	0.5	

A *portfolio frontier* de Markowitz, construída com base em todos os activos do mercado (entre os quais os activos X e Y), é dada pela seguinte equação:

$$\sigma_p^2 = 4E(r_p)^2 - 0.5E(r_p) + 0.02$$

Analise a eficiência de uma carteira composta por 25% X e 75% Y, identificando o ganho máximo em termos de risco que se pode obter com o investimento numa carteira eficiente com a mesma rentabilidade esperada. (2.0v)

- b) Calcule os valores em falta no quadros abaixo. Escolha, justificando, as melhores carteiras do ponto de vista de um investidor que pretende juntar estas carteiras: (i) a uma carteira diversificada; (ii) a uma carteira não diversificada. (2.5v)

	A	B	C
$E(r_i)$	20.05%	12.5%	5%
σ_i	31%	22%	6%
β_i	1.5	0.75	0.15
σ_{ε_i}	7.810%	16.094%	?
Índice de Sharpe (SI)	0.55	0.4318	0.3333
Índice de Treynor (TI)	0.11367	?	0.13333
Alfa Jensen (α)	-0.95%	0.50%	?
Appraisal Ratio (AR)	-12.164%	3.107%	3.849%

$E(r_M)$	?
r_f	?

- c) A carteira A, situada sobre a *Capital Market Line*, tem $E(r_A)=11\%$ e $\beta_A=0.4$. Considerando que a equação da *Capital Market Line* é dada por:

$$E^{CML}(r_p) = 0.05 + 0.6\sigma_p$$

CASO 4 (5 valores)

A empresa CBS, fez as seguintes projecções.

(valores em EUR)	Ano1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
EPS (Resultado Líquido por acção)	4,00	4,25	4,45	4,65

Os accionistas dispõem, hoje (ano zero), da seguinte informação adicional:

Prémio de risco das acções	7%
Parâmetro beta das acções CBS	1,4
Taxa de distribuição de dividendos (constante)	25%
Taxa de juro sem risco	3%
Capital Social	500.000 acções
Valor Nominal das acções	5 euros / acção
Cotação das acções	20, 82 euros / acção

Pretende-se que:

- a) Determine a taxa de crescimento considerada a partir do ano 4 que permite avaliar uma acção CBS (1.5v)
- b) Estime o VAOC (valor actual líquido das oportunidades de crescimento). (1.0v)
- c) Admita que o investidor espera um PER de mercado igual a 8 daqui a dois anos. Que decisão de *trading* deverá o investidor formular hoje, considerando um horizonte temporal de investimento de 2 anos? (1.0v)
- d) Admitindo que a empresa pretende aumentar o seu capital social para 2.500.000 acções , por via de: (1) emissão de 250.000 acções através da incorporação de reservas; (2) emissão de acções reservadas aos actuais accionistas; (3) emissão de acções para o publico em geral. Sabendo que o preço de equilíbrio para as acções a emitir ao público é de 10.82 euros /acção, calcule o valor teórico dos direitos de subscrição. (1.5v)