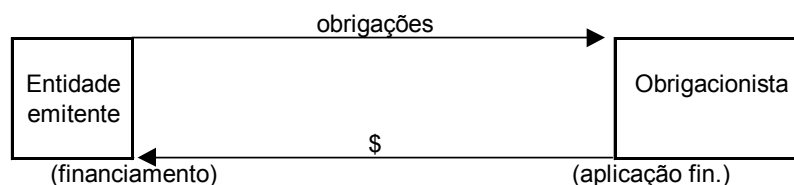


Cap. I – ANÁLISE E AVALIAÇÃO DE OBRIGAÇÕES

1. Conceitos básicos

1.1. Definição

Uma obrigação é um título de crédito representativo de uma fracção de um empréstimo obrigacionista.



1.2. Terminologia

- Valor nominal (Vn): capital titulado pela obrigação, i.e. base de cálculo dos juros (valor facial inscrito no título de dívida).

Exemplo: as obrigações admitidas à cotação na BVL (mercado secundário) são cotadas em percentagem do par, ou seja $Vn = 100\%$.

- Valor de subscrição (Vs): valor pelo qual a obrigação é emitida (em mercado primário).

↓

3 situações são possíveis:

- $Vs > Vn \Rightarrow$ emissão acima do par;
- $Vs = Vn \Rightarrow$ emissão ao par (regra geral);
- $Vs < Vn \Rightarrow$ emissão abaixo do par.

Prémio de emissão = $Vs - Vn$

- Valor de cotação (Vc): preço da obrigação em bolsa.
- Valor de transacção (VT): preço ao qual a obrigação é efectivamente transaccionada em mercado secundário:

$$VT = Vc + \text{Juros vencidos (AI)}$$

Na data de transacção, o comprador tem de pagar ao vendedor o valor correspondente aos juros já vencidos (*accrued interest*) associados ao cupão corrente visto ir receber, na data de vencimento do cupão, a totalidade do valor do cupão. I.e. o vendedor tem de ser remunerado pelo período do cupão corrente durante o qual manteve a obrigação em carteira.

Exemplo

OT 4.8125% 23/04/2003

Vc (30/06/99; 4ª-feira) = 103.23% (cotação de fecho); $VT = ?$

Para o cálculo do número de dias de juros vencidos na BVL:

- i) Utiliza-se a base de calendário actual/actual;¹
- ii) Há que considerar 3 dias úteis de desfaseamento entre as datas de transacção (*trade date*) e de liquidação (*settlement date*).

Settlement date: 30/06/99 + 5 dias = 05/07/99.

Nº dias de calendário entre 23/04/99 e 05/07/99:

73 dias

Nº dias de calendário entre 23/04/99 e 23/04/00:

366 dias

$$AI = 4.8125\% \times 73/366 = 0.9599\%$$

$$VT = 103.23\% + 0.9599\% = 104.1899\%$$

- Valor de reembolso (Vr): capital restituído ao obrigacionista por cada obrigação detida em carteira; i.e. Vn mais ou menos um determinado Prémio de Reembolso ($Vr - Vn$, regra geral igual a zero).

O reembolso pode ser efectuado:

- i) No vencimento da obrigação, i.e. *bullet* (regra geral);
- ii) Periodicamente (regra geral, por dedução ao valor nominal);
- iii) Nunca (obrigações perpétuas).

- Taxa do cupão (j): taxa (nominal anual) à qual a obrigação vence juros.

↓

Pode ser:

- i) Taxa fixa: a taxa de cupão é fixada para toda a maturidade da obrigação (Exemplo: OTs). Consequentemente, é possível, a priori, determinar todos os *cash flows* futuros a gerar pela obrigação. Todavia, tal não significa que um investimento em obrigações de taxa fixa não esteja exposto ao risco de taxa de juro: caso se pretenda vender a obrigação antes do seu vencimento, o preço de venda a obter irá depender da evolução das taxas de juro; e, mesmo que a obrigação seja mantida em carteira até ao vencimento, a taxa de rentabilidade de tal investimento irá depender das taxas de juro às quais serão reinvestidos os *cash flows* vindos.
- ii) Taxa variável: a taxa de cupão é igual ao valor de um indexante (geralmente, calculado no início do período do cupão) acrescido ou deduzido de um dado *spread* (Exemplo: Euribor a 3 meses – 0.10%). De forma a minimizar o impacto da evolução das taxas de juro sobre o preço da obrigação, o indexante de referência é normalmente definido com um prazo igual à periodicidade do cupão e com um nível de risco adequado ao perfil de risco do emitente (ajustado pelo *spread*).

A periodicidade do cupão varia de obrigação para obrigação. Em Portugal, o cupão é geralmente semestral (por exemplo, OTRVs – Obrigações do Tesouro de Rendimento Variável) ou anual (para a generalidade das OTs).

¹ Excepção feita às obrigações que ainda não tenham pago qualquer cupão durante 1999. Para estas obrigações, e até ao vencimento do primeiro cupão de 1999, continua-se a utilizar a base de calendário 30/360.

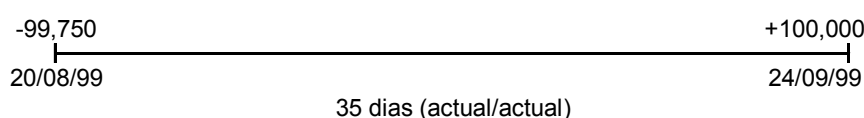
➤ Relativamente à forma de cálculo do cupão, as obrigações podem ser classificadas em:

- i) Obrigações clássicas (a maioria): pagam juros periodicamente.
- ii) Obrigações de cupão zero: não vencem juros; são transaccionadas abaixo do par, constituindo a diferença para o valor nominal (par) o rendimento gerado pela obrigação.

Exemplo

Admita comprar, com data *spot* de 20/08/99, BTs (Bilhetes do Tesouro) com um valor nominal de 100,000 contos, com vencimento em 24/09/99 e a uma cotação de 99.75%.

Preço de aquisição: $100,000 \times 99.75\% = 99,750$ contos.



Taxa de rendibilidade (*yield-to-maturity*) obtida caso o BT seja mantido em carteira até ao vencimento = y :

$$99.75\% = \frac{100\%}{(1+y)^{35/365}} \Leftrightarrow y = \left(\frac{100\%}{99.75\%} \right)^{365/35} - 1 \cong 2.645\%$$

(taxa efectiva anual)

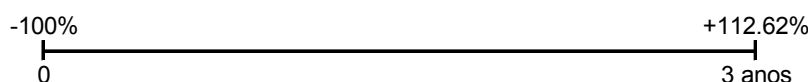
- iii) Obrigações de capitalização automática: vencem juros periodicamente, os quais são capitalizados e somente liquidados no vencimento da obrigação (juntamente com o valor nominal).

Exemplo

Admita comprar ao par uma obrigação de capitalização automática com vencimento a 3 anos e com um cupão semestral de 4% (taxa nominal anual).

Tal investimento envolve somente 2 *cash flows*: um *cash out flow* de 100% no momento 0; e, um *cash in flow*, daqui a 3 anos, igual a

$$100\% \times \left(1 + \frac{4\%}{2} \right)^{3 \times 2} \cong 112.62\%.$$



➤ Relativamente aos direitos atribuídos aos obrigacionistas, as obrigações podem-se classificar em:

- i) Obrigações clássicas (a maioria): apenas conferem direito ao recebimento de juros e à amortização de capital (com eventuais prémios de reembolso).

- ii) Obrigações com *warrant*: conferem também direito a comprar uma ou mais acções da sociedade emitente a um preço pré-estabelecido, e numa ou mais datas convencionadas.

Exemplo

Considere uma obrigação com vencimento daqui a 4 anos, com um valor nominal de 100 euros e com um cupão anual de 3%, a qual confere o direito de comprar, no vencimento, 2 acções da sociedade emitente a 25 euros cada.

O direito de compra de acções corresponde ao *warrant* incluso na obrigação. Tal direito só será exercido pelo obrigacionista, daqui a 4 anos, se nessa data cada acção estiver cotada a mais de 25 euros. Se, por exemplo, as acções estiverem cotadas, daqui a 4 anos, a 26 euros, então registar-se-ão os seguintes fluxos financeiros (no vencimento da obrigação e na óptica do obrigacionista):

- a) Recebimento do valor nominal mais último cupão, i.e. 103 euros; e
- b) Exercício do *warrant*, ou seja, pagamento de $2 \times 25 = 50$ euros e recebimento de 2 acções (as quais podem ser vendidas em mercado por 26 euros cada, gerando um ganho de 2 euros).

Os *warrant* podem também ser transaccionados separadamente da obrigação.

Cada *warrant* corresponde a uma opção de compra sobre acções da entidade emitente (e geralmente de tipo Europeu).

Todavia, o valor da correspondente opção de compra tem de ser corrigido pelo denominado “efeito de diluição”, pois o eventual exercício dos *warrant* implica o aumento do número de acções em circulação...

- iii) Obrigações convertíveis: conferem também o direito a trocar a obrigação por uma ou mais acções da sociedade emitente, numa ou em mais datas previamente estabelecidas.

Exemplo

Considere uma obrigação com vencimento daqui a 4 anos, com um valor nominal de 100 euros e com um cupão anual de 3%, a qual confere o direito de trocar, no vencimento, uma obrigação por 4 acções da sociedade emitente (“direito de conversão”).

Tal direito de conversão só deverá ser exercido se, daqui a 4 anos, cada acção estiver cotada a mais de $100/4 = 25$ euros. Por exemplo, se as acções estiverem cotadas, daqui a 4 anos, a 26 euros, então o direito de conversão deverá ser exercido e registar-se-ão os seguintes fluxos financeiros (no vencimento da obrigação e na óptica do obrigacionista):

- a) Recebimento do último cupão: 3 euros; e
- b) Exercício do direito de conversão: não recebimento do valor nominal de 100 euros contra a obtenção de 4 acções (as quais podem ser vendidas em mercado por um valor superior e igual a $4 \times 26 = 104$ euros).

Novamente, o direito de conversão traduz-se numa opção de compra (geralmente de tipo Europeu) sobre as acções da sociedade emitente e também sujeita ao “efeito de diluição”.

- iv) Obrigações com cláusula de resgate antecipado a favor do obrigacionista: conferem também o direito de o obrigacionista exigir o reembolso da obrigação antes do vencimento (embora, geralmente, a um valor inferior ao par).

Numa conjuntura de subida de taxas de juro, o obrigacionista pode ter interesse em exercer tal direito, o qual não é mais do que uma opção de venda (*put option*) detida pelo obrigacionista sobre a obrigação.

- v) Obrigações com cláusula de resgate antecipado a favor da sociedade emitente: conferem à sociedade emitente o direito de proceder ao reembolso da obrigação antes do vencimento (embora, geralmente, a um valor superior ao par).

Numa conjuntura de descida de taxas de juro, a sociedade emitente pode ter interesse em exercer tal direito, o qual não é mais do que uma opção de compra (*call option*) detida pela sociedade emitente sobre a obrigação.

➤ Dívida pública *versus* privada

Atendendo ao emitente, as obrigações podem ser classificadas como sendo:

- i) Títulos de dívida pública: tratam-se de obrigações emitidas pelo Estado e portanto sem risco de incumprimento (uma vez que para o Estado é sempre possível financiar a dívida via criação de impostos ou emissão de moeda).
- ii) Títulos de dívida diversa: obrigações emitidas por empresas.

A análise subsequente centrar-se-á sobre a avaliação de obrigações emitidas pelo Estado (a taxa fixa – OT- ou a taxa variável –OTRV).

Numa segunda fase proceder-se-á à avaliação do risco de crédito associado à dívida privada.

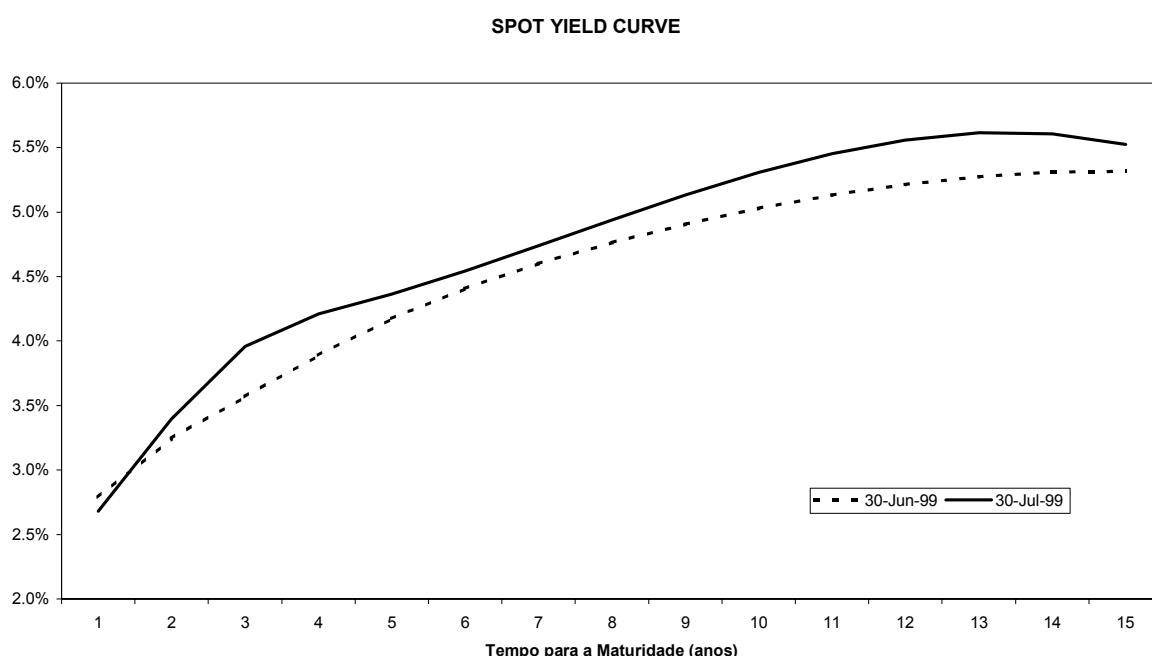
➤ Outras classificações:

- Obrigações de caixa: só podem ser emitidas por instituições financeiras.
- Obrigações garantidas: conferem ao obrigacionista o direito a uma determinada fracção da propriedade da entidade emitente em caso de incumprimento desta última.

2. Estrutura temporal de taxas de juro

2.1. Definição

- A estrutura temporal de taxas de juro (ETTJ) consiste num conjunto de taxas de juro¹ em vigor para investimentos de diferentes maturidades (e sem *cash flows* intermédios), mas pertencentes à mesma classe de risco.
- Não existe uma única mas sim várias ETTJ: uma para cada classe de risco. Por exemplo, existe uma ETTJ implícita aos preços de mercado das obrigações do Tesouro e outra ETTJ associada aos instrumentos transaccionados em mercado interbancário (depósitos, FRAs, IRSs, ...).
- A “*yield curve*” é simplesmente a representação gráfica da ETTJ. Por exemplo,



- A ETTJ não é directamente observável: tem de ser estimada (inferida) com base nas cotações observadas em mercado para activos financeiros dependentes da evolução das taxas de juro (“*interest rate contingent claims*”) e pertencentes a idêntica classe de risco (por exemplo, preços de mercado de OT de taxa fixa).
- Geralmente utilizam-se os preços de obrigações do Tesouro - títulos com risco de crédito nulo, isto é, a probabilidade de ocorrência do estado da natureza no qual o desvio dos *cash flows* gerados face aos prometidos é zero.

↓

Vantagens:

- a) não depende de percepção subjectiva do risco;
- b) liquidez elevada do mercado de dívida pública.

¹ Normalmente apresentadas com capitalização anual.

- É essencial conhecer (estimar) a ETTJ: nomeadamente, para avaliar *interest rate contingent claims* (tais como obrigações, futuros e opções sobre taxas de juro, etc.), para gerir o risco de taxa de juro associado a carteiras de activos, para formular expectativas de evolução de variáveis macroeconómicas (tal como a taxa de inflação), etc.
- A ETTJ pode ser descrita de 3 formas exactamente equivalentes: via taxas *spot*, via taxas *forward* ou via factores de desconto. Mas nunca via *yields-to-maturity*.

2.2. Taxas de juro *spot*

- A taxa *spot* a $T(>0)$ anos, $r(0, T)$, é a taxa de juro em vigor hoje (momento 0) na economia para um investimento com início imediato e com um único *cash flow* futuro no momento T .
- A taxa *spot* é também designada por *zero-coupon yield* na medida em que corresponde à taxa de rendibilidade gerada por uma obrigação de cupão zero (*zero-coupon bond*) com vencimento no momento T :¹

$$P(0, T) = \frac{1}{[1 + r(0, T)]^T},$$

onde $P(0, T)$ designa o preço hoje (momento 0) de uma *pure discount bond* (PDB) com vencimento no momento T e com valor nominal unitário. De forma equivalente,

$$r(0, T) = \left[\frac{1}{P(0, T)} \right]^{\frac{1}{T}} - 1.$$

- Note que seria extremamente fácil estimar a ETTJ *spot* caso fosse possível observar em mercado preços de PDBs (por exemplo, Bilhetes do Tesouro) para diversas maturidades...

2.3. Taxas de juro *forward*

- Uma taxa *forward* é uma taxa de juro, esperada hoje, para vigorar numa data futura e por um determinado período de tempo.
- Em termos formais, a taxa *forward*, esperada no momento 0, para vigorar entre os momentos $t(>0)$ e $T(>t)$ é definida por $f(0, t, T)$ e é calculada com base nas taxas *spot* em vigor no momento 0:

$$[1 + r(0, t)]^t [1 + f(0, t, T)]^{(T-t)} = [1 + r(0, T)]^T$$

ou seja,

$$f(0, t, T) = \sqrt[(T-t)]{\frac{[1 + r(0, T)]^T}{[1 + r(0, t)]^t}} - 1.$$

¹ Assumindo capitalização anual.

- A taxa *forward* $f(0, t, T)$ é a taxa de rendimento futura por $(T-t)$ períodos que torna indiferente as seguintes estratégias de investimento:
 - a) um investimento hoje por t períodos renovado no momento t à taxa *forward* por mais $(T-t)$ períodos; ou
 - b) um investimento hoje por T períodos.

2.4. Factores de desconto

- O factor de desconto para a maturidade T , $\delta(T)$, corresponde ao valor actual de uma unidade monetária vencível no momento T . Isto é, corresponde ao preço de uma PDB com vencimento no momento T e com valor nominal unitário:

$$\delta(T) = P(0, T).$$

2.5. Teorias explicativas da estrutura temporal de taxas de juro

- As teorias explicativas da estrutura temporal de taxas de juro procuram explicar a coexistência de diferentes taxas de juro para diferentes tempos para a maturidade (no âmbito de idêntica classe de risco).

i) Teoria das expectativas racionais puras

- Sustenta que as taxas *forward* implícitas igualam as taxas *spot* esperadas, ou seja, que não existem prémios nas taxas de juro.

ii) Teoria da preferência por liquidez

- A teoria da preferência por liquidez defende que as taxas *forward* implícitas excedem as taxas *spot* esperadas por um prémio de liquidez.
- O prémio de liquidez é positivo e crescente com o tempo para a maturidade, visando remunerar os investidores do risco de taxa de juro (risco de preço) a que estão sujeitos em investimentos com tempos para a maturidade maiores.

iii) Teoria da segmentação

- Introduce a possibilidade de o prémio de liquidez poder assumir sinal positivo ou negativo, pois o que é relevante para o investidor são as suas preferências particulares em termos de tempos para a maturidade e não o maior ou menor tempo que falta para a obrigação atingir a maturidade.
- Os preços das obrigações para diferentes tempos para a maturidade são determinados pelas preferências de investidores, que são heterogêneas no que respeita a tempos para a maturidade, não existindo uma relação sistemática entre taxas *forward* implícitas e as taxas *spot* esperadas.
- A principal implicação desta teoria é que obrigações para diferentes tempos para a maturidade são transaccionadas em segmentos de mercado distintos.

iv) Teoria do habitat preferido

- Parte do mesmo princípio que a teoria da segmentação: os investidores tem preferências particulares em termos de tempos de para a maturidade (habitat preferido), mas introduz a possibilidade dos investidores abandonarem o seu habitat preferido em busca de remunerações mais altas.
- Em termos das respectivas implicações, a teoria da preferência por liquidez pode ser considerada como um caso particular da teoria do habitat preferido em que todos os investidores tem por habitat preferido os tempos para a maturidade mais curtos.

3. Avaliação de obrigações a taxa fixa

- Seguidamente apresenta-se a fórmula geral de avaliação de obrigações a taxa fixa. A avaliação de obrigações a taxa variável será objecto de análise posterior.
- Na análise subsequente assume-se o conhecimento da ETTJ (estrutura temporal de taxas de juro). Os métodos de estimação da ETTJ serão objecto de análise posterior.
- O preço de equilíbrio de uma obrigação, $B(0)$, corresponde ao somatório do valor actual dos seus *cash flows* futuros:

$$B(0) = \sum_{j=1}^n \frac{CF_j}{[1 + r(0, t_j)]^{t_j}}$$

sendo

$CF_j \equiv$ *cash flow* a gerar pela obrigação no momento t_j ($j = 1, \dots, n$); e

$r(0, t_j) \equiv$ taxa *spot* a t_j anos.

- A decisão de compra ou venda da obrigação pode então ser formulada mediante a comparação do seu valor de equilíbrio, $B(0)$, com o respectivo preço de mercado – V_s , em mercado primário, ou V_T , em mercado secundário:

Se $B(0) > V_s, V_T \Rightarrow$ Comprar

Se $B(0) < V_s, V_T \Rightarrow$ Vender

- Note que uma obrigação com cupões é avaliada como sendo uma carteira de *pure discount bonds*:

$$B(0) = \sum_{j=1}^n CF_j P(0, t_j).$$

Exemplo

Objectivo: avaliar a obrigação OT 4.8125% 23/04/2003

Assuma ter estimado as seguintes taxas de juro *spot* à data de 30/06/99 (*settlement date* = 05/07/99):

Data	t_j	$r(0, t_j)$
23/04/00	0.802739726	2.631%
23/04/01	1.802739726	3.175%
23/04/02	2.802739726	3.507%
23/04/03	3.802739726	3.828%

O preço de equilíbrio da OT é então igual a:

$$\begin{aligned}
B(0) &= \frac{4.8125\%}{(1.02631)^{0.802740}} + \frac{4.8125\%}{(1.03175)^{1.802740}} + \frac{4.8125\%}{(1.03507)^{2.802740}} \\
&\quad + \frac{104.8125\%}{(1.03828)^{3.802740}} \\
&\cong 104.49\% > VT = 104.19\%
\end{aligned}$$

Portanto, o investimento na OT em análise revela-se atractivo.

➤ **Fiscalidade:**

O exemplo anterior considera a avaliação de uma obrigação ignorando efeitos fiscais.

A avaliação de uma obrigação pode (deve) ser efectuada atendendo ao regime fiscal do investidor. Para o efeito, há apenas que considerar a fórmula de avaliação anterior com as seguintes modificações:

- Por um lado, os *cash flows* CF_j vêm liquidos de impostos;
- Por outro lado, as taxas de actualização $r(0, t_j)$ deverão ser estimadas utilizando idêntico regime fiscal...

4. Medidas de rentabilidade

4.1. *Yield-to-maturity*

- A *yield-to-maturity* de uma obrigação é a taxa de actualização (*flat*) para a qual o valor actual dos *cash flows* futuros vem igual ao preço de mercado (*invoice or gross price*). Ou seja, a *yield-to-maturity* pretende traduzir a taxa de rentabilidade associada ao investimento na obrigação, pressupondo a sua manutenção em carteira até à respectiva data de vencimento.
- Em termos formais, a *yield-to-maturity* de uma obrigação com vencimento no momento t_n , com um preço de mercado VT_0 e que gera *cash flows* CF_j nos momentos t_j ($j=1, \dots, n$), é dada pela taxa y_{t_n} tal que:

$$-VT_0 + \sum_{j=1}^n \frac{CF_j}{(1 + y_{t_n})^{t_j}} = 0$$

Exemplo

Objectivo: Calcular a *yield-to-maturity* da OT 4.8125% 23/04/2003

Designando a *yield-to-maturity* desta OT por y ,

$$y: 104.19\% = \frac{4.8125\%}{(1+y)^{0.802740}} + \frac{4.8125\%}{(1+y)^{1.802740}} + \frac{4.8125\%}{(1+y)^{2.802740}} + \frac{104.8125\%}{(1+y)^{3.802740}}$$

$$\Rightarrow y \cong 3.8754\%$$

- A *yield-to-maturity* tenta traduzir a taxa de rendibilidade gerada pela obrigação, o que só é verdade caso duas condições (improváveis) sejam verificadas: a) manutenção da obrigação em carteira até ao vencimento; e b) reinvestimento de todos os *cash flows* vencidos à mesma taxa y_{t_n} .
- A abordagem da *yield-to-maturity* só é consistente com a equação geral de avaliação de obrigações caso se verifique, pelo menos uma das duas condições seguintes:
 - a) A estrutura temporal de taxas de juro é *flat* ($r(0, t_1) = r(0, t_2) = \dots = r(0, t_n)$), pois para este perfil particular temos que $y_t = r(0, t)$ para $\forall t$; ou
 - b) Utilizarmos na construção da *yield-to-maturity curve* apenas obrigações de cupão zero, pois neste caso temos que $y_t = r(0, t)$ para $\forall t$.
- O conceito de *yield-to-maturity* não pode ser utilizado para definir a ETTJ, por duas razões:
 - a) Tal conceito envolve o “risco de reinvestimento” de *cash flows* intermédios; e
 - b) Trata-se de um conceito ambíguo, na medida em que duas obrigações com igual maturidade e com idêntico nível de risco podem patentear diferentes *yields-to-maturity*.

- Risco de reinvestimento:

O problema de utilizar a *yield-to-maturity* de obrigações com cupão reside no facto desta assumir que os *cash flows* intermédios são reinvestidos a uma taxa idêntica à própria *yield to maturity*

↓

só é verdade quando a estrutura temporal é *flat*;

as obrigações de cupão zero ultrapassam este problema porque não são necessários efectuar reinvestimentos.

Exemplo

Retomemos o exemplo anterior e calculemos a taxa de efectivamente rentabilidade gerada pela obrigação assumindo dois cenários distintos de reinvestimento dos *cash flows* intemédios:

Hipótese A) Taxa de reinvestimento = 3.8754%

Neste cenário, o valor acumulado de todos os *cash flows* pagos pela obrigação, na sua data de vencimento, é igual a

$$4.8125\% \times [(1.038754)^3 + (1.038754)^2 + (1.038754)] + 104.8125\% \cong 120.3982\%.$$

Portanto, a taxa de rentabilidade gerada para este investimento a 3.802740 anos (e designada por “TRR”) é dada por:

$$\text{TRR} : 104.19\% \times (1 + \text{TRR})^{3.802740} = 120.3982\% \Leftrightarrow \text{TRR} = \left(\frac{120.3982\%}{104.19\%} \right)^{\frac{1}{3.802740}} - 1 \cong 3.8754\%$$

Tal como esperado, obtém-se a própria *yield-to-maturity*.

Hipótese B) Taxa de reinvestimento = 3% (<3.8754%)

Neste cenário, o valor acumulado de todos os *cash flows* pagos pela obrigação, na sua data de vencimento, é igual a

$$4.8125\% \times [(1.03)^3 + (1.03)^2 + (1.03)] + 104.8125\% \cong 120.1337\%.$$

Portanto, a taxa de rentabilidade gerada para este investimento a 3.802740 anos (e designada por “TRR”) é dada por:

$$\text{TRR} : 104.19\% \times (1 + \text{TRR})^{3.802740} = 120.1337\% \Leftrightarrow \text{TRR} = \left(\frac{120.1337\%}{104.19\%} \right)^{\frac{1}{3.802740}} - 1 \cong 3.8154\% < 3.8754\%$$

Conforme esperado, obtém-se uma rentabilidade inferior à *yield-to-maturity* visto a taxa de reinvestimento ser também mais baixa.

- A *yield to maturity curve* não está isenta de ambiguidade, visto que, o valor da *yield* depende do valor da taxa do cupão da obrigação.

Exemplo

Consideremos as duas obrigações descritas no quadro seguinte e pertencentes a idêntica classe de risco:

	Obrigação A	Obrigação B
Maturidade	2 anos	2 anos
Taxa de cupão	7%	4%
Periodicidade do cupão	anual	anual
Reembolso	<i>bullet</i>	<i>bullet</i>

Admita que a actual estrutura temporal de taxas de juro *spot*, para a classe de risco em análise, é dada por:

Prazos	0.5 anos	1 ano	1.5 anos	2 anos
Taxas	3%	3.5%	4%	4.25%

Nota: Taxas de juro efectivas anuais.

O preço de equilíbrio das obrigações, em percentagem do par, é dado por:

$$B_A(0) = \frac{7\%}{1.035} + \frac{107\%}{(1.0425)^2} \cong 105.22\%$$

$$B_B(0) = \frac{4\%}{1.035} + \frac{104\%}{(1.0425)^2} \cong 99.56\%$$

Assumindo que ambas as obrigações estão actualmente cotadas a preços de equilíbrio, as respectivas *yields-to-maturity* são iguais a:

$$y_A : \frac{7\%}{1 + y_A} + \frac{107\%}{(1 + y_A)^2} = 105.22\% \Leftrightarrow y_A \cong 4.2235\%$$

$$y_B : \frac{4\%}{1 + y_B} + \frac{104\%}{(1 + y_B)^2} = 99.56\% \Leftrightarrow y_B \cong 4.2341\%$$

Portanto, não obstante as duas obrigações possuírem idêntica maturidade e pertencerem a igual classe de risco, as diferenças de cupão conduzem a diferentes *yields*...

4.2. Taxa de Rendimento Realizado (TRR)

- A TRR de uma obrigação corresponde à taxa de rendibilidade efectiva (anual) gerada (a posteriori) pelo investimento nessa mesma obrigação.
- Em termos formais, a taxa de rendimento realizada por uma obrigação ao fim de “k” períodos (TRR_k) é dada pela solução da seguinte equação:

$$VT_0 \times (1 + TRR_k)^t = CF_k + \sum_{j=1}^{k-1} CF_j \times [1 + TR(t_j, t_k)]^{t_k - t_j}$$

onde VT_0 designa o valor investido inicialmente na obrigação e $TR(t_j, t_k)$ representa a taxa de reinvestimento do j-ésimo *cash flow* até ao período “k”.

<i>Exemplo</i>

Retomemos o exemplo da OT 4.8125% 23/04/2003

Estimemos a TRR gerada pela obrigação em 23/04/2003, assumindo que conseguimos reinvestir os *cash flows* futuros à taxa de 3.5%.

$$\begin{aligned} TRR : & 104.19\%(1 + TRR)^{3.802740} \\ & = 4.8125\% \times [(1.035)^3 + (1.035)^2 + 1.035] + 104.8125\% \\ \Rightarrow & TRR \cong 3.8496\% \end{aligned}$$

Neste caso, $TRR < YTM$ pois assume-se uma taxa de reinvestimento inferior à YTM.

5. Estimação da estrutura temporal de taxas de juro

5.1. Motivação

Regra geral, e excepto para as taxas de juro interbancárias (para maturidades até 1 ano), as taxas de juro *spot* não são directamente observáveis.

Ao invés, o que se observa em mercado são os preços de activos financeiros cujo valor depende dessas mesmas taxas de juro (denominados por *interest rate contingent claims*).

Consequentemente, é necessário estimar/inferir as taxas de juro *spot* com base nos preços observados em mercado.

Por razões de liquidez, os activos financeiros mais utilizados para estimar as taxas *spot* são os preços das obrigações do Tesouro (a taxa fixa). Ou seja, regra geral, começa-se por estimar a estrutura temporal de taxas de juro sem risco. Para obter a *spot yield curve* para outras classes de risco, adicionam-se *credit spreads*...

Existem vários métodos para extrair taxas de juro *spot* a partir dos preços de obrigações. O quesito seguinte ilustra um desses métodos.

5.2. Método de *bootstrap*

- O método *bootstrap* considera uma amostra de obrigações, de tal modo que exista, idealmente, para cada data de geração de *cash flows* uma obrigação que atinja a maturidade¹.
- Os factores de desconto podem ser obtidos através de um procedimento iterativo:
 1. calculamos $\delta(1)$ utilizando a obrigação com tempo para a maturidade de um período;
 2. na equação de avaliação da obrigação com tempo para a maturidade no segundo período substituímos $\delta(1)$ pelo valor obtido anteriormente e calculamos $\delta(2)$;
 3. na equação de avaliação da obrigação com tempo para a maturidade no terceiro período substituímos $\delta(1)$ e $\delta(2)$ pelos valores obtidos anteriormente e calculamos $\delta(3)$;
 4. e assim sucessivamente para os tempos para a maturidade seguintes.
- Quando não é possível utilizar uma obrigação com maturidade exactamente igual ao próximo período de tempo, torna-se necessário proceder a uma interpolação linear de taxas de juro.

¹ Se existir mais do que uma obrigação a atingir no mesmo momento a maturidade pode-se considerar, por exemplo, a média dos factores de desconto dessas obrigações.

<i>Exemplo</i>

Considerem-se os dados que constam do quadro seguinte relativos a uma amostra de bilhetes do Tesouro (BT) e obrigações do Tesouro (OT).

Todos os títulos têm valor nominal de 100%¹ e pagamento do anualmente, com excepção dos BT que não pagam cupão.

Título	Tempo para maturidade (anos)	Taxa do cupão (%)	Valor de cotação
BT3	0.25	0	99.26%
BT6	0.50	0	98.44%
BT12	1.00	0	96.39%
OT-A	1.50	7%	104.28%
OT-B	2.00	6%	103.32%
OT-C	4.00	5%	100.19%

Na determinação das taxas *spot* considera-se como convenção um regime de capitalização anual² e uma base de calendário Actual/Actual.

- Os preços dos BT's permitem calcular directamente as taxas *spot* a 0.25 anos, 0.5 anos e 1 ano, igualando o preço ao valor actualizado dos *cash flows* (apenas o valor nominal na maturidade):

$$99.26\% = \frac{100\%}{(1 + r(0,0.25))^{0.25}} \Leftrightarrow r(0,0.25) = 3\% \Rightarrow \delta(0.25) = 0.9926$$

$$98.44\% = \frac{100\%}{(1 + r(0,0.5))^{0.5}} \Leftrightarrow r(0,0.5) = 3.2\% \Rightarrow \delta(0.5) = 0.9844$$

$$96.39\% = \frac{100\%}{(1 + r(0,1))^1} \Leftrightarrow r(0,1) = 3.75\% \Rightarrow \delta(1) = 0.9639$$

- Para os restantes tempos para a maturidade as taxas *spot* não são observáveis directamente, pois apenas dispomos de obrigações com cupão. Vamos começar pela obrigação com tempo para a maturidade mais curto e sucessivamente por ordem crescente de tempo para a maturidade, igualando o valor de transacção ao valor actualizado dos *cash flows*.
- Para a obrigação com tempo para a maturidade de 1.5 anos já conhecemos o factor de desconto para o *cash flow* a 0.5 anos e sabemos que o valor de transacção (104.28%+7%/2) tem que igualar o valor actualizado dos *cash flows*:

$$107.78\% = 7\% \cdot \delta(0.5) + 107\% \cdot \delta(1.5) \quad \Leftrightarrow 107.78\% = 7\% \times 0.9844 + 107\% \cdot \delta(1.5)$$

¹ Ou seja, são cotados em percentagem do par.

² No mercado obrigacionista europeu (com a excepção do inglês) a convenção é de taxas com capitalização anual, enquanto que nos mercados obrigacionistas norte-americano, inglês e japonês a convenção é de taxas com capitalização semi-anual.

$$\Leftrightarrow \delta(1.5) = 0.9429 \Rightarrow r(0,1.5) = \left(\frac{1}{0.9429}\right)^{1/1.5} - 1 \cong 4\%$$

- Para a obrigação a 2 anos o procedimento é idêntico,

$$103.32\% = 6\% \times 0.9639 + 106\% \cdot \delta(2) \quad \Leftrightarrow \delta(2) = 0.9202 \Rightarrow r(0,2) = \left(\frac{1}{0.9202}\right)^{1/2} - 1 \cong 4.25\%$$

- Finalmente, para a obrigação a 4 anos temos pagamento de *cash flows* nos momentos correspondentes aos tempo para maturidade 1, 2, 3 e 4 anos. Os factores de desconto para 1 e 2 anos já foram determinados. As taxa *spot* a 3 e 4 anos têm que ser calculadas através de um procedimento numérico, utilizando a seguinte equação:

$$100.19\% = 5\% \times 0.9639 + 5\% \times 0.9202 + 5\% \times \delta(3) + 105\% \times \delta(4)$$

Temos, portanto, uma equação para duas incógnitas, ou seja, uma indeterminação. Para resolver tal indeterminação, podemos expressar a taxa *spot* a 3 anos como sendo uma função da taxa *spot* na 4 anos, mediante a utilização de interpolação linear:

$$\begin{aligned} r(0,2) - r(0,3) &= 2 - 3 \\ r(0,2) - r(0,4) &= 2 - 4 \end{aligned}$$

Aplicando uma regra de 3-simples,

$$r(0,2) - r(0,3) = [r(0,2) - r(0,4)] \times \frac{2-3}{2-4}$$

$$\Leftrightarrow r(0,3) = r(0,2) + [r(0,4) - r(0,2)] \times \frac{3-2}{4-2}$$

$$\Leftrightarrow r(0,3) = 4.25\% + [r(0,4) - 4.25\%] \times 0.5$$

Utilizando o procedimento de Newton-Raphson¹ obtemos a seguinte solução:

$$r(0,4) \cong 4.99\% \Rightarrow r(0,3) = 4.25\% + (4.99\% - 4.25\%) \times 0.5 = 4.62\%$$

- O quadro seguinte resume e compara as taxas *spot* estimadas com as *yield-to-maturity* para as correspondentes maturidades:

Título	Tempo para maturidade (anos)	Yield to maturity	Taxa spot
OT-A	1.50	3.98%	4%
OT-B	2.00	4.23%	4.25%
OT-C	4.00	4.95%	4.99%

¹ Função “solver” do Excel.

6. Rating e risco de crédito

- Tal como enunciado na secção 2 deste texto, o preço de equilíbrio de uma obrigação, $B(0)$, corresponde ao somatório do valor actual dos seus *cash flows* futuros:

$$B(0) = \sum_{j=1}^n \frac{CF_j}{[1 + r(0, t_j)]^{t_j}}$$

sendo

$CF_j \equiv$ *cash flow* a gerar pela obrigação no momento t_j ($j = 1, \dots, n$); e

$r(0, t_j) \equiv$ taxa *spot* a t_j anos.

- Resta agora acrescentar que tais taxas de juro *spot*, utilizadas como taxas de actualização dos *cash flows* futuros, têm de estar ajustadas para a classe de risco de crédito da obrigação em análise. Isto é, quanto maior o risco de crédito da obrigação, mais elevada deverá ser a taxa de juro *spot* a utilizar.
- Em termos genéricos, e considerando *credit spreads* aditivos,

$$r(0, t_j) \equiv \text{taxa spot sem risco a } t_j \text{ anos} + \text{credit spread}.$$

- O *credit spread* pode ser assim entendido como constituindo o adicional de remuneração (ou seja, prémio de risco), face a um investimento alternativo sem risco, a exigir em virtude do nível de risco de crédito da obrigação em análise. Como calcular tal *credit spread*? Com base numa notação de *rating*.
- Uma notação de *rating* é uma classificação atribuída por uma empresa especializada (“empresa de *rating*”) a um determinado empréstimo obrigacionista¹, a qual qualifica o nível de risco de crédito associado a uma determinada emissão. Quanto maior (menor) é o nível de risco de crédito, pior (melhor) é o *rating* obtido.
- O quadro seguinte resume o sistema de classificação utilizado por duas das mais conhecidas empresas de *rating* a operar à escala mundial: a Moody’s e a Standard & Poors (S&P).

Moody’s	S&P	Nível de risco de crédito
Aaa	AAA	muito reduzido
Aa1	AA+	
Aa2	AA	
Aa3	AA-	
A1	A+	
A2	A	
A3	A-	
Baa1	BBB+	intermédio
Baa2	BBB	
...	...	...
C	C	muito elevado

¹ Em rigor, a classificação é dada não à empresa emitente mas sim à emissão em apreço. Obviamente, a situação económico-financeira da sociedade emitente é preponderante para estimar a probabilidade de incumprimento por parte da empresa emitente.

- Com base na notação de *rating*, é possível construir matrizes de risco de crédito. Uma *matriz de risco de crédito* permite determinar qual o *credit spread* a utilizar na avaliação de uma dada obrigação, em função da sua notação de *rating* (e atendendo também à sua maturidade).
- Um exemplo de uma matriz de risco de crédito, baseada na notação da S&P, é dado pela seguinte tabela:

	2 anos	3 anos	4 anos	5 anos	...	10 anos
AAA	2	5	10	12		20
AA+	5	10	14	20		31
AA	7	13	23	28		40
AA-	10	15	27	32		45
...						

Nota: Diferencial face a taxas sem risco em *basis points*.

Deste modo, para avaliar uma obrigação com vencimento a 5 anos e com uma notação de *rating* (S&P) igual a AA, as taxas de actualização deverão ser dadas pelas taxas *spot* sem risco estimadas (via preços de obrigações do Tesouro) acrescidas de 0.28%.

7. Floating rate bonds

- De seguida procede-se à análise de obrigações a taxa variável “puras”, ou seja, obrigações em que o cupão é dado por um determinado indexante (ajustado ao nível de risco do emitente).
- Caso seja definido um *spread* (aditivo ou substractivo) sobre o indexante de referência, é sempre possível decompor o valor da obrigação em duas partes: a) o valor da obrigação a taxa variável “pura”; mais ou menos b) o valor actual dos *spreads*.

7.1. Avaliação no início do período do cupão

- Tratando-se de obrigações de taxa variável (sem risco), o seu valor actual continua a ser dado pela soma actualizada do valor nominal e dos cupões vencidos, mas o valor dos cupões é agora variável.
- Representando por $L(t_{i-1}, t_i)$ o valor da taxa variável para o período $[t_{i-1}, t_i]$ (valor conhecido no momento t_{i-1}), então o valor no momento t_0 (data de avaliação) de uma obrigação (sem risco), com um valor nominal unitário, com vencimento no momento t_n , e com cupões pagos nos momentos $t_i = t_0 + i \cdot \delta$ ($i = 1, \dots, n$), em que δ é o período do cupão expresso em anos, é dado por:

$$B(t_0) = P(t_0, t_n) + \sum_{i=1}^n PV\{E_{t_0}[\delta \cdot L(t_{i-1}, t_i)]\},$$

onde $PV[E_{t_0}(Y)]$ representa o valor actual do valor esperado, no momento t_0 , da variável aleatória Y .

- O problema consiste em calcular o valor esperado dos valores futuros a registar pelo indexante.
- No entanto, o *hedging* do pagamento de $\delta \cdot L(t_{i-1}, t_i)$ no momento t_i , pode ser feito –no momento t_0 – com base:
 - a) Na venda de uma PDB (i.e., *pure discount bond*) com vencimento em t_i ; e
 - b) Na compra de uma PDB com vencimento em t_{i-1} . No momento t_{i-1} , o valor nominal então recebido será utilizado para comprar $P(t_{i-1}, t_i)^{-1}$ unidades da PDB com vencimento em t_i .

De facto,

Posição	time t_0	time t_{i-1}	time t_i
(a)	$P(t_0, t_i)$	0	-1
(b)	$-P(t_0, t_{i-1})$	+1 $-P(t_{i-1}, t_i)^{-1} \cdot P(t_{i-1}, t_i)$	$1 \cdot P(t_{i-1}, t_i)^{-1}$
Σ	$P(t_0, t_i)$ $-P(t_0, t_{i-1})$	0	$+\delta \cdot L(t_{i-1}, t_i)$

- Voltando ao início, o valor da *floating rate bond* no momento t_0 é igual a:

$$B(t_0) = P(t_0, T_n) + \sum_{i=1}^n [P(t_0, t_{i-1}) - P(t_0, t_i)]$$

- Desenvolvendo o somatório (surpresa...):

$$B(t_0) = 1$$

I.e. o valor de uma *floating rate bond* no início de um período de cupão é sempre igual ao valor nominal (ainda não reembolsado)!

7.2. Avaliação entre *coupon payment dates*

- Considere agora que pretende avaliar a anterior *floating rate note* no momento $t^* \in]t_{h-1}, t_h[$ ($h \in \{1, \dots, n\}$), i.e. antes do pagamento do h -ésimo cupão.
- No momento t_h (imediatamente após a liquidação do h -ésimo cupão), já sabemos que: $B(t_h) = 1$. Mais, o cupão vincendo no momento t_h é já conhecido no momento t^* e é igual a: $\delta \cdot L(t_{h-1}, t_h)$.
- Consequentemente,

$$B(t^*) = P(t^*, t_h) \cdot [\delta \cdot L(t_{h-1}, t_h) + 1]$$

- Em síntese, entre *coupon payment dates* o valor da *floating rate note* é dado pelo valor actual do próximo cupão e do valor nominal (ainda não reembolsado).

Exemplo

Considere uma obrigação de dívida privada com vencimento no dia 12/02/2002, com uma notação de rating BB (S&P) e com uma taxa de cupão igual à Euribor a 3 meses mais 90 *basis points* (cupão trimestral na base de calendário 30/360). A taxa do próximo cupão é igual a 5.1% e o *credit spread* de equilíbrio da classe de risco BB (S&P) é igual a 1.10% (face a taxas interbancárias).

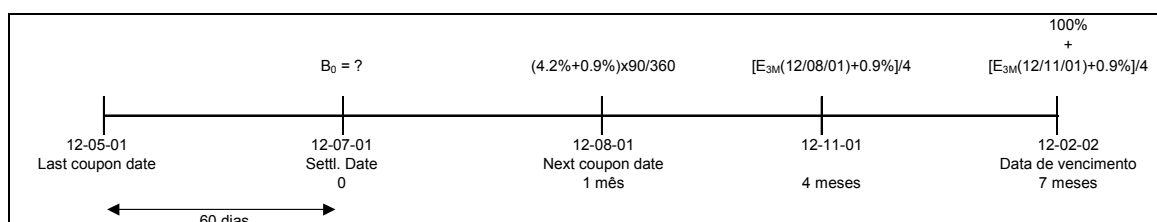
Actualmente, o número de dias de juros vencidos é igual a 60 dias (30/360) e a obrigação está cotada a 99.90% (*bid*)/99.95% (*offer*) para a *trade date* de 09/07/01 (2ª feira). Formulemos uma decisão de *trading*, sabendo que vigoram actualmente as seguintes taxas Euribor (convertidas para a base de calendário 30/360): 4.5% a 1 mês, 4.75% a 4 meses e 5% a 7 meses.

Com efeito:

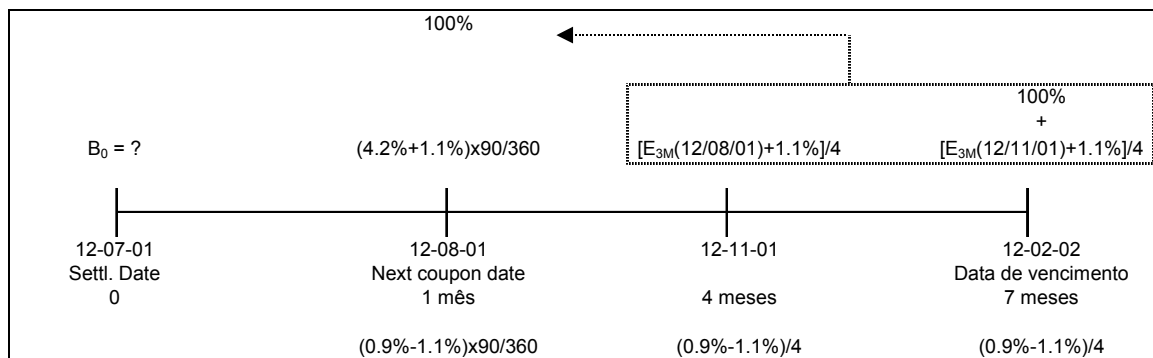
Settlement date = 09/07/01 + 3 dias de calendário = 12/07/01.

Taxa do próximo cupão = 5.1% $\Rightarrow$ Euribor a 3 meses no dia 12/05/2001 = 5.1% - 0.9% = 4.2%.

Pretende-se avaliar uma FRN com os seguintes *cash flows* futuros:



Tal é equivalente a considerar a seguinte decomposição de *cash flows* futuros:



Portanto,

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{100\% + \frac{4.2\% + 1.1\%}{4}}{1 + \left(4.5\% + 1.1\%\right) \times \frac{1}{12}} \\
 &\quad + \frac{0.9\% - 1.1\%}{4} \times \left[\left(1 + 5.6\% \times \frac{1}{12}\right)^{-1} + \left(1 + (4.75\% + 1.1\%) \times \frac{4}{12}\right)^{-1} + \left(1 + (5\% + 1.1\%) \times \frac{7}{12}\right)^{-1} \right] \\
 &= 100.85\% - 0.15\% = 100.71\%.
 \end{aligned}$$

$$AI = 5.1\% \times \frac{60}{360} = 0.85\%.$$

Decisão:

$$VT_0^{\text{bid}} = 99.90\% + 0.85\% = 100.75\% > B_0 \Rightarrow \text{Vender};$$

$$VT_0^{\text{ask}} = 99.95\% + 0.54\% = 100.80\% > B_0 \Rightarrow \text{Não comprar}.$$

8. Medidas de risco de taxa de juro

8.1. Duration

8.1.1. Definição

- A duração de uma obrigação traduz o tempo médio em que o seu valor é gerado.
- Principais conceitos de *duration*:

.Duração de *Macaulay* (DM) $\Leftarrow$ *yield curve* horizontal
 .Duração de *Fisher-Weil* (DFW) $\Leftarrow$ *yield curve* horizontal ou não

- Duração de *Macaulay*:

$$DM = \frac{\sum_{k=1}^n t_k \cdot \frac{CF_k}{(1+r)^{t_k}}}{B_0}$$

sendo:

$n \equiv$ nº de períodos de tempo em falta para o vencimento da obrigação;

$CF_k \equiv$ *cash flow* a gerar pela obrigação no período “k”;

$r \equiv$ taxa de juro *spot* para a classe de risco da obrigação¹; e

$B_0 \equiv$ valor actual da obrigação = $\sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+r)^{t_k}}$.

- Duração de *Fisher-Weil*:

$$DFW = \frac{\sum_{k=1}^n t_k \cdot \frac{CF_k}{(1+r_k)^{t_k}}}{B_0}$$

sendo,

$r_k \equiv$ taxa de juro *spot*, a “k” períodos, para a classe de risco da obrigação; e

$B_0 \equiv$ valor actual da obrigação = $\sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+r_k)^{t_k}}$.

- Portanto, a DM é um caso particular da DFW:

$$DFW = DM \text{ quando } r_k = r, \forall k.$$

¹ Caso r seja substituído pela *yield-to-maturity* da obrigação, obtém-se a denominada duração de Redington.

Exemplo

	OT(A)	OT(B)
Valor nominal	10,000\$00	10,000\$00
Taxa cupão	12%	10%
Periodicidade cupão	anual	semestral
Reembolso	a 2 anos	a 2 anos

	k	0.5 anos	1 ano	1.5 anos	2 anos
Taxa <i>spot</i>		11%	11.25%	11.5%	12%

$$B_0(A) = \frac{1,200\$00}{1.1125} + \frac{11,200\$00}{(1.12)^2} \cong 10,007\$22.$$

$$DFW(A) = \frac{1 \times \frac{1,200\$00}{1.1125} + 2 \times \frac{11,200\$00}{(1.12)^2}}{10,007\$22} \cong 1.892 \text{ anos.}$$

I.e. a obrigação A demora, em média 1.892 anos a gerar o seu valor.

$$B_0(B) = \frac{500\$00}{(1.11)^{0.5}} + \frac{500\$00}{(1.1125)^1} + \frac{500\$00}{(1.115)^{1.5}} + \frac{10,500\$00}{(1.12)^2} \cong 9,719\$23.$$

$$DFW(B) = \frac{0.5 \times \frac{500\$00}{(1.11)^{0.5}} + 1 \times \frac{500\$00}{(1.1125)^1} + 1.5 \times \frac{500\$00}{(1.115)^{1.5}} + 2 \times \frac{10,500\$00}{(1.12)^2}}{9,719\$23} \cong 1.859 \text{ anos}$$

Apesar de as obrigações possuírem a mesma maturidade, a obrigação “B” apresenta uma maior liquidez, i.e., gera, em média, mais rapidamente o seu valor.

➤ Alguns casos particulares:

- i) Para uma PDB com vencimento a n períodos, $DM = DFW = n$.

Demonstração:

$$DFW = \frac{n \cdot \frac{CF_n}{(1+r_n)^n}}{\frac{CF_n}{(1+r_n)^n}} = n$$

□

- ii) Obrigações perpétuas (maturidade = ∞)

Assumindo uma yield curve horizontal, para uma *consol bond* com um cupão (anual) igual a C unidades monetárias:

$$B_0 = \frac{C}{r} \quad \text{e} \quad DM = 1 + \frac{1}{r}$$

8.1.2. Características da *duration*

- A *duration* aumenta com a maturidade, mas a uma taxa decrescente. I.e. $\frac{\partial D}{\partial n} > 0$, mas $\frac{\partial^2 D}{\partial n^2} < 0$.
- Quanto mais elevado o nível de taxas de juro, menor a *duration*. I.e. $\frac{\partial DM}{\partial r} < 0$, pois os factores de desconto decrescem mais para os prazos longos do que para os prazos curtos.
- Quanto maior a taxa de cupão, menor a *duration* de uma obrigação a taxa fixa.

8.1.3. Duração de uma carteira de obrigações (D^c)

$$D^c = \sum_{j=1}^p D^j \cdot \frac{B_0^j}{B_0^c}$$

sendo,

$p \equiv$ nº de obrigações que integram a carteira;

$D^j \equiv$ DM ou DFW da j -ésima obrigação;

$B_0^j \equiv$ valor actual da j -ésima obrigação; e

$B_0^c \equiv$ valor actual da carteira = $\sum_{j=1}^p B_0^j$

Exemplo

CARTEIRA	OT(A)	OT(B)
Nº de obrigações	20,000	30,000
Preço	10,007\$22	9,719\$23
Duração	1.892	1.859
Valor actual	200,144.4 contos	291,576.9 contos

Valor actual da carteira = 200,144.4 + 291,576.9 = 491,721.3 contos

$$D^c = 1.892 \times \frac{200,144.4}{491,721.3} + 1.859 \times \frac{291,576.9}{491,721.3} \cong 1.872 \text{ anos}^1$$

¹ Ou seja,
$$\frac{0.5 \times \frac{30,000 \times 0.5}{(1.11)^{0.5}} + 1 \times \frac{20,000 \times 1.2 + 30,000 \times 0.5}{1.1125} + 1.5 \times \frac{30,000 \times 0.5}{(1.115)^{1.5}} + 2 \times \frac{20,000 \times 1.12 + 30,000 \times 10.5}{(1.12)^2}}{491,721.3}$$

8.1.4. Utilidade da *duration*

- Avaliação do grau de liquidez de uma obrigação:

Quanto menor a *duration* $\Rightarrow$ maior o grau de liquidez

- Avaliar a sensibilidade da obrigação (carteira) face à variação das taxas de juro:

Quanto maior a *duration* $\Rightarrow$ maior o risco de taxa de juro

- Imunizar carteiras de activos e/ou responsabilidades

8.1.5. *Duration* e sensibilidade face a variações das taxas de juro

- Desenvolvendo em série de Taylor a variação do valor de uma obrigação decorrente de um choque sobre a curva (*flat*) de taxas de juro,

$$\Delta B_0 = \frac{\partial B_0}{\partial r} \cdot \Delta r + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 B_0}{\partial r^2} \cdot (\Delta r)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 B_0}{\partial r^3} \cdot (\Delta r)^3 + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta \% B_0 \equiv \frac{\Delta B_0}{B_0} = \frac{\partial B_0}{\partial r} \cdot \frac{1}{B_0} \cdot \Delta r + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 B_0}{\partial r^2} \cdot \frac{1}{B_0} \cdot (\Delta r)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 B_0}{\partial r^3} \cdot \frac{1}{B_0} \cdot (\Delta r)^3 + \dots \quad (*)$$

Considerando somente o primeiro termo da série de Taylor, e como

$$\frac{\partial B_0}{\partial r} \cdot \frac{1}{B_0} \cdot \Delta r = \left[- \sum_k k \cdot \frac{CF_k}{(1+r)^{k+1}} \right] \cdot \frac{1}{B_0} \cdot \Delta r = -DM \cdot \frac{\Delta r}{1+r}, \text{ então}$$

$$\boxed{\Delta \% B_0 \approx -DM \cdot \frac{\Delta r}{1+r}} \quad (**)$$

- Portanto, quanto maior (menor) for a duração, maior (menor) é a variação do valor da obrigação ou carteira face a uma dada variação, de sinal contrário, das taxas de juro.

- A expressão (**) é muitas vezes apresentada da seguinte forma:

$$\boxed{\Delta \% B_0 \approx -MD \cdot \Delta r}, \text{ onde } MD = \frac{DM}{1+r} \text{ é designada por } \textit{modified duration}^1.$$

- Mais ainda, a expressão (**) pode também ser reescrita como

$$DM \approx - \frac{\Delta \% B_0}{\frac{\Delta r}{r}} \cdot \frac{1+r}{r}.$$

¹ Mede a variação percentual induzida sobre o valor da obrigação por uma variação de 1% na taxa de juro.

I.e. a duration é proporcional à elasticidade preço-taxa de juro. A duration é portanto uma medida de sensibilidade do preço face a variações das taxas de juro.

- A expressão (**) é apenas uma aproximação, pois despreza todos os termos da série de Taylor de ordem superior à primeira (i.e. considera somente a inclinação da função (B_0, r)). Consequentemente, é apenas válida para pequenas variações de taxa de juro.
- Mais ainda, a expressão (**) subavalia subidas de preço (resultantes de descidas de taxa) e sobreavalia descidas de preço (resultantes de subidas de taxa). Tal decorre da existência de convexidade...

8.2. Convexidade (C)

- Desenvolvendo o segundo termo da série (*),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 B_0}{\partial r^2} \cdot \frac{1}{B_0} \cdot (\Delta r)^2 &= \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_k k \cdot (k+1) \cdot \frac{CF_k}{(1+r)^{k+2}} \right] \cdot \frac{1}{B_0} \cdot (\Delta r)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sum_k k \cdot (k+1) \cdot \frac{CF_k}{(1+i_k)^k}}{B_0} \right] \cdot \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right)^2 \end{aligned} \quad (***)$$

em que,

$$C = \frac{\sum_k t_k \cdot (t_k + 1) \cdot \frac{CF_k}{(1+r)^{t_k}}}{B_0}^1$$

- O conhecimento do valor da convexidade de uma obrigação é importante na medida em que, quanto maior for “C”:
- maior é o aumento do seu valor em resultado de uma descida das taxas de juro; e
- menor é a descida do seu valor em resultado de uma subida das taxas de juro.

Tal acontece pois $C > 0$.

- Caso a yield curve não seja flat, a fórmula anterior é facilmente generalizável:

$$C = \frac{\sum_k t_k \cdot (t_k + 1) \cdot \frac{CF_k}{(1+r_k)^{t_k}}}{B_0}$$

¹ A convexidade está relacionada com a segunda derivada da relação entre o valor da obrigação e as taxas de juro.

Exemplo

$$C(A) = \frac{1 \times 2 \times \frac{1,200\$00}{1.1125} + 2 \times 3 \times \frac{11,200\$00}{(1.12)^2}}{10,007\$22} \cong 5.569$$

$$C(B) = \frac{1}{9,719\$23} \times \left[0.5 \times 1.5 \times \frac{500\$00}{(1.11)^{0.5}} + 1 \times 2 \times \frac{500\$00}{(1.1125)^1} + 1.5 \times 2.5 \times \frac{500\$00}{(1.115)^{1.5}} + 2 \times 3 \times \frac{10,500\$00}{(1.12)^2} \right] \cong 5.460$$

- Para uma carteira de obrigações, a convexidade corresponde a uma média ponderada pelo peso relativo de cada título na carteira:

$$C^c = \sum_{j=1}^p C^j \cdot \frac{B_0^j}{B_0^c}$$

sendo,

$p \equiv$ nº de obrigações que integram a carteira;

$C^j \equiv$ convexidade da j -ésima obrigação;

$B_0^j \equiv$ valor actual da j -ésima obrigação; e

$B_0^c \equiv$ valor actual da carteira = $\sum_{j=1}^p B_0^j$

Exemplo

$$C^c = 5.569 \times \frac{200,144.4}{491,721.3} + 5.46 \times \frac{291,577.9}{491,721.3} \cong 5.504.$$

ou seja,

$$\frac{1}{491,721.3} \left[0.5 \times 1.5 \times \frac{30,000 \times 0.5}{(1.11)^{0.5}} + 1 \times 2 \times \frac{20,000 \times 1.2 + 30,000 \times 0.5}{1.1125} + 1.5 \times 2.5 \times \frac{30,000 \times 0.5}{(1.115)^{1.5}} + 2 \times 3 \times \frac{20,000 \times 11.2 + 30,000 \times 10.5}{(1.12)^2} \right]$$

- Se na série de *Taylor* (*) desprezarmos os termos de ordem superior à segunda¹, obtemos uma fórmula simples de aproximar² a variação do valor de uma obrigação (ou carteira de obrigações) induzida por uma alteração das taxas de juro:

$$\Delta \% B_0 \cong -DM \cdot \frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right)^2$$

- Generalizando para *yield curves* não *flat*,

$$\Delta \% B_0 \cong -DFW \cdot \lambda + \frac{1}{2} \cdot C \cdot \lambda^2$$

sendo, $\lambda = \frac{\Delta r_k}{1+r_k}$.

- No entanto, a fórmula anterior somente é utilizável desde que o parâmetro “ λ ” seja constante para toda a estrutura temporal de taxas de juro. I.e. a *yield curve* pode não ser *flat*, mas tem de se deslocar paralelamente!
- Ora, tal significa admitir que a estrutura temporal de taxas de juro se altera com base em choques multiplicativos de magnitude constante e igual a “ λ ”:

$$\lambda = \frac{\Delta r_k}{1+r_k} \Leftrightarrow \Delta r_k = (1+r_k) \cdot \lambda \Leftrightarrow r'_k - r_k = (1+r_k) \cdot \lambda \Leftrightarrow$$

com,

$r'_k \equiv$ taxa de juro *spot* a “ k ” períodos, após a alteração da estrutura temporal de taxas de juro.

$$\Leftrightarrow r'_k = r_k + (1+r_k) \cdot \lambda \Leftrightarrow 1+r'_k = 1+r_k + (1+r_k) \cdot \lambda \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(1+r'_k) = (1+r_k) \cdot (1+\lambda)}$$

Exemplo

Estimemos o impacto de um choque multiplicativo de 0.1% sobre o valor da carteira de obrigações:

$$\Delta \% B_0^c \cong -1.872 \times 0.001 + \frac{1}{2} \times 5.504 \times (0.001)^2 \cong -0.1869\%$$

$$\begin{aligned} \text{Novo valor da carteira} &\cong 491,721.3 + 491,721.3 \times (-0.1869\%) \\ &= 490,802.2 \text{ contos.} \end{aligned}$$

De facto, as taxas de juro *spot* após o choque passam a ser dadas por:

¹ Para “ n ” grande, $\left(\frac{\Delta r}{1+r} \right)^n$ torna-se desprezível.

² Pelo facto de desprezarmos termos da série, o resultado obtido nunca será exacto.

$$r'_{0.5} : (1 + r'_{0.5}) = 1.11 \times 1.001 \Leftrightarrow r'_{0.5} = 11.111\% ;$$

$$r'_1 : (1 + r'_1) = 1.1125 \times 1.001 \Leftrightarrow r'_1 = 11.36125\% ;$$

$$r'_{1.5} : (1 + r'_{1.5}) = 1.115 \times 1.001 \Leftrightarrow r'_{1.5} = 11.6115\% ; e$$

$$r'_2 : (1 + r'_2) = 1.12 \times 1.001 \Leftrightarrow r'_2 = 12.112\% .$$

Assim, o preço de equilíbrio das obrigações passa a ser dado por:

$$B'_0(A) = \frac{1,200\$00}{1.1136125} + \frac{11,200\$00}{(1.12112)^2} \cong 9,988\$32.$$

$$B'_0(B) = \frac{500\$00}{(1.11111)^{0.5}} + \frac{500\$00}{(1.1136125)^1} + \frac{500\$00}{(1.116115)^{1.5}} + \frac{10,500\$00}{(1.12112)^2} \cong 9,701\$19.$$

E portanto, o novo valor da carteira vem praticamente igual ao estimado:

$$\begin{aligned} \text{Novo valor da carteira} &\cong 20,000 \times 9,988\$32 + 30,000 \times 9,701\$19 \\ &= 490,802.1 \text{ contos.} \end{aligned}$$

9. Imunização do risco de taxa de juro

9.1. Imunização (clássica) uniperíodo

9.1.1. Definição

- Visa assegurar, no momento presente (momento “0”), que no final de um determinado horizonte temporal de investimento (“h” períodos) e independentemente da evolução que se venha a verificar ao nível das taxas de juro, o valor futuro da carteira de obrigações é pelo menos igual ao valor que se obteria caso as taxas de juro não variassem, ou seja, a TRR da carteira é pelo menos igual à rendibilidade que se obteria num cenário de estabilidade das taxas de juro.

- Seja,

$S_h^c \equiv$ valor futuro da carteira daqui a “h” períodos

↓

engloba 2 componentes:

- i) os *cash flows* vencidos desde o momento “0” e reinvestidos até ao momento “h”; e

- ii) o preço das obrigações componentes no momento “h” (B_h^c).

- Admitindo que a estrutura temporal de taxas de juro não sofre alterações até ao momento “h”¹, então:

$$\begin{aligned}
 S_h^c &= \left[CF_1^c \cdot (1+i_h)^{h-1} + CF_2^c \cdot (1+i_h)^{h-2} + \dots + CF_h^c \right] + B_h^c \\
 &\Leftrightarrow \\
 S_h^c &= \left[CF_1^c \cdot (1+i_h)^{h-1} + CF_2^c \cdot (1+i_h)^{h-2} + \dots + CF_h^c \right] + \sum_{k>h} \frac{CF_k^c}{(1+i_h)^{k-h}} \\
 &\Leftrightarrow \\
 S_h^c &= \left[CF_1^c \cdot (1+i_h)^{h-1} + CF_2^c \cdot (1+i_h)^{h-2} + \dots + CF_h^c \right] + \left[\frac{CF_{h+1}^c}{(1+i_{h+1})} + \frac{CF_{h+2}^c}{(1+i_{h+2})^2} + \dots \right] \\
 &\Updownarrow (1+i_h)^h = (1+i_k)^k \cdot (1+i_h)^{h-k} \text{ e } (1+i_{h+k})^{h+k} = (1+i_h)^h \cdot (1+i_{h+k})^k \\
 S_h^c &= (1+i_h)^h \cdot \left[\frac{CF_1^c}{1+i_1} + \frac{CF_2^c}{(1+i_2)^2} + \dots + \frac{CF_h^c}{(1+i_h)^h} + \frac{CF_{h+1}^c}{(1+i_{h+1})^{h+1}} + \frac{CF_{h+2}^c}{(1+i_{h+2})^{h+2}} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

- Concluindo, num cenário de estabilidade das taxas de juro,

$$S_h^c = B_0^c \cdot (1+i_h)^h$$

¹ Isto é, que as futuras taxas *spot* irão corresponder às actuais taxas *forward*.

- Ora, a imunização clássica de uma carteira de obrigações consiste precisamente em assegurar que o valor futuro da carteira seja mínimo para o cenário de estabilidade das taxas de juro, o que acontece desde que:

$$\text{Min } S_h^c = B_0^c \cdot (1 + i_h)^h \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial S_h^c}{\partial i_k} = 0 \\ \frac{\partial^2 S_h^c}{\partial i_k^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\text{DFW}^c = h}$$

I.e.,

uma carteira de obrigações encontra-se imunizada face a uma variação INSTANTÂNEA das taxas de juro desde que a sua duração seja igual ao horizonte temporal de investimento

Ou seja,

$$h = \text{DFW}^c \Rightarrow S_h^c \geq B_0^c \cdot (1 + i_h)^h$$

Dito de outro modo,

$$h = \text{DFW}^c \Rightarrow \text{TRR}_h \geq i_h$$

com,

$$\text{TRR}_h : B_0^c \cdot (1 + \text{TRR}_h)^h = S_h^c$$

9.1.2. Justificação teórica

- O impacto de uma variação das taxas de juro sobre o valor futuro de uma carteira de obrigações engloba dois efeitos de sentido oposto:

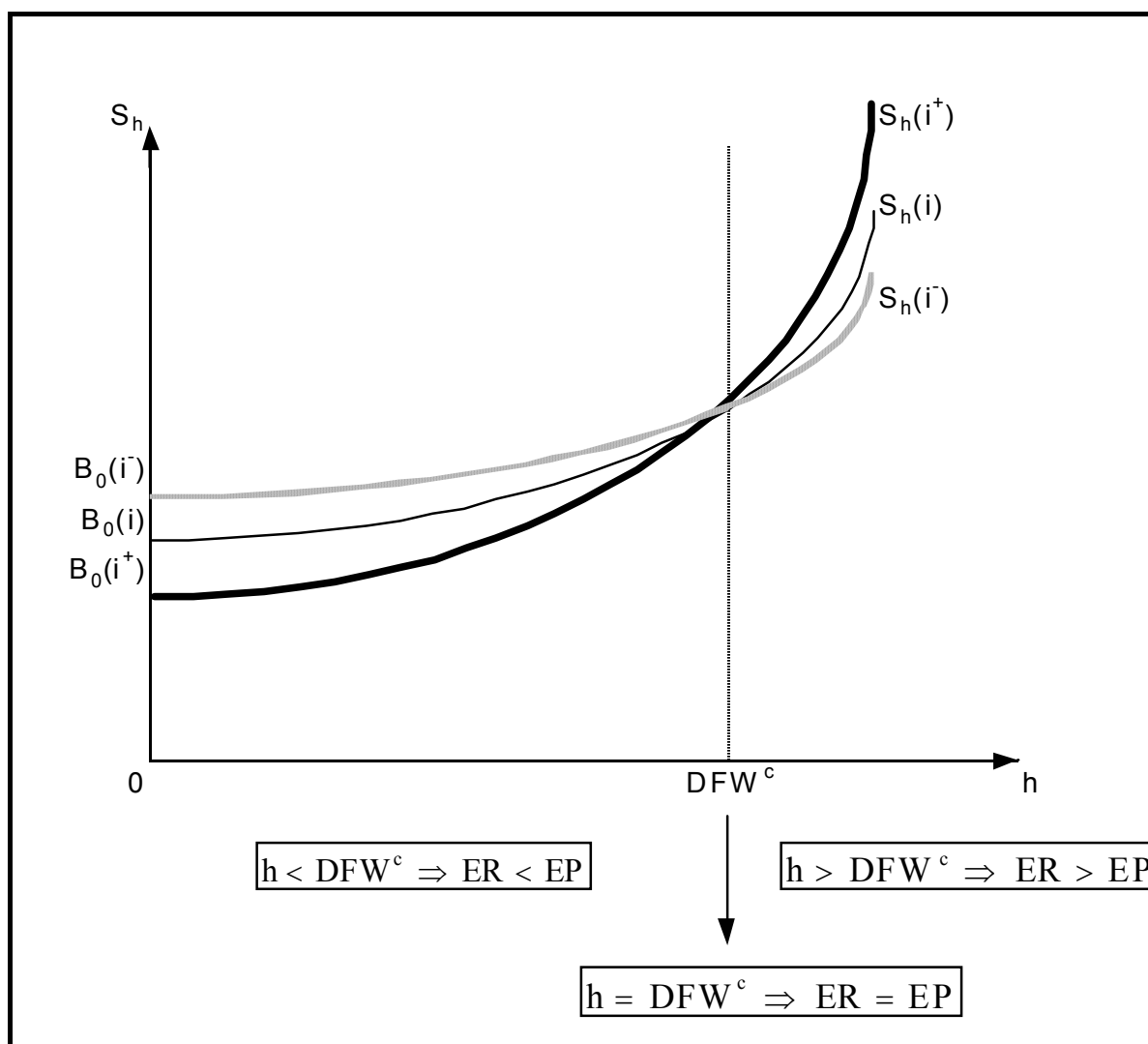
- a) Efeito de Reinvestimento (ER) = impacto sobre o valor acumulado dos *cash flows* vencidos e reinvestidos

($\Delta^+ i \Rightarrow$ ER positivo)

- b) Efeito Preço (EP) = impacto sobre o preço de mercado da carteira no final do horizonte temporal de investimento

($\Delta^+ i \Rightarrow$ EP negativo)

- Ora, quando $h = \text{DFW}^c$ os dois efeitos possuem igual magnitude, e sendo de sinais contrários, anulam-se mutuamente. Vide gráfico seguinte.



9.1.3. Limitações da imunização

- 1) Necessidade de reajustamento contínuo da carteira de obrigações (de modo a garantir a manutenção da condição de imunização: $h = DFW^c$) $\Leftarrow$ pois:

a própria “ DFW^c ” altera-se com a variação das taxas de juro; e

mesmo que as taxas de juro não variem, com a passagem do tempo a DFW^c decresce mais lentamente do que o “ h ”.

- 2) A existência de custos de transacção faz baixar o valor da carteira sempre que se procede ao seu reajustamento¹
- 3) Existência de “risco de processo estocástico”, pois como a DFW pressupõe que a estrutura temporal de taxas de juro evolui de acordo com “choques multiplicativos”, a carteira de obrigações não está imunizada contra quaisquer outros tipos de “choques”²

¹ Assim, na prática o processo de reajustamento imunizante terá de ser periódico e não contínuo.

² Por esta razão, têm sido desenvolvidos vários modelos de imunização baseados em durações estocásticas. Todavia, a sua eficácia imunizante não é substancialmente diferente da patenteada pelos modelos de duração determinística...

<i>Exemplo</i>

O Fundo de Pensões GN pretende garantir o cumprimento de uma responsabilidade no valor de 10 milhões de contos, daqui a 1.5 anos, através da transacção das obrigações A, Y e Z.

Actualmente, são as seguintes as condições de mercado:

k	0.5 anos	1 ano	1.5 anos	2 anos
Taxa spot	11%	11.25%	11.5%	12%

	OT(A)	OT(Z)	OCZ(Y)
Valor nominal	10,000\$00	10,000\$00	10,000\$00
Taxa cupão	12%	10%	0%
Periodicidade cupão	anual	semestral	
Reembolso	a 2 anos	a 1.5 anos	a 1 ano
Preço de equilíbrio	10,007\$22	9,842\$21	8,988\$76
Duração	1.892 anos	1.429 anos	1 ano
Valor de cotação	10,007\$00	9,845\$00	8,988\$00

Em primeiro lugar, temos de determinar o valor da carteira de obrigações a constituir de modo a imunizar a responsabilidade futura.

Se as taxas de juro não variassem durante os próximos 1.5 anos, bastaria investir um valor “ B_0^c ”:

$$B_0^c \cdot (1 + i_{1.5})^{1.5} = 10,000,000 \Leftrightarrow B_0^c = \frac{10,000,000}{(1.115)^{1.5}} \cong 8,493,520 \text{ contos.}$$

Mas, mesmo que as taxas de juro variem, desde que o montante anterior seja investido numa carteira de obrigações com uma *duration* igual a 1.5 anos, garante-se uma TRR superior a 11.5% e portanto garante-se um valor acumulado superior ao montante da responsabilidade a cobrir.

Em segundo lugar, é necessário definir o número de obrigações a comprar de modo a que a duração da carteira seja igual a 1.5 anos.

Para que, em média, a duração da carteira seja igual a 1.5 anos, há que combinar as obrigações: “A” e “Z”, “A” e “Y”, ou “A” “Z” e “Y”. Não obstante existirem várias possibilidades, devemos tentar integrar na nossa carteira obrigação o mais atractivas possível (i.e., com a maior diferença positiva possível entre o seu preço de equilíbrio e o seu valor de transacção)¹. Neste caso, há que excluir a obrigação “Z” e portanto estabelecer uma combinação entre os títulos “A” e “Y”:

$$DFW^c = 1.5 \Leftrightarrow \begin{cases} 1.892 \times x_A + 1 \times x_Y = 1.5 \\ x_A + x_Y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 56.04\% \\ x_Z = 43.96\% \end{cases}$$

com,

$$x_A = \frac{B_0^A}{B_0^c} \equiv \text{peso relativo das obrigações “A” na carteira; e}$$

¹ Outro critério (função objectivo) consiste em maximizar a convexidade da carteira imunizante.

$$x_Y = \frac{B_0^Y}{B_0^c} \equiv \text{peso relativo das obrigações "Y" na carteira.}$$

Título	Peso relativo	Valor	Número	Investimento
A	56.04%	4,759,807	475,648 ¹	4,759,810
Y	43.96%	3,733,713	415,411 ²	3,733,714
	Σ	8,493,520	Σ	8,493,524

Imagine agora que, passado um ano, as condições de mercado correspondiam a:

K	0.5 anos	1 ano
Taxa <i>spot</i>	12.114%	12.868%

	OT(A)	OT(Z)
Preço de equilíbrio	9,923\$11	9,916\$54
Duração	1 ano	0.5 anos
Valor de cotação	9,923\$00	9,916\$00

Assim sendo, o valor da nossa actual carteira de obrigações ascende a:

<i>Cash flows</i> recebidos	A	1.2 contos x 475,648	570,778 contos
	Y	10 contos x 415,411	4,154,110 contos
Valor de venda	A	9.923 contos x 475,648	4,719,855 contos
		Σ	9,444,743 contos

No entanto, torna-se necessário reajustar a composição da carteira, na medida em que o horizonte temporal de investimento passou a ser igual a 0.5 anos.

Ora, para que a duração da carteira venha igual a 0.5 anos, basta investir todo o seu valor nas obrigações "Z":

$$\text{Número de OT(Z) a comprar} = \frac{9,444,743}{9.916} = 952,475.1 \cong 952,475.$$

Deste modo, o valor da carteira daqui a 0.5 anos (final do horizonte temporal de investimento) será igual a:

$$952,475 \times 10.5 \text{ contos} = 10,000,988 \text{ contos.}$$

I.e, apesar de as taxas de juro terem subido, é possível cobrir a responsabilidade no valor de 10 milhões de contos. Dito de outro modo, a carteira gerou uma TRR superior à taxa *spot* inicial a 1.5 anos:

$$\begin{aligned} \text{TRR}_{1.5} : 8,493,524 \times (1 + \text{TRR}_{1.5})^{1.5} &= 10,000,988 \\ \Leftrightarrow \text{TRR}_{1.5} &\cong 11.507\% > 11.5\% \end{aligned}$$

¹ Em termos exactos, 475,647.7 obrigações.

² Caso os títulos fossem divisíveis, 415,410.9 obrigações.

9.2. Imunização multi-período

9.2.1. Definição

- Visa assegurar, no momento presente, independentemente da evolução futura das taxas de juro e através da gestão de uma única carteira de obrigações, que o valor futuro da carteira será sempre maior ou igual do que o valor de toda e qualquer responsabilidade futura.
- Fala-se em imunização multiperíodo pois pretende-se que a gestão de uma só carteira de obrigações permita cobrir mais do que uma responsabilidade futura.

9.2.2. Processo de imunização

- Para garantir a cobertura das responsabilidades futuras basta assegurar que:
 - a) partindo-se de uma situação de *matching* perfeito, i.e, Valor actual dos activos (VA) = Valor actual das responsabilidades (VL),
 - b) a diferença “VA-VL” seja mínima no cenário de estabilidade das taxas de juro¹.
- Ou seja, é necessário garantir que:

$$VA = VL^1 \quad \Delta \quad \min_{i_k} (VA - VL)^2$$

sendo,

$$VA = \sum_k \frac{A_k}{(1 + i_k)^{t_k}}$$

com,

$A_k \equiv \text{cash flow gerado pela carteira de activos no período “k”}$

e

$$VL = \sum_k \frac{L_k}{(1 + i_k)^{t_k}}$$

com,

$L_k \equiv \text{valor da responsabilidade a cobrir no período “k”}$

- Ora, tal é equivalente a exigir que:

¹ Para que a diferença seja positiva na hipótese de as taxas de juro variarem.

¹ Esta condição garante a cobertura das responsabilidades se as taxas de juro não variarem.

² Acrescentando esta condição, garante-se a cobertura das responsabilidades mesmo que as taxas de juro variem.

$$\left\{ \begin{array}{l} VA = VL \\ \frac{\partial(VA - VL)}{\partial i_k} = 0 \\ \frac{\partial^2(VA - VL)}{\partial i_k^2} > 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

➤ Em síntese, a imunização de múltiplas responsabilidades futuras requer a simultânea observância das seguintes condições:

1) **VA = VL**

sendo,

$$VA = \sum_k \frac{A_k}{(1+i_k)^{t_k}} \quad e \quad VL = \sum_k \frac{L_k}{(1+i_k)^{t_k}}$$

2) **DA = DL**¹

sendo,

$$DA \equiv \text{duration da carteira de activos:} \quad DA = \frac{\sum_k t_k \cdot \frac{A_k}{(1+i_k)^{t_k}}}{VA}$$

$$DL \equiv \text{duration das responsabilidades:} \quad DL = \frac{\sum_k t_k \cdot \frac{L_k}{(1+i_k)^{t_k}}}{VL}$$

3) **Regra de Bierwag:**

A carteira de activos tem de ser divisível em duas subcarteiras, tais que:

- uma das subcarteiras de activos tenha uma duração não superior à data de vencimento da primeira responsabilidade; e
- a outra subcarteira de activos tenha uma duração não inferior à data de vencimento da última responsabilidade.

Em rigor, a condição de 2ª ordem requer que o índice de dispersão dos activos (IA) seja superior ao índice de dispersão das responsabilidades (IL), i.e.

$$IA > IL$$

sendo,

¹ A imunização uniperíodo é um caso particular da imunização multiperíodo, em que $DL=h$.

$$IA = \frac{\sum_k (t_k - DA)^2 \cdot \frac{A_k}{(1+i_k)^{t_k}}}{VA}$$

e

$$IL = \frac{\sum_k (t_k - DL)^2 \cdot \frac{L_k}{(1+i_k)^{t_k}}}{VL}$$

No entanto, demonstra-se que a regra de Bierwag é condição suficiente (embora não necessária) para que $IA > IL$.