

Investimentos

António M. R. G. Barbosa

ISCTE  **Business School**
Instituto Universitário de Lisboa

Dia 11: 02/Mar/12

Sumário

- 1 Estimação da estrutura temporal das taxas de juro
- 2 Bootstrapping num “mundo perfeito”
- 3 Bootstrapping num “mundo menos perfeito”

Outline

- 1 Estimação da estrutura temporal das taxas de juro
- 2 Bootstrapping num “mundo perfeito”
- 3 Bootstrapping num “mundo menos perfeito”

Como determinar as taxas spot (1/3)

- Por norma as taxas de juro spot não são directamente observáveis
- A excepção são as taxas de juro interbancárias até 1 ano (e.g. EURIBOR e LIBOR):
 - se se lembram, estas taxas correspondem a uma média das opiniões sobre o nível de taxas de juro no MMI
- O que nós observamos no mercado são preços de obrigações
- E os preços das obrigações dependem das taxas de juro spot para o prazo dos seus cash-flows futuros

Como determinar as taxas spot (2/3)

- Podemos então inferir a ETTJ para um determinado nível de risco através dos preços de um conjunto de obrigações para esse mesmo nível de risco:
 - e.g. as taxas de juro spot para a dívida soberana portuguesa (há uns anos chamar-lhe-ia sem risco) são inferidas das cotações dos BTs e OTs
 - as taxas de juro spot para um rating AA são obtidas através das cotações de obrigações com rating AA
- Normalmente o que se faz é estimar a ETTJ sem risco através das OTs:
 - para outros níveis de risco soma-se a esta ETTJ um credit spread
 - a justificação é a maior liquidez do mercado de dívida pública em comparação com o mercado de dívida privada (num mercado sem liquidez as cotações não reflectem de forma apropriada a actual ETTJ, ou seja, os VT afastam-se dos B_0)

Como determinar as taxas spot (3/3)

- Se tivéssemos obrigações de cupão zero para todos os prazos standard (3m, 6m, 1a, 2a, ...) seria fácilimo determinar a ETTJ através das respectivas yield-to-maturity
- Na prática isso não acontece e temos que recorrer também aos preços das obrigações com cupão
 - como sabemos não podemos utilizar as yield-to-maturity de obrigações com cupão
 - mas existem vários métodos para estimar a ETTJ através dos preços de obrigações com cupão
 - o que vamos estudar é o método de bootstrap

Outline

- 1 Estimação da estrutura temporal das taxas de juro
- 2 Bootstrapping num “mundo perfeito”
- 3 Bootstrapping num “mundo menos perfeito”

Bootstrapping num “mundo perfeito” (1/6)

- Para introduzir a técnica de bootstrapping, vamos considerar um “mundo perfeito” (já vão perceber porquê)
- Temos os preços das seguintes obrigações (as OTs têm cupão anual e reembolso bullet ao par)

Obrig.	Matur.	Cupão	VC ¹	JV	VT
BT 3m	0,25	0	99,8771	0	99,8771
BT 6m	0,5	0	99,6764	0	99,6764
BT 1a	1	0	98,7308	0	98,7308
OT 2a	2	4.75	105,7685	0	105,7685
OT 3a	3	3	101,2932	0	101,2932

- Queremos calcular as taxas spot a 3m, 6m, 1a, 2a e 3a na base de calendário ACT/ACT:
 - a maturidade das obrigações em anos foi já calculada com base na base de calendário ACT/ACT

¹Média entre o bid e ask

Bootstrapping num “mundo perfeito” (2/6)

- As taxas a 3m, 6m e 1a são obtidas das cotações do BT e já sabemos como se faz

$$99,8771 = \frac{100}{[1 + r(0; 0,25)]^{0,25}}$$

$$\Leftrightarrow r(0; 0,25) = \left(\frac{100}{99,8771} \right)^{\frac{1}{0,25}} - 1 = 0,4932\%$$

$$r(0; 0,5) = \left(\frac{100}{99,6764} \right)^{\frac{1}{0,5}} - 1 = 0,6503\%$$

$$r(0; 1) = \left(\frac{100}{98,7308} \right)^{\frac{1}{1}} - 1 = 1,2855\%$$

Bootstrapping num “mundo perfeito” (3/6)

- A taxa a spot a 2 anos é obtida da OT 2a, mas **não** calculando a sua yield; ao invés utilizamos a técnica de bootstrapping
- As taxas spot implícitas no valor de transacção da OT 2a são

$$105,7685 = \frac{4,75}{[1 + r(0;1)]^1} + \frac{104,75}{[1 + r(0;2)]^2}$$

o que resulta em 1 equação para 2 incógnitas

- Como já sabemos a taxa spot a 1 anos, substituímos na expressão acima obtendo 1 equação para 1 incógnita

$$\begin{aligned} 105,7685 &= \frac{4,75}{[1 + 1,2855\%]^1} + \frac{104,75}{[1 + r(0;2)]^2} \\ \Leftrightarrow 101,0788 &= \frac{104,75}{[1 + r(0;2)]^2} \\ \Leftrightarrow r(0;2) &= \left(\frac{104,75}{101,0788} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1,7998\% \end{aligned}$$

Bootstrapping num “mundo perfeito” (4/6)

- Para obter a taxa a 3 anos, utilizamos a cotação da OT 3a e a mesma técnica

$$101,2932 = \frac{3}{[1 + r(0;1)]^1} + \frac{3}{[1 + r(0;2)]^2} + \frac{103}{[1 + r(0;3)]^3}$$

- Substituímos as taxas spot a 1 e 2 anos, que já conhecemos, para podermos determinar a taxa spot a 3 anos

$$101,2932 = \frac{3}{[1 + 1,2855\%]^1} + \frac{3}{[1 + 1,7998\%]^2} + \frac{103}{[1 + r(0;3)]^3}$$

$$\Leftrightarrow 95,4364 = \frac{103}{[1 + r(0;3)]^3}$$

$$\Leftrightarrow r(0;3) = \left(\frac{103}{95,4364} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 2,5749\%$$

Bootstrapping num “mundo perfeito” (5/6)

- Dá para perceber que este é um “mundo perfeito”:
 - a maturidade dos cash-flows das obrigações coincide exactamente com as maturidades das taxas spot que pretendemos obter
 - e há sempre apenas uma incógnita
- Na realidade, o mais provável é que a maturidade dos cash-flows não coincida:
 - com as maturidades standard das taxas spot
 - e com a maturidade dos cash-flows das outras obrigações
- Nesse caso, temos que interpolar taxas

Bootstrapping num “mundo perfeito” (6/6)

- Uma comparação interessante é entre as taxas spot estimadas por bootstrap e as yield-to-maturity das obrigações (a opção tentadora mas **errada** para estimar as taxas spot para prazos mais longos)

Matur.	Taxa spot (estimada)	Yield-to-maturity
0,25	0,4932%	0,4932%
0,5	0,6503%	0,6503%
1	1,2855%	1,2855%
2	1,7998%	1,7881%
3	2,5749%	2,5468%

Outline

- 1 Estimação da estrutura temporal das taxas de juro
- 2 Bootstrapping num “mundo perfeito”
- 3 Bootstrapping num “mundo menos perfeito”

Duas incógnitas (1/5)

- A primeira imperfeição que vamos introduzir no nosso “mundo perfeito” é a necessidade de obter 2 taxas spot através da cotação de apenas uma obrigação

Obrig.	Matur.	Cupão	VC	JV	VT
BT 3m	0,25	0	99,8771	0	99,8771
BT 6m	0,5	0	99,6764	0	99,6764
BT 1a	1	0	98,7308	0	98,7308
OT 2a	2	4.75	105,7685	0	105,7685
OT 3a	3	3	101,2932	0	101,2932
OT 5a	5	5,25	108,2169	0	108,2169

Duas incógnitas (2/5)

- Neste caso as taxas spot a 4 e 5 anos têm que ser determinadas simultaneamente da cotação da OT 5a

$$\begin{aligned} 108,2169 &= \frac{5,25}{[1 + 1,2855\%]^1} + \frac{5,25}{[1 + 1,7998\%]^2} + \frac{5,25}{[1 + 2,5749\%]^3} \\ &+ \frac{5,25}{[1 + r(0;4)]^4} + \frac{105,25}{[1 + r(0;5)]^5} \\ \Leftrightarrow 93,1031 &= \frac{5,25}{[1 + r(0;4)]^4} + \frac{105,25}{[1 + r(0;5)]^5} \end{aligned}$$

- Temos 1 equação para 2 incógnitas, o que significa que existe um número infinito de combinações de valores para $r(0;4)$ e $r(0;5)$ que satisfazem a equação

Duas incógnitas (3/5)

- Para resolver este problema o que fazemos é obter $r(0;4)$ por interpolação linear das taxas $r(0;3)$ e $r(0;5)$

$$\begin{aligned}r(0;4) &= r(0;3) + \frac{r(0;5) - r(0;3)}{5 - 3} \times (4 - 3) \\&= r(0;3) + \frac{r(0;5) - r(0;3)}{2} \\&= \frac{r(0;3) + r(0;5)}{2} \\&= \frac{2,5749\% + r(0;5)}{2}\end{aligned}$$

Duas incógnitas (4/5)

- Substituindo na equação para o preço da OT 5a

$$93,1031 = \frac{5,25}{\left[1 + \frac{2,5749\% + r(0;5)}{2}\right]^4} + \frac{105,25}{[1 + r(0;5)]^5}$$

- Esta equação já conseguimos resolver (1 equação para 1 incógnita)
- Para resolver esta equação utilizamos os mesmos métodos que utilizámos para calcular a yield-to-maturity:
 - por tentativas e interpolação (low-tech)
 - numericamente, usando o Solver do Excel ou uma calculadora com função solve

Duas incógnitas (5/5)

- Neste caso obtemos²

$$r(0; 5) = 3,5395\%$$

$$r(0; 4) = \frac{2,5749\% + r(0; 5)}{2} = \frac{2,5749\% + 3,5395\%}{2} = 3,0572\%$$

²Quando fiz este exemplo, considerei $r(0; 4) = 3,1016\%$ e $r(0; 5) = 3,5376\%$. Não obtemos estas taxas porque parte da informação se perde ao ter que determinar 2 taxas spot do preço de apenas 1 obrigação.

Não coincidência de maturidades (1/9)

- A segunda imperfeição consiste na não coincidência dos prazos dos cash-flows com as maturidades das taxas spot que queremos determinar

Obrig.	Matur.	Cupão	VC	JV	VT	Data CFs
BT A	0,2	0	99,9079	0	99,9079	0,2
BT B	0,6	0	99,5365	0	99,5365	0,6
BT C	0,9	0	98,9687	0	98,9687	0,9
OT A	1,8	4,75	105,3860	0.95	106,3360	0,8; 1,8
OT B	3,1	3	101,1831	2.7	103,8831	0,1; 1,1; 2,1; 3,1

- Queremos determinar as taxas spot a 0,25, 0,5, 1, 2 e 3 anos
- Estas taxas serão obtidas por interpolação linear (e por vezes extrapolação) das taxas para as maturidades indicadas no quadro acima
- **Interpolation-o-meter: 0**

Não coincidência de maturidades (2/9)

- Das cotações dos BTs A, B e C obtemos as taxas de juro a 0,2, 0,6 e 0,9 anos

$$r(0; 0, 2) = \left(\frac{100}{99,9079} \right)^{\frac{1}{0,2}} - 1 = 0,4618\%$$

$$r(0; 0, 6) = \left(\frac{100}{99,5365} \right)^{\frac{1}{0,6}} - 1 = 0,7773\%$$

$$r(0; 0, 9) = \left(\frac{100}{98,9687} \right)^{\frac{1}{0,9}} - 1 = 1,1585\%$$

- As taxas spot a 0,25 e 0,5 anos obtêm-se por interpolação linear das taxas a 0,2 e 0,6 anos

$$\begin{aligned} r(0; 0, 25) &= r(0; 0, 2) + \frac{r(0; 0, 6) - r(0; 0, 2)}{0,6 - 0,2} \times (0,25 - 0,2) \\ &= 0,4618\% + \frac{0,7773\% - 0,4618\%}{0,6 - 0,2} \times (0,25 - 0,2) = 0,5012\% \end{aligned}$$

$$r(0; 0, 5) = r(0; 0, 2) + \frac{r(0; 0, 6) - r(0; 0, 2)}{0,6 - 0,2} \times (0,5 - 0,2) = 0,6984\%$$

- Interpolation-o-meter: 2

Não coincidência de maturidades (3/9)

- De seguida, usamos a OT A para determinar $r(0; 1, 8)$

$$106,3360 = \frac{4,75}{[1 + r(0; 0, 8)]^{0,8}} + \frac{104,75}{[1 + r(0; 1, 8)]^{1,8}}$$

- A taxa $r(0; 0, 8)$ pode ser interpolada das taxas $r(0; 0, 6)$ e $r(0; 0, 9)$

$$r(0; 0, 8) = r(0; 0, 6) + \frac{r(0; 0, 9) - r(0; 0, 6)}{0,9 - 0,6} \times (0,8 - 0,6) = 1,0314\%$$

- Substituindo na equação para o preço da OT A

$$\begin{aligned} 106,3360 &= \frac{4,75}{[1 + 1,0314\%]^{0,8}} + \frac{104,75}{[1 + r(0; 1, 8)]^{1,8}} \\ \Leftrightarrow 101,6248 &= \frac{104,75}{[1 + r(0; 1, 8)]^{1,8}} \\ \Leftrightarrow r(0; 1, 8) &= \left(\frac{104,75}{101,6248} \right)^{\frac{1}{1,8}} - 1 = 1,6969\% \end{aligned}$$

- Interpolation-o-meter: 3

Não coincidência de maturidades (4/9)

- Podemos agora obter a taxa $r(0; 1)$ por interpolação das taxas $r(0; 0, 9)$ e $r(0; 1, 8)$, obtendo

$$r(0; 1) = r(0; 0, 9) + \frac{r(0; 1, 8) - r(0; 0, 9)}{1, 8 - 0, 9} \times (1 - 0, 9) = 1, 2183\%$$

- De seguida, utilizamos a OT B para determinar $r(0; 3, 1)$ e $r(0; 2, 1)$

$$\begin{aligned} 103, 8831 &= \frac{3}{[1 + r(0; 0, 1)]^{0, 1}} + \frac{3}{[1 + r(0; 1, 1)]^{1, 1}} \\ &+ \frac{3}{[1 + r(0; 2, 1)]^{2, 1}} + \frac{103}{[1 + r(0; 3, 1)]^{3, 1}} \end{aligned}$$

- A taxa $r(0; 0, 1)$ pode ser extrapolada das taxas $r(0; 0, 2)$ e $r(0; 0, 6)$
- A taxa $r(0; 1, 1)$ pode ser interpolada das taxas $r(0; 0, 9)$ e $r(0; 1, 8)$

$$r(0; 0, 1) = 0, 3829\%, \quad r(0; 1, 1) = 1, 2781\%$$

- Interpolation-o-meter: 6

Não coincidência de maturidades (5/9)

- Quanto à taxa $r(0; 2, 1)$ temos duas hipóteses:
 - ou extrapolamos a partir das taxas $r(0; 0, 9)$ e $r(0; 1, 8)$
 - ou interpolamos a partir das taxas $r(0; 1, 8)$ e $r(0; 3, 1)$, e neste caso precisamos de utilizar métodos numéricos para determinar $r(0; 3, 1)$
- Vamos optar pela segunda hipótese para variar

$$\begin{aligned}r(0; 2, 1) &= r(0; 1, 8) + \frac{r(0; 3, 1) - r(0; 1, 8)}{3, 1 - 1, 8} \times (2, 1 - 1, 8) \\&= r(0; 1, 8) + \frac{3}{13} [r(0; 3, 1) - r(0; 1, 8)] \\&= \frac{10}{13} r(0; 1, 8) + \frac{3}{13} r(0; 3, 1) \\&= \frac{10}{13} \times 1,6969\% + \frac{3}{13} r(0; 3, 1)\end{aligned}$$

- Interpolation-o-meter: 7

Não coincidência de maturidades (6/9)

- Substituindo na equação para o preço da OT B

$$\begin{aligned}
 103,8831 &= \frac{3}{[1 + 0,3829\%]^{0,1}} + \frac{3}{[1 + 1,2781\%]^{1,1}} \\
 &+ \frac{3}{\left[1 + \frac{10}{13} \times 1,6969\% + \frac{3}{13} r(0; 3, 1)\right]^{2,1}} + \frac{103}{[1 + r(0; 3, 1)]^{3,1}} \\
 \Leftrightarrow 97,9258 &= \frac{3}{\left[1 + \frac{10}{13} \times 1,6969\% + \frac{3}{13} r(0; 3, 1)\right]^{2,1}} + \frac{103}{[1 + r(0; 3, 1)]^{3,1}}
 \end{aligned}$$

- Utilizando métodos numéricos determinamos que

$$r(0; 3, 1) = 2,6275\%$$

$$r(0; 2, 1) = \frac{10}{13} \times 1,6969\% + \frac{3}{13} \times 2,6275\% = 1,9117\%$$

Não coincidência de maturidades (7/9)

- Podemos finalmente obter:

- $r(0; 2)$ interpolando das taxas $r(0; 1, 8)$ e $r(0; 2, 1)$
- $r(0; 3)$ interpolando das taxas $r(0; 2, 1)$ e $r(0; 3, 1)$

$$r(0; 2) = 1,8401\%, \quad r(0; 3) = 2,5559\%$$

- Interpolation-o-meter: 9

Não coincidência de maturidades (8/9)

- Com tantas interpolações obviamente que introduzimos erros

Matur.	Taxa spot (estimada)	Taxa spot (subjacente) ³
0,25	0,5012%	0,4932%
0,5	0,6984%	0,6503%
1	1,2183%	1,2855%
2	1,8401%	1,7998%
3	2,5559%	2,5749%

³Taxas spot quer serviram de base para calcular as cotações das obrigações.

Não coincidência de maturidades (9/9)

