

Investimentos

António M. R. G. Barbosa

ISCTE  **Business School**
Instituto Universitário de Lisboa

Dia 29: 26/Abr/12

Sumário

1 SML, β e α

2 Single Index Model

Outline

1 SML, β e α

2 Single Index Model

SML e β (1/3)

- Relembremos a equação da SML

$$E(r_i) = r_f + \underbrace{\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M}}_{\text{market price of risk}} \times \underbrace{\rho_{i,M}\sigma_i}_{\text{risco sistemático}}$$

- A forma mais comum de apresentar a SML é no entanto

$$E(r_i) = r_f + \underbrace{[E(r_M) - r_f]}_{\text{prémio de risco de mercado}} \times \underbrace{\frac{\rho_{i,M}\sigma_i}{\sigma_M}}_{=\beta_i}$$

SML e β (2/3)

- $E(r_M) - r_f$ é o prémio de risco de mercado:
 - corresponde à rentabilidade adicional da carteira cópia de mercado face à taxa de juro sem risco
 - e visa remunerar o risco sistemático da carteira de mercado (σ_M)
- $\beta_i = \frac{\rho_{i,M}\sigma_i}{\sigma_M} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$ (o beta da acção) corresponde ao rácio entre o risco sistemático da acção i ($\rho_{i,M}\sigma_i$) e o risco sistemático da carteira de mercado (σ_M)
 - ou seja, o β_i é uma medida **relativa** do risco sistemático da acção, tendo o risco da carteira cópia de mercado como referência
- Portanto, se o prémio por assumirmos um risco sistemático de σ_M é de $E(r_M) - r_f$, então se assumirmos β_i vezes esse risco sistemático, devemos ser compensados com um prémio de $\beta_i \times [E(r_M) - r_f]$

SML e β (3/3)

- Sendo uma medida do risco sistemático da acção, o β_i mede a sensibilidade da rentabilidade do activo i face a variações da rentabilidade do mercado (o factor de risco sistemático):
 - quando o valor da carteira de mercado varia em 1%, a acção tende a subir $\beta\%$ (excluindo factores de risco específico)
 - assim, um activo com $\beta > 1$ amplifica as variações do mercado (activo agressivo)
 - um activo com $0 < \beta < 1$ atenua as variações do mercado (activo defensivo)
 - e um activo com $\beta < 0$ varia no sentido oposto ao do mercado, o que o torna num óptimo activo defensivo

β da carteira (1/2)

- A SML aplica-se a qualquer carteira, diversificada ou não, e não apenas a activos individuais
- A rentabilidade da carteira corresponde a $E(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i)$
- Como a SML se aplica a cada um dos n activos

$$E(r_i) = r_f + \beta_i [E(r_M) - r_f], i = 1, \dots, n$$

temos então que

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i r_f + \sum_{i=1}^n w_i \beta_i [E(r_M) - r_f] = r_f + [E(r_M) - r_f] \underbrace{\sum_{i=1}^n w_i \beta_i}_{\beta_p}$$

- Ou seja, a SML aplica-se a qualquer carteira de activos e o seu β é dado por

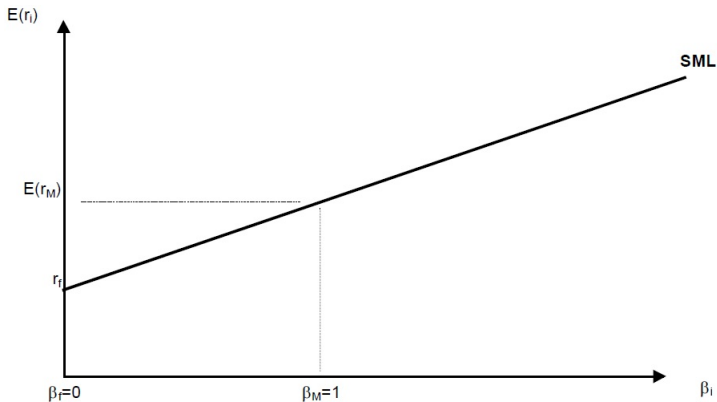
$$\beta_p = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i$$

β da carteira (2/2)

- Podemos confirmar que o β da carteira pode ser obtido da mesma forma do β de uma acção

$$\begin{aligned}\beta_p &= \sum_{i=1}^n w_i \beta_i = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \text{cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} \\ &= \frac{\text{cov}(\sum_{i=1}^n w_i r_i, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\text{cov}(r_p, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma_{p,M}}{\sigma_M^2}\end{aligned}$$

Representação gráfica da SML



- A inclinação da SML é o prêmio de risco de mercado $E(r_M) - r_f$

Localização das carteiras face à SML

- Em equilíbrio, todos activos/carteiras estão localizados sobre a SML
- No entanto, em situações de desequilíbrio, estes podem-se situar em qualquer ponto do espaço média- β
 - activos sobre a SML remuneram exactamente o seu risco sistemático (situação de equilíbrio)
 - activos situados acima da SML geram uma rentabilidade esperada superior à exigida para remunerar o seu nível de risco (logo constituem uma oportunidade de compra)
 - activos situados abaixo da SML geram uma rentabilidade esperada insuficiente para remunerar o seu nível de risco (logo constituem uma oportunidade de venda)

α de Jensen

- À diferença entre a rentabilidade esperada e a rentabilidade de equilíbrio dada pela SML, damos o nome de α de Jensen

$$\alpha = E(r_i) - E^{SML}(r_i)$$

- Carteiras com $\alpha > 0$ situam-se acima da SML
- Carteiras com $\alpha < 0$ situam-se abaixo da SML
- Carteiras com $\alpha = 0$ situam-se na SML

Outline

1 SML, β e α

2 Single Index Model

Single Index Model

- O Single Index Model relaciona o excesso rentabilidade de uma acção/carteira com o excesso de rentabilidade do mercado ou de um índice representativo do mercado

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i (r_M - r_f) + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

- A diferença para o CAPM é que o Single Index Model considera rentabilidades observadas (r_i) em vez de rentabilidades esperadas ($E(r_i)$)
- O Single Index Model tem a vantagem prática de permitir a estimação dos parâmetros α e β para a acção i
 - obtêm-se as séries de rentabilidades observadas para o activo, mercado e activo sem risco
 - e faz-se a regressão linear de $r_M - r_f$ sobre $r_i - r_f$ para obter uma estimativa dos parâmetros α_i e β_i

Os 3 componentes da rentabilidade

- O Single Index Model também permite decompor a rentabilidade observada em 3 componentes
- Reescrevendo a equação do Single Index Model obtemos

$$r_i = \underbrace{\alpha_i}_{\text{componente 1}} + \underbrace{r_f + \beta_i (r_M - r_f)}_{\text{componente 2}} + \underbrace{\varepsilon_i}_{\text{componente 3}}$$

- o 1º componente, α_i , corresponde ao excesso de rentabilidade esperado
- o 2º componente, $r_f + \beta_i (r_M - r_f)$, corresponde à rentabilidade de equilíbrio associada ao factor de risco de mercado
- e o 3º componente, ε_i , corresponde à rentabilidade residual, associada a factores de risco específicos

Rentabilidade esperada e desequilíbrios

- Quanto à rentabilidade média (esperada), esta é

$$E(r_i) = \alpha_i + \underbrace{r_f + \beta_i [E(r_M) - r_f]}_{E^{SML}(r_i)}$$

- Ou seja, o Single Index Model admite a existência de desequilíbrios ($\alpha_i \neq 0$)

Decomposição do risco (1/2)

- O Single Index Model também nos permite decompor o risco total em risco sistemático e risco específico

$$\begin{aligned} Var(r_i) &= Var[\alpha_i + r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \varepsilon_i] \\ &= Var[\beta_i(r_M - r_f)] + Var(\varepsilon_i) \\ &= \underbrace{\beta_i^2 Var(r_M)}_{\text{risco sistemático}} + \underbrace{Var(\varepsilon_i)}_{\text{risco específico}} \end{aligned}$$

- Esta decomposição é para a variância
- Mas normalmente apresenta-se o risco na forma de desvio-padrão
 - basta então considerar a raiz quadrada de cada um dos componentes acima
- Note-se que a soma do risco sistemático e do risco específico é igual ao risco total **apenas se** considerarmos variâncias

Decomposição do risco (2/2)

- Podemos confirmar que o risco sistemático corresponde à definição que vimos anteriormente

$$\sqrt{\beta_i^2 \text{Var}(r_M)} = \beta_i \sigma_M = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} \sigma_M = \frac{\rho_{i,M} \sigma_i \sigma_M}{\sigma_M^2} \sigma_M = \rho_{i,M} \sigma_i$$

- O risco específico pode ser obtido indirectamente através do risco total e risco sistemático

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_\varepsilon^2 \Leftrightarrow \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_i^2 - \beta_i^2 \sigma_M^2 \Rightarrow \sigma_\varepsilon = \sqrt{\sigma_i^2 - \beta_i^2 \sigma_M^2}$$

- Ou seja, em termos de desvios-padrão

$$\text{risco específico} = \sqrt{\text{risco total}^2 - \text{risco sistemático}^2}$$

Estimação das covariâncias

- O Single Index Model também permite simplificar bastante a estimação das covariâncias, pois

$$\begin{aligned} Cov(r_i, r_j) &= Cov[\alpha_i + r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \varepsilon_i, \alpha_j + r_f + \beta_j(r_M - r_f) + \varepsilon_j] \\ &= Cov[\beta_i(r_M - r_f) + \varepsilon_i, \beta_j(r_M - r_f) + \varepsilon_j] \\ &= Cov[\beta_i(r_M - r_f), \beta_j(r_M - r_f)] + \underbrace{Cov[\beta_i(r_M - r_f), \varepsilon_j]}_{=0} \\ &\quad + \underbrace{Cov[\varepsilon_i, \beta_j(r_M - r_f)]}_{=0} + \underbrace{Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)}_{=0} \\ &= \beta_i \beta_j \sigma_M^2 \end{aligned}$$

- Logo precisamos apenas de estimar $2n + 1$ parâmetros (n betas e $n + 1$ variâncias) em vez de $n + \frac{n^2 - n}{2}$ parâmetros

Regressão e linha característica

- Como já foi mencionado, podemos estimar os parâmetros α e β através da regressão linear de $r_M - r_f$ sobre $r_i - r_f$
- A recta de regressão chama-se de linha característica da acção
- A inclinação da linha característica corresponde à estimativa de β_i
- E a ordenada na origem ($r_M - r_f = 0$) corresponde à estimativa α_i
- A dispersão das observações em torno da linha característica permite-nos visualizar o nível de risco específico:
 - quanto maior o risco específico, maior essa dispersão
 - se não houvesse risco específico ($\sigma_\varepsilon = 0$) então $\varepsilon_i = 0$ e todas as observações estariam em cima da linha característica

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i (r_M - r_f)$$