

# Investimentos

António M. R. G. Barbosa

**ISCTE**  **Business School**  
**Instituto Universitário de Lisboa**

Dia 28: 24/Abr/12

# Sumário

- 1 Capital Asset Pricing Model (CAPM)
- 2 Capital Market Line (CML)
- 3 Security Market Line (SML)

# Outline

1 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

2 Capital Market Line (CML)

3 Security Market Line (SML)

# CAPM

- O *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) é um modelo de equilíbrio que relaciona a taxa de rentabilidade esperada de um activo ou de uma carteira de activos com o seu risco
- Como iremos ver, o CAPM diz-nos que

$$E(r_i) = r_f + \underbrace{\beta_i}_{\text{quantidade de risco}} \times \underbrace{[E(r_M) - r_f]}_{\text{prémio de risco do mercado}}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{prémio de risco da acção } i}$

onde  $M$  é a carteira cópia do mercado

- Portanto, o investimento na acção  $i$  é remunerado em função do seu risco
  - mas não pelo seu risco total (que seria  $\sigma_i$ )
  - o único risco que é remunerado é o risco sistemático ( $\beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$ )
- Para derivar o CAPM, precisamos de um conjunto de pressupostos simplificadores

# Pressupostos do CAPM (1/3)

- O mercado funciona em concorrência perfeita
  - investidores são price-takers, ou seja, não têm dimensão para influenciar o preço dos activos
- Todos os investidores possuem o mesmo horizonte temporal de investimento
  - logo apenas a média e variância da taxa de rentabilidade esperada para esse horizonte temporal interessam e podemos trabalhar com um modelo de apenas um período
- O conjunto de possibilidades de investimento é composto por activos transaccionados em mercado e perfeitamente divisíveis
  - se os activos não forem transaccionados, não podemos ajustar a nossa exposição a esses activos
  - se os activos não forem perfeitamente divisíveis, apenas uma pequena parte das carteiras que considerámos anteriormente como estando no conjunto de possibilidades de investimento podem de facto ser obtidas

## Pressupostos do CAPM (2/3)

- Não existem impostos nem custos de transacção
  - a existência de custos de transacção impede os investidores de diversificarem completamente as suas carteiras
- Todos os investidores têm acesso gratuito e instantâneo a toda a informação (mercados eficientes)
- É possível efectuar aplicações e financiamentos à taxa de juro do activo sem risco, a qual é idêntica para todos os investidores
- Investidores são racionais, não saciáveis e avessos ao risco, formulando decisões de investimento com base apenas na taxa de rentabilidade esperada e respectivo desvio-padrão das carteiras
- Os investidores possuem expectativas homogéneas
  - ou seja, todos estimam as mesmas rentabilidades esperadas e variâncias

## Pressupostos do CAPM (3/3)

- Muitos dos pressupostos do CAPM vão no sentido de todos os investidores serem iguais:
  - todos são price-takers
  - todos têm o mesmo horizonte de investimento
  - todos têm a mesma informação e formam as mesmas expectativas
  - todos têm acesso aos mesmo activos, incluindo o activo sem risco
  - todos formulam decisões da mesma forma
- Os únicos pontos em que os investidores podem ser diferentes são:
  - a riqueza inicial
  - e o nível de aversão ao risco

# Outline

- 1 Capital Asset Pricing Model (CAPM)
- 2 Capital Market Line (CML)
- 3 Security Market Line (SML)

# Consequências dos pressupostos do CAPM

- Se as expectativas são homogêneas então:
  - todos os investidores chegam aos mesmos valores para a rentabilidade esperada, desvio-padrão e correlações para todos os activos
  - a fronteira de variância mínima de Markowitz será a mesma para todos os investidores
- Adicionalmente, se a taxa de juro sem risco é igual para todos os investidores
  - todos os investidores chegarão à mesma carteira de tangência
  - logo todos os investidores têm a mesma fronteira eficiente global

## Two fund monetary separation

- Logo, todos os investidores investem numa carteira composta pelos mesmos 2 activos:
  - o activo sem risco
  - e a carteira de tangência, que é a mesma para todos
- A este resultado dá-se o nome de *two fund monetary separation*
- O peso dado a cada um destes 2 activos dependerá do nível de aversão ao risco, e pode diferir de investidor para investidor

# Carteira de tangência = carteira cópia de mercado (1/2)

- Em equilíbrio, todos os activos têm que ser detidos por algum investidor (oferta = procura)
- Como estamos a assumir que todos os investidores investem na mesma carteira de activos com risco (carteira de tangência), esta terá então que coincidir com a carteira cópia de mercado
  - a carteira cópia de mercado é aquela que inclui todos os activos existentes na economia numa proporção igual à que cada activo tem na economia
- Na prática, assume-se que a carteira de tangência corresponde a um índice de acções e não à carteira cópia do mercado:
  - os índices de acções representam o mercado accionista, que é uma parte importante, mas não a única, do mercado
  - é mais fácil calcular rentabilidades esperadas e variâncias para os índices de acções do que para a totalidade do mercado

# Carteira de tangência = carteira cópia de mercado (1/2)

- Porque é que a carteira de tangência tem de ser a carteira cópia de mercado?
- Se por algum motivo um activo tiver um peso na carteira de tangência inferior ao que tem no mercado (procura < oferta) o seu preço desceria (aumentando a rentabilidade esperada) até que fosse suficientemente atractivo para ser incluído na mesma proporção do peso no mercado (procura = oferta)
- No caso oposto (procura > oferta), o preço do activo subiria (diminuindo a rentabilidade esperada) até que o seu peso na carteira de tangência fosse igual ao seu peso no mercado (procura = oferta)

# Capital Market Line (CML) (1/2)

- A *Capital Market Line* (CML) não é mais que a fronteira eficiente global quanto a carteira de tangência ( $T$ ) é a carteira cópia do mercado ( $M$ )

$$E(r_p) = r_f + \underbrace{\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M}}_{\text{market price of risk}} \sigma_p$$

- A carteira óptima de cada investidor situar-se-á algures na CML
- Note-se que qualquer carteira na CML é uma carteira completamente diversificada:
  - isto porque resulta da combinação da carteira cópia de mercado (obviamente diversificada) com o activo sem risco
- Logo, qualquer carteira na CML tem **apenas risco sistemático**:
  - o risco específico encontra-se totalmente diversificado
  - assim, neste caso  $\sigma_p$  é em simultâneo o risco total e o risco sistemático

## Capital Market Line (CML) (2/2)

- $E(r_M) - r_f$  é o prémio de risco do mercado accionista:
  - corresponde à remuneração extra que devemos exigir para investir no mercado accionista em vez de investir no activo sem risco
- $\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M}$  é o *market price of risk* (preço de mercado do risco):
  - corresponde à remuneração extra que devemos exigir por unidade de risco **sistemático** (medido pelo desvio-padrão) assumido quando investimos numa **carteira eficiente**
- Da CML resulta que a rentabilidade a exigir para qualquer **carteira eficiente** é igual à taxa de juro sem risco acrescida de um prémio de risco que é função do nível de **risco sistemático** da carteira.

# Outline

- 1 Capital Asset Pricing Model (CAPM)
- 2 Capital Market Line (CML)
- 3 Security Market Line (SML)

# SML vs. CML

- A CML dá-nos a rentabilidade a exigir para um investimento numa **carteira eficiente e completamente diversificada**
- Por sua vez, a *Security Market Line* (SML) dá-nos a rentabilidade a exigir para um **activo** (ou carteira) que se destina **a ser integrado numa carteira completamente diversificada**
- Dado que a inclusão do activo numa carteira diversificada eliminará o seu risco específico, apenas o risco sistemático do activo deverá ser compensado:
  - todos os investidores têm carteiras diversificadas, logo o activo será incluído no seio de uma carteira diversificada
  - se um activo estiver a remunerar por mais do que esse contributo para o risco da carteira diversificada, o activo estará barato
  - logo, todos os investidores desejarão adquirir o activo
  - e o seu preço tenderá a subir (e a rentabilidade a descer) até que este remunere apenas o seu contributo para o risco da carteira diversificada

## Combinação de um activo com a carteira $M$ (1/4)

- Para derivar a SML vamos considerar a combinação entre um qualquer activo  $i$  e a carteira cópia de mercado  $M$
- Esta combinação tem rentabilidade esperada e desvio-padrão

$$E(r_p) = w_i E(r_i) + (1 - w_i) E(r_M)$$

$$\sigma_p = \sqrt{w_i^2 \sigma_i^2 + (1 - w_i)^2 \sigma_M^2 + 2w_i(1 - w_i) \sigma_{i,M}}$$

- Já sabemos que a combinação de 2 activos com risco corresponde a uma hipérbole no espaço média-desvio-padrão
- Obviamente que esta hipérbole se situará no interior da fronteira de variância mínima de Markowitz:
  - fora não pode estar, dado que isso implicaria sairmos do conjunto de possibilidades de investimento (quando consideramos apenas activos com risco)
  - e, como o investimento numa única acção não é eficiente (se houver mais que 2 activos), a carteira  $i$  não estará na fronteira eficiente de Markowitz

## Combinação de um activo com a carteira $M$ (2/4)

- Gráficamente, é intuitivo que a hipérbole que liga a acção  $i$  à carteira  $M$  é tangente à fronteira de variância mínima de Markowitz, e logo também à CML, no ponto  $M$
- E isto é verdade para qualquer activo  $i$

## Combinação de um activo com a carteira $M$ (3/4)

- A inclinação da hipérbole que liga a acção  $i$  à carteira  $M$  é

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(r_p)}{\partial \sigma_p} &= \frac{\frac{\partial E(r_p)}{\partial w_i}}{\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i}} = \frac{\frac{\partial [w_i E(r_i) + (1-w_i) E(r_M)]}{\partial w_i}}{\frac{\partial \sqrt{w_i^2 \sigma_i^2 + (1-w_i)^2 \sigma_M^2 + 2w_i(1-w_i) \sigma_{i,M}}}{\partial w_i}} \\ &= \frac{E(r_i) - E(r_M)}{\frac{\frac{1}{2} [2w_i \sigma_i^2 - 2(1-w_i) \sigma_M^2 + 2(1-2w_i) \sigma_{i,M}]}{\sqrt{w_i^2 \sigma_i^2 + (1-w_i)^2 \sigma_M^2 + 2w_i(1-w_i) \sigma_{i,M}}}} \\ &= \frac{[E(r_i) - E(r_M)] \sqrt{w_i^2 \sigma_i^2 + (1-w_i)^2 \sigma_M^2 + 2w_i(1-w_i) \sigma_{i,M}}}{w_i \sigma_i^2 - (1-w_i) \sigma_M^2 + (1-2w_i) \sigma_{i,M}} \end{aligned}$$

- No ponto  $M$ , a carteira está 100% investida na carteira  $M$  ( $w_i = 0$ ) e a inclinação da hipérbole é

$$\left. \frac{\partial E(r_p)}{\partial \sigma_p} \right|_{w_i=0} = \frac{[E(r_i) - E(r_M)] \sigma_M}{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}$$

# Combinação de um activo com a carteira $M$ (4/4)

- Sabemos que esta inclinação tem que ser igual à inclinação da CML

$$\underbrace{\frac{[E(r_i) - E(r_M)] \sigma_M}{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}}_{\text{inclinação hipérbole no ponto } M} = \underbrace{\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M}}_{\text{inclinação da CML}}$$

- Resolvendo para  $E(r_i)$

$$\begin{aligned} \frac{[E(r_i) - E(r_M)] \sigma_M}{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2} &= \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \\ \Leftrightarrow E(r_i) &= E(r_M) + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \frac{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M} \\ \Leftrightarrow E(r_i) &= E(r_M) + [E(r_M) - r_f] \left( \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow E(r_i) &= r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M} \end{aligned}$$

## SML

- A equação da SML é então

$$\begin{aligned}
 E(r_i) &= r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M} \\
 &= r_f + \underbrace{\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M}}_{\text{market price of risk}} \times \underbrace{\rho_{i,M}\sigma_i}_{\text{risco sistemático}}
 \end{aligned}$$

- Nesta formulação, a SML dá-nos a rentabilidade esperada a exigir pela acção  $i$  (em equilíbrio) em função:
  - da taxa de juro sem risco  $r_f$
  - do *market price of risk*  $\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M}$
  - e do risco sistemático da acção  $i$   $\frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M} = \rho_{i,M}\sigma_i \leq \sigma_i$
- A conclusão é que: **apenas o risco sistemático é remunerado**

# SML vs. CML

- Compare-se a SML com a CML

$$CML : E(r_p) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \times \sigma_p$$

$$SML : E(r_i) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \times \rho_{i,M} \sigma_i$$

- A equação da SML é semelhante à CML:
  - a diferença é que a CML é apenas para combinações do activo sem risco com a carteira de mercado  $M$ , logo carteiras diversificadas em que o risco total  $\sigma_p$  contém apenas risco sistemático
  - a SML é para qualquer activo/carteira, pelo que tem que se considerar apenas o risco sistemático  $\rho_{i,M} \sigma_i$  e não o risco total ( $\sigma_i$ )