Investimentos

António M. R. G. Barbosa

ISCTE Business School
Instituto Universitário de Lisboa

Dia 26: 19/Abr/12

Sumário

1 Modelo de Tobin

Outline

1 Modelo de Tobin

Modelo de Tobin vs. modelo de Markowitz

- O modelo de Tobin expande o modelo de Markowitz ao permitir o investimento num activo sem risco
  - no modelo de Markowitz, todos os activos tinham risco

Activo sem risco

- Um activo sem risco caracteriza-se por oferecer uma taxa de rentabilidade (r_f) certa
  - por outras palavras $\sigma_f = 0$
- Como a taxa de rentabilidade do activo sem risco não varia, a covariância com a taxa de rentabilidade dos activos com risco é zero:
  - ou seja, $\sigma_{f,i} = \rho_{f,i} = 0$ para qualquer activo com risco i
- Um activo sem risco é por exemplo uma obrigação de curto prazo de um emitente soberano com capacidade de emitir moeda[1]
- Uma posição longa no activo sem risco corresponde a um depósito à taxa r_f
- E uma posição curta corresponde a um financiamento à taxa r_f

[1] O que já não é o caso dos países da zona Euro.

Combinações entre activos com risco e o activo sem risco (1/2)

- Consideremos uma carteira de activos com risco C, com rentabilidade esperada $E\left(r_C\right)$ e desvio padrão σ_C
- Se lhe juntarmos o activo com risco, a rentabilidade esperada da carteira fica

$$E\left(r_p\right) = w_C E\left(r_C\right) + w_f r_f$$

e o desvio-padrão fica

$$\sigma_p = \sqrt{w_C^2 \sigma_C^2 + w_f^2 \underbrace{\sigma_f^2}_{0} + 2 w_C w_f \underbrace{\sigma_{C,f}}_{0}} = \left| w_C \sigma_C \right|$$

- Se $w_C \geq 0$, então $\sigma_p = w_C \sigma_C$
- Se $w_C < 0$, então $\sigma_p = -w_C \sigma_C$

Combinações entre activos com risco e o activo sem risco (2/2)

- Note-se que da combinação da carteira de activos com risco com o activo sem risco:
  - podemos obter qualquer nível de risco e existem sempre 2 carteiras para o mesmo nível de risco (w_C e $-w_C$)
  - desde que $E(r_C) \neq r_f$ podemos obter qualquer nível de rentabilidade esperada e existe uma única carteira para cada nível de rentabilidade esperada

Capital allocation line (CAL) (1/4)

- Assim, para cada nível de rentabilidade esperada existe apenas um único e diferente nível de risco

$$\begin{cases} E\left(r_p\right) = w_C E\left(r_C\right) + w_f r_f \\ \sigma_p = \left|w_C \sigma_C\right| \\ w_C + w_f = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E\left(r_p\right) = w_C E\left(r_C\right) + \left(1 - w_C\right) r_f \\ \left|w_C\right| = \frac{\sigma_p}{\sigma_C} \\ w_f = 1 - w_C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E\left(r_p\right) = r_f + w_C\left[E\left(r_C\right) - r_f\right] \\ w_C = \pm\frac{\sigma_p}{\sigma_C} \\ w_f = 1 - w_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E\left(r_p\right) = r_f \pm \frac{E(r_C) - r_f}{\sigma_C}\sigma_p \\ w_C = \pm\frac{\sigma_p}{\sigma_C} \\ w_f = 1 - w_C \end{cases}$$

Capital allocation line (CAL) (2/4)

- À equação para a rentabilidade esperada

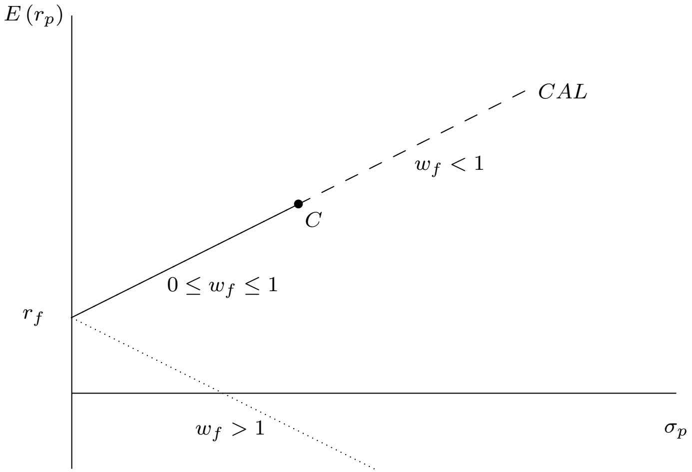
$$E\left(r_p\right) = r_f \pm \frac{E\left(r_C\right) - r_f}{\sigma_C}\sigma_p$$

  damos o nome de ***Capital Allocation Line*** (CAL)

- No espaço média-desvio-padrão, a CAL corresponde a 2 semi-rectas com:
  - ordenada na origem r_f
  - inclinação $\frac{E(r_C)-r_f}{\sigma_C}$ e $-\frac{E(r_C)-r_f}{\sigma_C}$

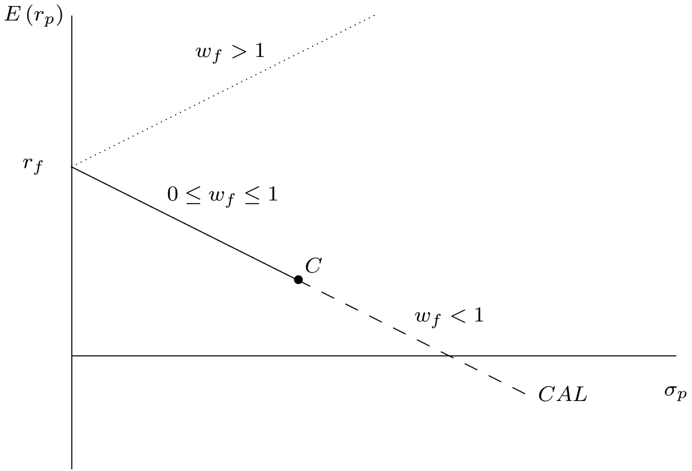
Capital allocation line (CAL) (3/4)

- CAL quando $E\left(r_C\right) > r_f$



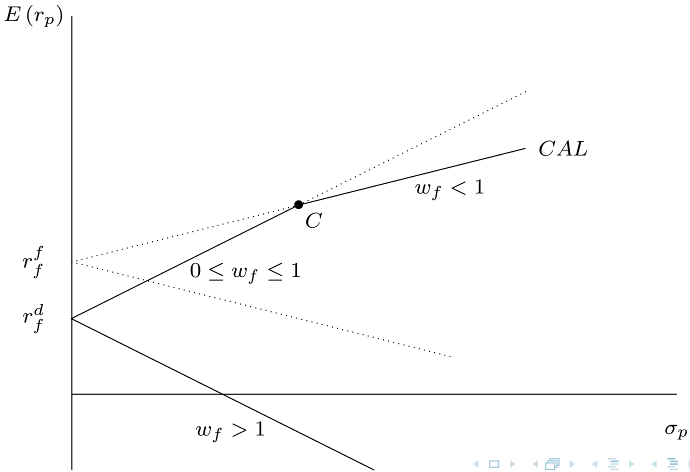
Capital allocation line (CAL) (4/4)

- CAL quando $E\left(r_C\right) < r_f$



CAL com diferentes taxas para depósitos e financiamentos

- Normalmente, a taxa dos depósitos (r_f^d) é inferior à taxa dos financiamentos (r_f^f)

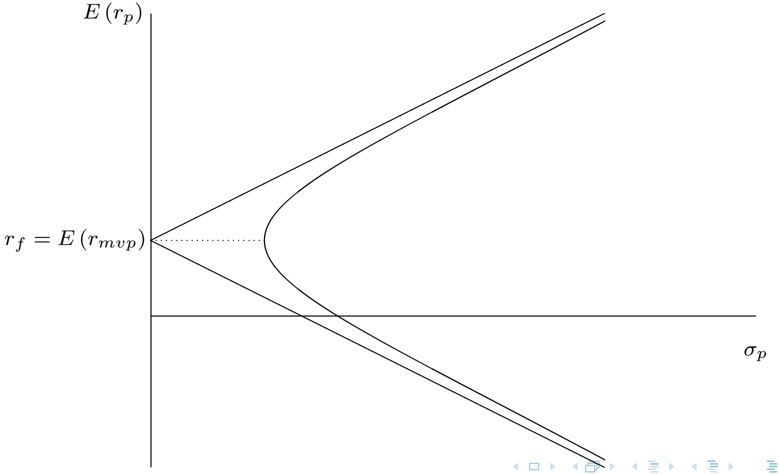


Expansão do conjunto de possibilidades de inv. (1/3)

- Como é óbvio, a introdução do activo sem risco expande o conjunto de possibilidades de investimento
  - continuamos a poder investir em carteiras apenas de activos com risco
  - mas podemos combinar todas essas carteiras com o activo sem risco
- Voltemos ao pressuposto de que a taxa de juro sem risco para depósitos e financiamentos é a mesma, r_f
- Se a taxa de juro sem risco for igual à rentabilidade esperada da carteira de activos com risco de variância mínima, $r_f = E(r_{mvp})$ então o conjunto de possibilidades de investimento corresponde à área delimitada pelas assimptotas da hipérbole que define a fronteira de variância mínima do modelo de Markowitz (apenas activos com risco)

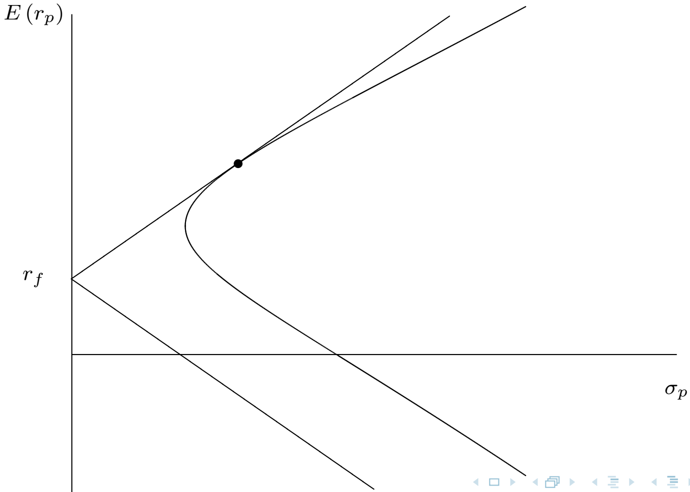
Expansão do conjunto de possibilidades de inv. (2/3)

- Quando $r_f = E\left(r_{mvp}\right)$, o novo conjunto de possibilidades de investimento corresponde à região entre as 2 semi-rectas



Expansão do conjunto de possibilidades de inv. (3/3)

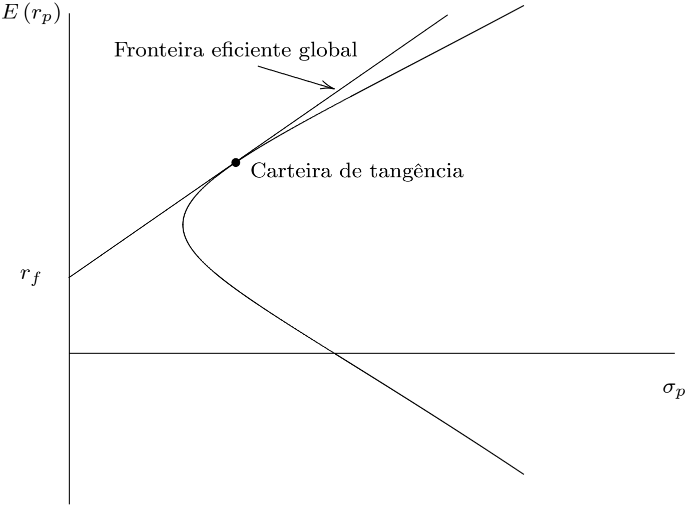
- E no caso de $r_f < E(r_{mvp})$, o novo c.p.i. corresponde à região entre as 2 semi-rectas com ângulo mais aberto possível



Expansão da fronteira eficiente (1/2)

- Como deve ter ficado óbvio do gráfico anterior, a fronteira eficiente também se expande
  - corresponde agora à semi recta com máxima inclinação, ou seja, tangente à fronteira eficiente de Markowitz
  - obtém-se combinando a carteira de activos com risco a que chamamos **carteira de tangência** (na fronteira eficiente de Markowitz) com o activo sem risco
- À nova fronteira eficiente chamamos de **fronteira eficiente global**
- Note-se que, de entre as carteiras da fronteira eficiente de Markowitz, a carteira de tangência é a única que é verdadeiramente eficiente quando consideramos o activo sem risco; **todas as outras deixam de ser eficientes**
- Portanto, de todas as carteiras investidas apenas em activos com risco, apenas uma nos interessa realmente: a carteira de tangência

Expansão da fronteira eficiente (2/2)



Identificação da carteira de tangência (1/5)

- Podemos identificar a carteira de tangência de uma de duas formas:
  - encontrando a carteira de activos com risco da fronteira eficiente de Markowitz que maximiza a inclinação da fronteira eficiente global

$$\max_{E(r_T)} \frac{E(r_T) - r_f}{\sigma_T} \; s.a. \; \sigma_T = \sqrt{\frac{1}{D}\left[C \times E(r_T)^2 - 2A \times E(r_T) + B\right]}$$

  - ou encontrando a carteira onde a inclinação da fronteira eficiente global é igual à inclinação da fronteira eficiente de Markowitz (logo as duas são tangentes)

$$\frac{E(r_T) - r_f}{\sqrt{\frac{1}{D}\left[CE(r_T)^2 - 2A \times E(r_T) + B\right]}} = \underbrace{\frac{1}{\frac{\partial \sqrt{\frac{1}{D}\left[CE(r_T)^2 - 2AE(r_T) + B\right]}}{\partial E(r_T)}}}_{\frac{\partial E(r_T)}{\partial \sigma_T}}$$

Identificação da carteira de tangência (2/5)

- Pelo primeiro método, resolvemos

$$\max_{E(r_T)} \frac{E(r_T) - r_f}{\sqrt{\frac{1}{D}\left[C \times E(r_T)^2 - 2A \times E(r_T) + B\right]}}$$

- A condição de primeira ordem é

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{D}\left[CE(r_T)^2 - 2A \times E(r_T) + B\right]}} - \frac{\frac{1}{2}\left[E(r_T) - r_f\right]\left[2\frac{C}{D}E(r_T) - 2\frac{A}{D}\right]}{\left\{\frac{1}{D}\left[CE(r_T)^2 - 2AE(r_T) + B\right]\right\}^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{D}\left[CE(r_T)^2 - 2AE(r_T) + B\right] - \frac{1}{2}\left[E(r_T) - r_f\right]\left[2\frac{C}{D}E(r_T) - 2\frac{A}{D}\right]}{\left\{\frac{1}{D}\left[CE(r_T)^2 - 2AE(r_T) + B\right]\right\}^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow CE(r_T)^2 - 2AE(r_T) + B - \left[E(r_T) - r_f\right]\left[CE(r_T) - A\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow CE(r_T)^2 - 2AE(r_T) + B - CE(r_T)^2 + (A + Cr_f)E(r_T) - Ar_f = 0$$

$$\Leftrightarrow (Cr_f - A)E(r_T) + B - Ar_f = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{E(r_T) = \frac{Ar_f - B}{Cr_f - A}}$$

Identificação da carteira de tangência (3/5)

- Usando o facto de $D = BC - A^2$, podemos rearranjar a expressão anterior da seguinte forma

$$E\left(r_T\right) = \frac{A}{C} - \frac{\frac{D}{C^2}}{r_f - \frac{A}{C}}$$

- O desvio-padrão da carteira de tangência pode depois ser obtido por substituição na equação da fronteira de variância mínima

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{D}\left[C \times E\left(r_T\right)^2 - 2A \times E\left(r_T\right) + B\right]}$$

Identificação da carteira de tangência (4/5)

- Lembrando que $E\left(r_{mvp}\right)=\frac{A}{C}$, daqui se retira facilmente que:
  - se $r_f=E\left(r_{mvp}\right)=\frac{A}{C}$ não existe uma carteira de tangência
    - estamos no caso em que o conjunto de possibilidades de investimento converge para a área entre as assimptotas da hipérbole que define a fronteira de variância mínima de Markowitz
  - se $r_f<E\left(r_{mvp}\right)=\frac{A}{C}$, a carteira de tangência é uma carteira eficiente
  - se $r_f>E\left(r_{mvp}\right)=\frac{A}{C}$, a carteira de tangência é uma carteira ineficiente!

Identificação da carteira de tangência (5/5)

- Pelo segundo método

$$\frac{E\left(r_T\right)-r_f}{\sqrt{\frac{1}{D}\left[CE\left(r_T\right)^2-2AE\left(r_T\right)+B\right]}}=\frac{1}{\frac{\partial\sqrt{\frac{1}{D}\left[CE(r_T)^2-2AE(r_T)+B\right]}}{\partial E(r_T)}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{E\left(r_T\right)-r_f}{\sqrt{\frac{1}{D}\left[CE\left(r_T\right)^2-2AE\left(r_T\right)+B\right]}}=\frac{1}{\frac{\frac{1}{2D}\left[2CE(r_T)-2A\right]}{\sqrt{\frac{1}{D}\left[CE(r_T)^2-2AE(r_T)+B\right]}}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{E\left(r_T\right)-r_f}{\sqrt{\frac{1}{D}\left[CE\left(r_T\right)^2-2AE\left(r_T\right)+B\right]}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{D}\left[CE\left(r_T\right)^2-2AE\left(r_T\right)+B\right]}}{\frac{1}{D}\left[CE\left(r_T\right)-A\right]}$$

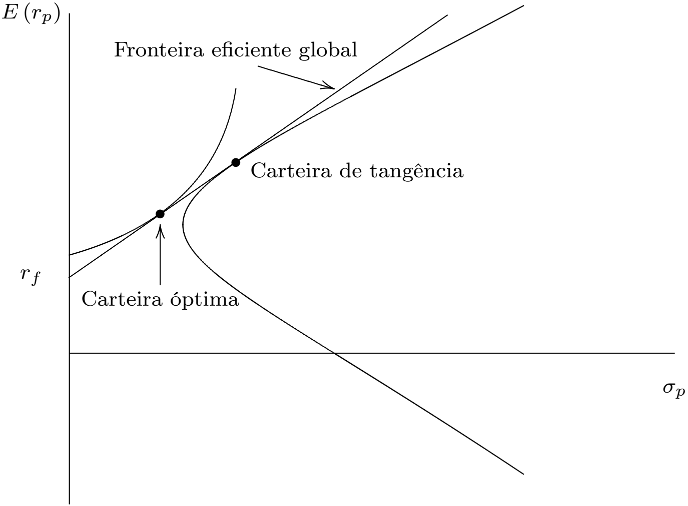
$$\Leftrightarrow\frac{1}{D}\left[CE\left(r_T\right)-A\right]\left[E\left(r_T\right)-r_f\right]=\frac{1}{D}\left[CE\left(r_T\right)^2-2AE\left(r_T\right)+B\right]$$

$$\Leftrightarrow E\left(r_T\right)=\frac{Ar_f-B}{Cr_f-A}\Leftrightarrow E\left(r_T\right)=\frac{A}{C}-\frac{\frac{D}{C^2}}{r_f-\frac{A}{C}}$$

Escolha da carteira óptima (1/4)

- Tal como no modelo de Markowitz:
  - apenas as carteiras que compõem a fronteira eficiente global poderão vir a ser escolhidas por investidores não saciáveis e avessos ao risco
    - ou seja, existe uma única carteira de activos com risco (a carteira de tangência) que pode vir a ser escolhida
    - só não sabemos é qual a combinação óptima entre o activo sem risco e a carteria de tangência
  - qual das carteiras da fronteira eficiente global é escolhida dependerá da função de utilidade do investidor
  - a carteira óptima corresponderá ao ponto de tangência entre uma curva de indiferença e a fronteira eficiente global

Escolha da carteira óptima (2/4)



Escolha da carteira óptima (3/4)

- Para identificar a carteira óptima analíticamente, procedemos como no modelo de Markowitz

$$\max_{E(r_p)} E\left[U\left(W\right)\right] = E\left(r_p\right) - \frac{\alpha}{2}\sigma_p^2 \; s.a. \qquad \underbrace{\sigma_p = \frac{E\left(r_p\right) - r_f}{E\left(r_T\right) - r_f}\sigma_T}_{\Leftrightarrow E(r_p) = r_f + \frac{E(r_T) - r_f}{\sigma_T}\sigma_p \; (f.e.g.)}$$

- Substituindo na função objectivo, o problema fica

$$\max_{E(r_p)} E\left[U\left(W\right)\right] = E\left(r_p\right) - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{E\left(r_p\right) - r_f}{E\left(r_T\right) - r_f}\right)^2 \sigma_T^2$$

- A condição de primeira ordem é

$$1 - \alpha\frac{E\left(r_p^*\right) - r_f}{\left[E\left(r_T\right) - r_f\right]^2}\sigma_T^2 = 0 \Leftrightarrow E\left(r_p^*\right) = r_f + \frac{\left[E\left(r_T\right) - r_f\right]^2}{\alpha\sigma_T^2}$$

Escolha da carteira óptima (4/4)

- Podemos ver que:
  - quanto maior a aversão ao risco (α), menor a rentabilidade esperada da carteira óptima
    - logo, menor o seu risco
    - ou seja, investe-se mais no activo sem risco e menos na carteira de tangência
  - No limite quando o investidor é extremamente avesso ao risco, $E\left(r_p^*\right) = r_f$, ou seja, este apenas investe no activo sem risco