

Investimentos

António M. R. G. Barbosa

ISCTE  **Business School**
Instituto Universitário de Lisboa

Dia 22: 27/Mar/12

Sumário

- 1 Função de utilidade
- 2 Curvas de indiferença
- 3 Escolha da carteira ótima

Outline

- 1 Função de utilidade
- 2 Curvas de indiferença
- 3 Escolha da carteira ótima

Aversão ao risco e não saciedade não bastam (1/2)

- Sabendo apenas que os investidores são avessos ao risco e não saciáveis já conseguimos reduzir substancialmente o leque de carteiras que interessam:
 - do conjunto de possibilidades de investimento, apenas as carteiras eficientes poderão vir a ser escolhidas por investidores avessos ao risco e não saciáveis
 - carteiras não eficientes não são escolhidas porque existem outras que:
 - proporcionam menor risco para o mesmo nível de rentabilidade, o que é atractivo para um investidor avesso ao risco
 - ou proporcionam maior rentabilidade esperada para o mesmo nível de risco, o que é atractivo para um investidor não saciável
 - ou as duas coisas em simultâneo

Aversão ao risco e não saciedade não bastam (2/2)

- No entanto, qual das carteiras eficientes é a escolhida, depende da função de utilidade do investidor:
 - isto porque, carteiras eficientes com maior rentabilidade esperada acarretam necessariamente maior risco
 - assim, a carteira ótima dependerá do nível de aversão ao risco

Função de utilidade (1/5)

- Como temos vindo a trabalhar com um modelo média-variância, convém ter uma função de utilidade que dependa apenas da rentabilidade esperada e da variância
- Há 3 formas de obter tal função de utilidade
- A primeira é especificando directamente que

$$E[U(W)] = E(r_p) - \frac{\alpha}{2}\sigma_p^2, \alpha > 0$$

em que α é o coeficiente de aversão ao risco

Função de utilidade (2/5)

- A segunda é assumindo uma função de utilidade quadrática sobre a riqueza

$$\begin{aligned} E[U(W)] &= bE(W) - aE(W^2) \\ &= bE(W) - aE(W)^2 - aVar(W) \\ &= bE[W_0(1+r_p)] - aE[W_0(1+r_p)]^2 - aVar[W_0(1+r_p)] \\ &= bW_0 + bW_0E(r_p) - aW_0^2[1+E(r_p)]^2 - aW_0^2Var(r_p) \end{aligned}$$

- Isto sugere então uma função de utilidade da forma

$$E[U(W)] = \underbrace{\beta}_{=bW_0} E(r_p) - \underbrace{\alpha}_{=aW_0^2} [1+E(r_p)]^2 - \underbrace{\alpha}_{=aW_0^2} \sigma_p^2$$

em que α é o coeficiente de aversão ao risco

- Note-se que o termo constante bW_0 pode ser ignorado, dado que não influencia a relação entre rentabilidade esperada e risco:
 - logo a carteira óptima não depende do termo constante

Função de utilidade (3/5)

- Por último, assumindo qualquer função de utilidade e que a rentabilidade tem uma distribuição normal, $r_p \sim N(E(r_p), \sigma_p^2)$
- Nesse caso, a riqueza tem distribuição

$$W = W_0 (1 + r_p) \sim N \left(\underbrace{W_0 [1 + E(r_p)]}_{\mu_W}, \underbrace{W_0^2 \sigma_p^2}_{\sigma_W^2} \right)$$

- A expansão de Taylor da utilidade em torno da riqueza média (μ_W) é

$$\begin{aligned} U(W) = & U(\mu_W) + U'(\mu_W)(W - \mu_W) + \frac{1}{2}U''(\mu_W)(W - \mu_W)^2 \\ & + \frac{1}{3!}U'''(\mu_W)(W - \mu_W)^3 + \frac{1}{4!}U''''(\mu_W)(W - \mu_W)^4 + \dots \end{aligned}$$

Função de utilidade (4/5)

- O valor esperado será

$$\begin{aligned} E[U(W)] &= U(\mu_W) + U'(\mu_W) \underbrace{E(W - \mu_W)}_0 + \frac{1}{2} U''(\mu_W) \underbrace{E[(W - \mu_W)^2]}_{\sigma_W^2} \\ &\quad + \frac{1}{3!} U'''(\mu_W) \underbrace{E[(W - \mu_W)^3]}_0 + \frac{1}{4!} U''''(\mu_W) \underbrace{E[(W - \mu_W)^4]}_{3\sigma_W^4} + \dots \\ &= U(\mu_W) + \frac{1}{2} U''(\mu_W) \sigma_W^2 + \frac{1}{4!} U''''(\mu_W) 3\sigma_W^4 + \dots \end{aligned}$$

uma vez que se $W \sim N(\mu_W, \sigma_W^2)$ então

$$E(W - \mu_W)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \sigma_W^n (n-1) & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

Função de utilidade (5/5)

- Logo, se a rentabilidade tem uma distribuição normal a utilidade esperada dependerá apenas da média e da variância para qualquer função de utilidade $U(W)$
 - afinal de que mais poderia depender se a média e variância são os únicos parâmetros da distribuição normal
- No entanto, nem todas as funções servem:
 - para que os investidores sejam não saciáveis é necessário que $\frac{\partial E[U(W)]}{\partial \mu_W} > 0$, ou seja, que as derivadas ímpares da função $U(W)$ sejam não negativas ($U'(W)$, $U'''(W)$, $U''''(W)$, etc.)
 - para que os investidores sejam avessos ao risco é necessário que $\frac{\partial E[U(W)]}{\partial \sigma_W^2} < 0$, ou seja, que as derivadas pares da função $U(W)$ sejam não positivas ($U''(W)$, $U''''(W)$, $U''''''(W)$, etc.)

Outline

- 1 Função de utilidade
- 2 Curvas de indiferença
- 3 Escolha da carteira ótima

Curvas de indiferença (1/2)

- Uma curva de indiferença no espaço média-variância representa as combinações de rentabilidade esperada e risco que proporcionam a mesma utilidade
- Por exemplo, assumamos que a função de utilidade é

$$E[U(W)] = E(r_p) - \frac{1}{2}\sigma_p^2$$

- As seguintes carteiras proporcionam a mesma utilidade (e logo estão situadas na mesma curva de indiferença):
 - $E(r_p) = 3\%$, $\sigma_p^2 = 0\%$: $E[U(W)] = 0.03$
 - $E(r_p) = 5\%$, $\sigma_p^2 = 1\%$: $E[U(W)] = 0.05 - 2 \times 0.01 = 0.03$
 - $E(r_p) = 7\%$, $\sigma_p^2 = 2\%$: $E[U(W)] = 0.07 - 2 \times 0.02 = 0.03$
- Ou seja, por cada 1% de risco adicional (variância), o investidor “exige” uma remuneração adicional de 2% para obter a mesma utilidade esperada:
 - isto é um reflexo da aversão ao risco

Curvas de indiferença (2/2)

- Note-se que se o nível de aversão ao risco for superior, o investidor exigirá um acréscimo de rentabilidade esperada superior
- Refazendo os calculos para $\alpha = 6$ (em vez de $\alpha = 4$)
 - $E(r_p) = 3\%, \sigma_p^2 = 0\%: E[U(W)] = 0.03$
 - $E(r_p) = 6\%, \sigma_p^2 = 1\%: E[U(W)] = 0.06 - 3 \times 0.01 = 0.03$
 - $E(r_p) = 9\%, \sigma_p^2 = 2\%: E[U(W)] = 0.09 - 3 \times 0.02 = 0.03$
- Ou seja, agora por cada 1% de risco adicional (variância), o investidor “exige” uma remuneração adicional de 3% (e não 2%) para obter a mesma utilidade esperada

Geometria das curvas de indiferença (1/3)

- Esta função de utilidade implica que as curvas de indiferença são:
 - linhas rectas com inclinação positiva no espaço média-variância
 - curvas convexas com inclinação positiva no espaço média-desvio-padrão
- Isto pode ser verificado calculando o diferencial total da utilidade esperada

Geometria das curvas de indiferença (2/3)

- No espaço média-variância

$$\begin{aligned}dE[U(W)] &= \frac{\partial [E(r_p) - \frac{\alpha}{2}\sigma_p^2]}{\partial E(r_p)} dE(r_p) + \frac{\partial [E(r_p) - \frac{\alpha}{2}\sigma_p^2]}{\partial \sigma_p^2} d\sigma_p^2 \\ &= dE(r_p) - \frac{\alpha}{2} d\sigma_p^2\end{aligned}$$

- A curva de utilidade é obtida fixando $dE[U(W)] = 0$, obtendo

$$dE(r_p) = \frac{\alpha}{2} d\sigma_p^2$$

o que é uma linha recta com inclinação $\frac{\alpha}{2} > 0$

- Note-se que a curva de indiferença é tanto mais inclinada quanto maior o nível de aversão ao risco

Geometria das curvas de indiferença (3/3)

- No espaço média-desvio-padrão

$$\begin{aligned}dE[U(W)] &= \frac{\partial [E(r_p) - \frac{\alpha}{2}\sigma_p^2]}{\partial E(r_p)} dE(r_p) + \frac{\partial [E(r_p) - \frac{\alpha}{2}\sigma_p^2]}{\partial \sigma_p} d\sigma_p \\ &= dE(r_p) - \alpha\sigma_p d\sigma_p\end{aligned}$$

e a curva de indiferença é

$$dE(r_p) = \alpha\sigma_p d\sigma_p$$

- Uma vez mais:
 - a inclinação é positiva, dado que $\alpha\sigma_p > 0$
 - a inclinação é tanto maior quanto maior o nível de aversão ao risco α
- No entanto, a inclinação aumenta à medida que σ_p aumenta, o que faz com que as curvas de indiferença sejam convexas no espaço média-desvio-padrão

Gráfico de utilidade esperada versus risco. O eixo vertical é $E(r_p)$ e o eixo horizontal é σ_p . Três curvas convexas representam níveis de utilidade crescente de X a Z. Uma linha diagonal com seta indica a direção de utilidade crescente.

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻

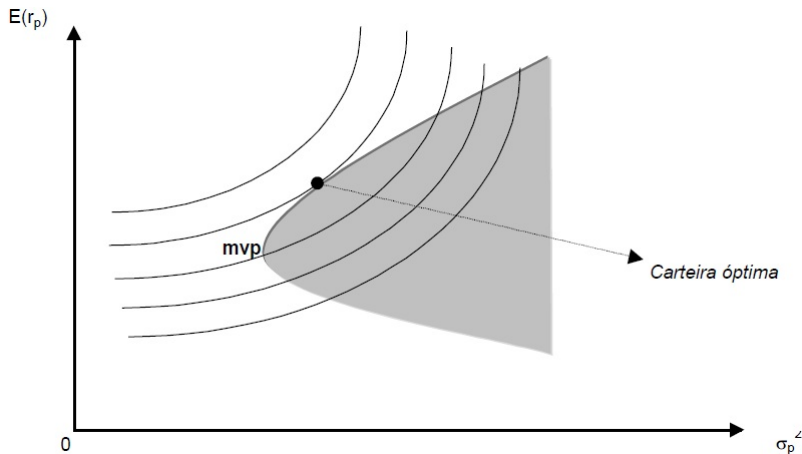
Outline

- 1 Função de utilidade
- 2 Curvas de indiferença
- 3 Escolha da carteira óptima

Escolha da carteira óptima: graficamente (1/2)

- Graficamente, a carteira óptima corresponde ao ponto de tangência entre a fronteira eficiente e uma curva de indiferença
- Se assim não for:
 - ou a curva de indiferença não toca no conjunto de possibilidades de investimento, e logo o correspondente nível de utilidade não pode ser obtido
 - ou a curva de indiferença intersecta a fronteira eficiente em dois pontos
 - no último caso qualquer carteira entre esses dois pontos de intersecção proporcionará uma utilidade superior

Escolha da carteira óptima: graficamente (2/2)



Escolha da carteira óptima: analiticamente (1/2)

- Analiticamente, o problema que pretendemos resolver é

$$\begin{aligned} \max_{E(r_p)} E[U(W)] &= E(r_p) - \frac{\alpha}{2} \sigma_p^2 \\ \text{s.a. } \sigma_p^2 &= \frac{1}{D} \left[C \times E(r_p)^2 - 2A \times E(r_p) + B \right] \end{aligned}$$

- Substituindo a restrição na função objectivo

$$\max_{E(r_p)} E(r_p) - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{D} \left[C \times E(r_p)^2 - 2A \times E(r_p) + B \right]$$

- A condição de primeira ordem é

$$\begin{aligned} 1 - \alpha \frac{C}{D} E(r_p) + \alpha \frac{A}{D} &= 0 \Leftrightarrow \alpha \frac{C}{D} E(r_p) = 1 + \alpha \frac{A}{D} \\ \Leftrightarrow E(r_p)^* &= \frac{D + \alpha A}{\alpha C} \end{aligned}$$

Escolha da carteira ótima: analiticamente (2/2)

- Quanto maior a aversão ao risco (α), menor a rentabilidade esperada e variância da carteira ótima

$$\frac{\partial E(r_p)^*}{\partial \alpha} = \frac{A}{\alpha C} - \frac{C(D + \alpha A)}{(\alpha C)^2} = \frac{\alpha AC - CD - \alpha AC}{(\alpha C)^2} = -\frac{D}{\alpha^2 C} < 0$$

dado que $D > 0$ e $C > 0$

- No limite, um investidor extremamente avesso ao risco escolhe a carteira de variância mínima

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{D + \alpha A}{\alpha C} = \frac{A}{C}$$