Investimentos

António M. R. G. Barbosa

ISCTE Business School
Instituto Universitário de Lisboa

Dia 21: 23/Mar/12

Sumário

Outline

Exemplo 1 (1/4)

Exemplo 1

Suponha que a fronteira de variância mínima é dada pela equação

$$\sigma_p^2 = 1.686E\left(r_p\right)^2 - 0.254E\left(r_p\right) + 0.0130$$

Identifique quais dos seguintes pares de rentabilidade esperada/variância: (i) são possíveis de obter, e (ii) correspondem a carteiras de fronteira

(i) $E\left(r_p\right) = 10\%$, $\sigma_p^2 = 0.446\%$
(ii) $E\left(r_p\right) = 7\%$, $\sigma_p^2 = 0.407\%$
(iii) $E\left(r_p\right) = 5\%$, $\sigma_p^2 = 0.369\%$

Exemplo 1 (2/4)

- Para responder a esta questão, basta simplesmente substituir $E\left(r_p\right)$ na equação da fronteira de variância mínima e comparar a variância da carteira com a variância mínima que se pode obter para esse nível de rentabilidade esperada
- Para a primeira carteira

$$\sigma_p^2 = 1.686 \times \left(\underbrace{10\%}_{=0.1}\right)^2 - 0.254 \times 10\% + 0.0130$$
$$= 0.00446 = 0.446\%$$

- Como a variância mínima que se consegue obter para uma rentabilidade de 10% coincide com a variância da carteira, esta é uma carteira de fronteira

Exemplo 1 (3/4)

- Para a segunda carteira

$$\sigma_p^2 = 1.686 \times (7\%)^2 - 0.254 \times 7\% + 0.0130 = 0.348\%$$

- Como a variância da carteira (0.407%) é **superior** à variância mínima (0.348%) associada a uma rentabilidade esperada de 7%, a carteira situa-se no interior do conjunto de possibilidades de investimento, mas não na sua fronteira

Exemplo 1 (4/4)

- Para a terceira carteira

$$\sigma_p^2 = 1.686 \times (5\%)^2 - 0.254 \times 5\% + 0.0130 = 0.452\%$$

- Como a variância da carteira (0.369%) é **inferior** à variância mínima (0.452%) associada a uma rentabilidade esperada de 5%, a carteira situa-se **fora** do conjunto de possibilidades de investimento
- Quer isto dizer que é impossível encontrar uma carteira com esta rentabilidade esperada e variância combinando os activos existentes[1]

[1] Mais correctamente, combinando os activos que estão subjacentes à fronteira de variância mínima. Se adicionarmos mais activos, o conjunto de possibilidades de investimento expande-se, o que poderá viabilizar uma carteira com esta combinação de rentabilidade e risco.

Exemplo 2 (1/4)

Exemplo 2

Considere a mesma fronteira de variância mínima

$$\sigma_p^2 = 1.686E\left(r_p\right)^2 - 0.254E\left(r_p\right) + 0.0130$$

Identifique a carteira de variância mínima

Exemplo 2 (2/4)

- Há 2 formas de responder à questão
  1. caso nos lembremos das fórmulas, sabemos que $E\left(r_{mvp}\right)=\frac{A}{C}$, $\sigma^2_{mvp}=\frac{1}{C}$ e
  $$\sigma_p^2=\frac{1}{D}\left[C\times E\left(r_p\right)^2-2A\times E\left(r_p\right)+B\right]$$
  2. caso não nos lembremos das fórmulas, podemos sempre minimizar a variância, utilizando a equação da fronteira de variância mínima

Exemplo 2 (3/4)

- Para identificar a carteira de variância mínima sabendo que $E\left(r_{mvp}\right) = \frac{A}{C}$, $\sigma^2_{mvp} = \frac{1}{C}$ precisamos de obter os valores de A e C da equação da fronteira de variância mínima

$$\sigma_p^2 = \underbrace{1.686}_{\frac{C}{D}} E\left(r_p\right)^2 - \underbrace{0.254}_{\frac{2A}{D}} E\left(r_p\right) + \underbrace{0.0130}_{\frac{B}{D}}$$

- Temos então que

$$\frac{0.254}{1.686} = \frac{\frac{2A}{D}}{\frac{C}{D}} \Leftrightarrow \frac{0.254}{1.686} = \frac{2A}{C} \Leftrightarrow \frac{A}{C} = \frac{0.254}{2 \times 1.686} = 0.0753$$
$$\Leftrightarrow E\left(r_{mvp}\right) = 7.53\%$$

- Substituindo na equação para a fronteira de variância mínima

$$\sigma^2_{mvp} = 1.686 \times (7.53\%)^2 - 0.254 \times 7.53\% + 0.0130 = 0.343\%$$

Exemplo 2 (4/4)

- A alternativa é resolver o problema

$$\min_{E(r_p)} \sigma_p^2 = 1.686E\left(r_p\right)^2 - 0.254E\left(r_p\right) + 0.0130$$

- A condição de primeira ordem é

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial E\left(r_p\right)} = 0 \Leftrightarrow 2\times 1.686\times E\left(r_{mvp}\right) - 0.254 = 0 \Leftrightarrow E\left(r_{mvp}\right) = 7.53\%$$

- Substituíndo na equação da fronteira de variância mínima obtemos $\sigma_{mvp}^2 = 0.343\%$, tal como anteriormente

Exemplo 3 (1/3)

Exemplo 3

Analise a eficiência das carteiras do exemplo 1

- Para relembrar, as carteiras eram as seguintes:
  - $E(r_p) = 10\%$, $\sigma_p^2 = 0.446\%$: carteira de fronteira
  - $E(r_p) = 7\%$, $\sigma_p^2 = 0.407\%$: carteira possível mas não de fronteira
  - $E(r_p) = 5\%$, $\sigma_p^2 = 0.369\%$: carteira impossível

Exemplo 3 (2/3)

- Para analisar a eficiência temos que:
  - identificar se a carteira é uma carteira de fronteira
  - e se for uma carteira de fronteira, se a sua rentabilidade esperada é superior à rantabilidade da carteira de variância mínima, $E\left(r_{mvp}\right) = 7.53\%$
  - so nesse caso é que a carteira é eficiente
- Note-se que

$$\begin{gathered}\{carteiras\}\\ \supset \\ conjunto\ de\ possibilidade\ de\ investimento \\ \supseteq \\ fronteira\ de\ variância\ mínima \\ \supset \\ fronteira\ eficiente\end{gathered}$$

Exemplo 3 (3/3)

- A única carteira candidata a carteira eficiente é a primeira dado que é a única carteira de fronteira
- Como a sua rentabilidade é $E\left(r_p\right) = 10\% > E\left(r_{mvp}\right) = 7.53\%$, então a carteira (i) é uma carteira eficiente
  - esta é uma carteira que poderá eventualmente ser óptima para um investidor não saciável e avesso ao risco

Exemplo 4 (1/3)

Exemplo 4

Considere a carteira de fronteira com $E\left(r_p\right) = 10\%$, $\sigma_p^2 = 0.446\%$. Identifique a outra carteira de fronteira com variância $\sigma_p^2 = 0.446\%$.

- A outra carteira com variância $\sigma_p^2 = 0.446\%$ será a carteira que se situa no troço inferior da parábola
- O que fazemos é resolver a seguinte equação para $E\left(r_p\right)$

$$0.446\% = 1.686E\left(r_p\right)^2 - 0.254E\left(r_p\right) + 0.0130$$

- É uma equação quadrática, logo tem duas soluções
  - uma já nós conhecemos, $E\left(r_p\right) = 10\%$, que corresponde à carteira eficiente
  - nós agora queremos encontrar a outra, a ineficiente

Exemplo 4 (2/3)

$$
\begin{aligned}
&0.446\% = 1.686E\left(r_p\right)^2 - 0.254E\left(r_p\right) + 0.0130 \\
\Leftrightarrow &1.686E\left(r_p\right)^2 - 0.254E\left(r_p\right) + 0.0085 = 0 \\
\Leftrightarrow &E\left(r_p\right) = \frac{0.254 \pm \sqrt{(-0.254)^2 - 4 \times 1.686 \times 0.0085}}{2 \times 1.686} \\
\Leftrightarrow &E\left(r_p\right) = 5.07\% \vee E\left(r_p\right) = 10\%
\end{aligned}
$$

- Portanto, a outra carteira com variância de $\sigma_p^2 = 0.446\%$ tem uma rentabilidade esperada de $E\left(r_p\right) = 5.07\%$
- Como já sabíamos, esta carteira é ineficiente $E\left(r_p\right) = 5.07\% < E\left(r_{mvp}\right) = 7.53\%$

Exemplo 4 (3/3)

- Quando se conhece a rentabilidade da carteira de variância mínima, podemos resolver a questão de uma forma mais expedita
  - tiramos partido do facto de a fronteira de variância mínima ser uma parábola, logo simétrica
  - e de a carteira de variância mínima dividir a parábola em 2 secções simétricas
  - logo, se a carteira eficiente tem um excesso de rentabilidade em relação à carteira de variância mínima de

$$E\left(r_p\right) - E\left(r_{mvp}\right) = 10\% - 7,53\% = 2,47\%$$

  - a carteira ineficiente com o mesmo nível de risco tem um excesso de rentabilidade simétrico (-2,47%), sendo a sua rentabilidade esperada de[2]

$$7,53\% - 2,47\% = 5,07\%$$

[2] A diferença deve-se a arredondamentos.

Exemplo 5 (1/5)

Exemplo 5

Considere as seguintes fronteiras de variância mínima

$$\sigma_p^2 = 1.686E\left(r_p\right)^2 - 0.254E\left(r_p\right) + 0.0130$$
$$\sigma_p^2 = 4.48E\left(r_p\right)^2 - 0.96E\left(r_p\right) + 0.0576$$

Uma das fronteiras de variância mínima foi obtida com base em 2 activos. A outra foi obtida com base nesses mesmo 2 activos mais um terceiro activo. Qual das fronteiras foi obtida com base em 3 activos?

Exemplo 5 (2/5)

- Todas as carteiras possíveis de obter através da combinação de 2 activos, continuam a ser possíveis se adicionarmos um terceiro activo
  - basta fixar $w_3 = 0$
- Portanto adicionar activos nunca irá diminuir o conjunto de possibilidades de investimento:
  - pelo contrário regra geral irá expandi-lo
- Significa isto que a fronteira de variância mínima com base em 2 activos passará a estar no interior do conjunto de possibilidades de investimento quando se adicionar o terceiro activo:
  - em casos especiais a fronteira pode manter-se inalterada
- Logo, basta analisar qual das fronteiras se situa mais para a esquerda
  - isto é, qual proporciona menor variância para um dado nível de rentabilidade esperada

Exemplo 5 (3/5)

- Subtraindo a segunda equação à primeira

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 - \tilde{\sigma}_p^2 =& 1.686E\left(r_p\right)^2 - 0.254E\left(r_p\right) + 0.0130 \\ & - \left[4.48E\left(r_p\right)^2 - 0.96E\left(r_p\right) + 0.0576\right] \\ =& \left(1.686 - 4.48\right)E\left(r_p\right)^2 - \left(0.254 - 0.96\right)E\left(r_p\right) + \left(0.0130 - 0.0576\right) \\ =& -2.794E\left(r_p\right)^2 + 0.706E\left(r_p\right) - 0.0446\end{aligned}$$

- Resolvemos agora esta equação quadrática para zero:
  - isto vai dizer-nos em que pontos as duas fronteiras se tocam (apenas um ponto) ou cruzam (2 pontos)

$$\begin{aligned} & -2.794E\left(r_p\right)^2 + 0.706E\left(r_p\right) - 0.0446 = 0 \\ \Leftrightarrow & E\left(r_p\right) = \frac{-0.706 \pm \sqrt{0.706^2 - 4 \times (-2.794) \times -0.0446}}{2 \times (-2.794)} \\ \Leftrightarrow & E\left(r_p\right) = \frac{-0.706}{2 \times (-2.794)} = 12,63\% \end{aligned}$$

Exemplo 5 (4/5)

- O valor dentro da raíz é 0 pelo que as duas fronteiras tocam-se mas não se cruzam:
  - portanto uma está situada mais para a esquerda, excepto quando $E(r_p) = 12,63\%$
- Falta apenas determinar qual delas está situada mais para a esquerda
  - para tal consideramos um valor qualquer para $E(r_p)$ e vemos se $\sigma_p^2 - \tilde{\sigma}_p^2$ é positivo ou negativo
  - como as duas curvas apenas se tocam num ponto, o sinal de $\sigma_p^2 - \tilde{\sigma}_p^2$ não depende da escolha de $E(r_p)$ desde que $E(r_p) \neq 12,63\%$
- Vamos escolher o mais fácil: $E(r_p) = 0 \Rightarrow \sigma_p^2 - \tilde{\sigma}_p^2 = -0.0446 < 0$
- Assim sendo, a primeira fronteira de variância mínima situa-se mais para a esquerda, e logo é essa que foi obtida com base nos 3 activos (os 2 da outra fronteira mais 1 adicional)

Exemplo 5 (5/5)

- Uma nota adicional:
  - se as fronteiras forem obtidas com base em activos diferentes, ou seja, a fronteira com base em mais activos não incluir os activos que serviram de base à fronteira com menos activos, então as 2 fronteiras podem-se cruzar
  - isto significa que, para algumas rentabilidades esperadas, uma das fronteiras permite variâncias mais baixas, mas para outras o oposto é verdade
  - podemos detectar estes casos quando resolvemos a equação quadrática: se houver 2 pontos em que as fronteiras se tocam, então é porque elas se cruzam

Exemplo 6 (1/4)

Exemplo 6

Suponha que a fronteira de variância mínima do exemplo 1 teve por base os seguintes 3 activos: $E(r_1) = 15\%$, $\sigma_1 = 12\%$; $E(r_2) = 10\%$, $\sigma_2 = 8\%$; $E(r_3) = 20\%$, $\sigma_3 = 19\%$. As correlações entre os 3 activos são: $\rho_{1,2} = 0,5$, $\rho_{1,3} = 0,7$ e $\rho_{2,3} = 0,8$.
Calcule a composição da carteira eficiente com $E(r_p) = 10\%$, $\sigma_p^2 = 0.446\%$.

Exemplo 6 (2/4)

- Para responder à questão temos que resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} w_1 E\left(r_1\right) + w_2 E\left(r_2\right) + w_3 E\left(r_3\right) = 0.1 \\ w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2\sigma_{1,2} + 2w_1w_3\sigma_{1,3} + 2w_2w_3\sigma_{2,3} = 0.00446 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

- Temos 3 equações para 3 incógnitas, pelo que existem no máximo 2 carteiras com as características pretendidas
- Se tivermos mais de 3 activos, pode ser formado um número infinito de carteiras com $E\left(r_p\right) = 10\%$, $\sigma_p^2 = 0.446\%$
  - nesse caso ou assumiam um valor para alguns pesos
  - ou seria indicado o valor de alguns pesos

Exemplo 6 (3/4)

- Substituindo pelos valores conhecidos

$$\begin{cases} 0,15w_1 + 0,1w_2 + 0,2w_3 = 0.1 \\ 0,12^2 w_1^2 + 0,08^2 w_2^2 + 0,19^2 w_3^2 + 2 \times 0,5 \times 0,12 \times 0,08 \times w_1 w_2 \\ +2 \times 0,7 \times 0,12 \times 0,19 \times w_1 w_3 + 2 \times 0,8 \times 0,08 \times 0,19 \times w_2 w_3 = 0.00446 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

- Da terceira equação tiramos que $w_1 = 1 - w_2 - w_3$
- Substituindo na primeira obtemos

$$0,15\left(1 - w_2 - w_3\right) + 0,1w_2 + 0,2w_3 = 0.1 \Leftrightarrow w_2 = 1 + w_3$$

- Voltando a substituir na última equação, temos

$$w_1 = 1 - \left(1 + w_3\right) - w_3 = -2w_3$$

Exemplo 6 (4/4)

- Substituindo w_1 e w_2 na equação para a variância da carteira

$$0,0144 \times 4 \times w_3^2 + 0,0064\,(1 + w_3)^2 + 0,0361 w_3^2 + 0.0096\,(-2w_3)\,(1 + w_3)$$
$$+ 0.03192\,(-2w_3)\,w_3 + 0.02432 \times (1 + w_3)\,w_3 = 0.00446$$

- Agrupando os termos w_3^2 e w_3, obtemos uma equação quadrática,

$$0,04138 w_3^2 + 0,01792 w_3 + 0.00194 = 0$$

com soluções

$$w_3 = -21,49\% \vee w_3 = -21,81\%$$

- No último caso

$$w_3 = -21,81\%$$
$$w_2 = 1 - 21,81\% = 78,19\%$$
$$w_1 = -2 \times (-21,81\%) = 43,63\%$$