Investimentos

António M. R. G. Barbosa

ISCTE Business School
Instituto Universitário de Lisboa

Dia 20: 22/Mar/12

Sumário

1 Modelo de Markowitz

Outline

1 Modelo de Markowitz

Conjunto de possibilidades de investimento

- Fazendo variar os pesos da carteira, podemos construir um número infinito de carteiras com base em 2 ou mais activos
  - note-se que não temos que nos restringir a pesos positivos $w_i \geq 0$
  - podemos considerar também pesos negativos
  - pesos positivos significam que adquirimos o activo (posição longa)
  - pesos negativos significam que vendemos o activo a descoberto (posição curta)
    - ou seja, pedimos o activo emprestado para o vender hoje por P_0
    - voltamos a adquirir o activo numa data posterior ao preço de P_1 para o devolver
    - desde que $P_1 < P_0$ obtemos um lucro (desvalorizações do activo proporcionam um lucro para uma posição curta)
- Ao conjunto de todas carteiras que se podem construir chama-se de **conjunto de possibilidades de investimento** (feasible portfolio set)

Fronteira de variância mínima (1/2)

- De entre as carteiras que constituem o conjunto de possibilidades de investimento investidores não saciáveis e avessos ao risco estão apenas interessados:
  - naquelas que minimizam a variância (logo também o desvio-padrão) para uma determinada rentabilidade esperada (aversão ao risco)
  - e naquelas que maximizam a rentabilidade esperada, para uma determinada variância (não saciedade)
- Ao conjunto de carteiras que minimizam a variância para uma determinada rentabilidade esperada chamamos a **fronteira de variância mínima** (portfolio frontier)
- Às carteiras que se encontrem sobre a fronteira de variância mínima, chamamos de carteiras de fronteira (frontier portfolio)
  - um investidor avesso ao risco irá sempre escolher uma carteira de fronteira

Fronteira de variância mínima (2/2)

- Se existirem apenas 2 activos, existe uma única carteira para cada nível de rentabilidade esperada
    - nesse caso o conjunto de possibilidades de investimento coincide com a fronteira de variância mínima
- Mas se existirem 3 ou mais activos, o número de carteiras com a mesma rentabilidade esperada é infinito!

Dedução da fronteira de variância mínima

- Para obter a fronteira de variância mínima temos que:
  - encontrar a carteira que minimiza a variância para uma determinada rentabilidade esperada $E\left(r_p\right)$
  - determinar a variância dessa carteira
  - já temos um ponto da fronteira de variância mínima
  - agora fazemos variar $E\left(r_p\right)$ para obter os restantes
- O problema de optimização que temos que resolver é

$$\min_{\{w_1,\ldots,w_n\}} \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j}$$

$$s.a. \sum_{i=1}^{n} w_i E\left(r_i\right) = E\left(r_p\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Boas notícias...

- As boas notícias são:
  - com apenas 2 activos, não temos que resolver o problema de optimização, pois existe uma única carteira para cada nível de rentabilidade esperada
  - notem que temos 2 restrições:

$$w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) = E(r_p)$$
$$w_1 + w_2 = 1$$

  - para determinarmos 2 incógnitas:

$$w_1, \, w_2$$

... e notícias ainda melhores

- As notícias ainda melhores são:
  - afinal não está previsto no programa que tenham que deduzir a fronteira de variância mínima para mais do que 2 activos
  - já podem respirar de alívio!

Dedução da front. de variância mínima p/ 2 activos (1/4)

- Com apenas 2 activos (com uma rentabilidade esperada diferente), temos então que

$$\begin{cases} w_1 E\left(r_1\right) + w_2 E\left(r_2\right) = E\left(r_p\right) \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

- Da segunda equação retiramos que

$$w_2 = 1 - w_1$$

- Substituindo na primeira

$$\begin{aligned} & w_1 E\left(r_1\right) + \left(1 - w_1\right) E\left(r_2\right) = E\left(r_p\right) \\ \Leftrightarrow & w_1 \left[E\left(r_1\right) - E\left(r_2\right)\right] = E\left(r_p\right) - E\left(r_2\right) \\ \Leftrightarrow & w_1 = \frac{E\left(r_p\right) - E\left(r_2\right)}{E\left(r_1\right) - E\left(r_2\right)} \end{aligned}$$

Dedução da front. de variância mínima p/ 2 activos(2/4)

$$w_1 = \frac{E(r_p) - E(r_2)}{E(r_1) - E(r_2)}$$

- Esta é única combinação dos 2 activos que permite alcançar uma rentabilidade esperada de $E(r_p)$
- Supondo que $E(r_1) > E(r_2)$, então:
  - se quisermos $E(r_2) < E(r_p) < E(r_1)$ temos que tomar uma posição longa nos 2 activos
  - se quisermos $E(r_p) < E(r_2)$ temos que tomar uma posição curta no activo 1 e longa no activo 2
  - se quisermos $E(r_p) > E(r_1)$ temos que tomar uma posição curta no activo 2 e longa no activo 1

Dedução da front. de variância mínima p/ 2 activos(3/4)

- Uma vez determinada a carteira única com rentabilidade esperada de $E(r_p)$ resta-nos determinar a sua variância

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{1,2} \\
&= \left[\frac{E(r_p)-E(r_2)}{E(r_1)-E(r_2)}\right]^2 \sigma_1^2 + \left[1-\frac{E(r_p)-E(r_2)}{E(r_1)-E(r_2)}\right]^2 \sigma_2^2 \\
&+ 2\frac{E(r_p)-E(r_2)}{E(r_1)-E(r_2)}\left[1-\frac{E(r_p)-E(r_2)}{E(r_1)-E(r_2)}\right]\sigma_{1,2} \\
&= \frac{\left[E(r_p)-E(r_2)\right]^2\sigma_1^2+\left[E(r_1)-E(r_p)\right]^2\sigma_2^2+2\left[E(r_p)-E(r_2)\right]\left[E(r_1)-E(r_p)\right]\sigma_{1,2}}{\left[E(r_1)-E(r_2)\right]^2}
\end{aligned}$$

- Nota:
  - isto parece mais complicado do que é
  - quando resolverem exercícios saberão os valores de $E(r_1)$, $E(r_2)$, σ_1^2, σ_2^2 e $\sigma_{1,2}$, pelo que as expressões simplificam bastante

Dedução da front. de variância mínima p/ 2 activos(4/4)

- Agrupando os termos $E(r_p)^2$, $E(r_p)$ obtemos

$$\boldsymbol{\sigma_p^2 = \frac{1}{D}\left[C \times E(r_p)^2 - 2A \times E(r_p) + B\right]}$$

em que

$$A = \frac{E(r_2)\sigma_1^2 + E(r_1)\sigma_2^2 - [E(r_1) + E(r_2)]\sigma_{1,2}}{|V|}$$

$$B = \frac{E(r_2)\sigma_1^2 + E(r_1)\sigma_2^2 - 2E(r_1)E(r_2)\sigma_{1,2}}{|V|}$$

$$C = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}}{|V|}$$

$$D = BC - A^2 = \frac{[E(r_1) - E(r_2)]^2}{|V|}$$

$$|V| = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{1,2}^2$$

- Nota:
  - mais uma vez, com número isto não fica tão medonho!

Geometria da fronteira de variância mínima (1/2)

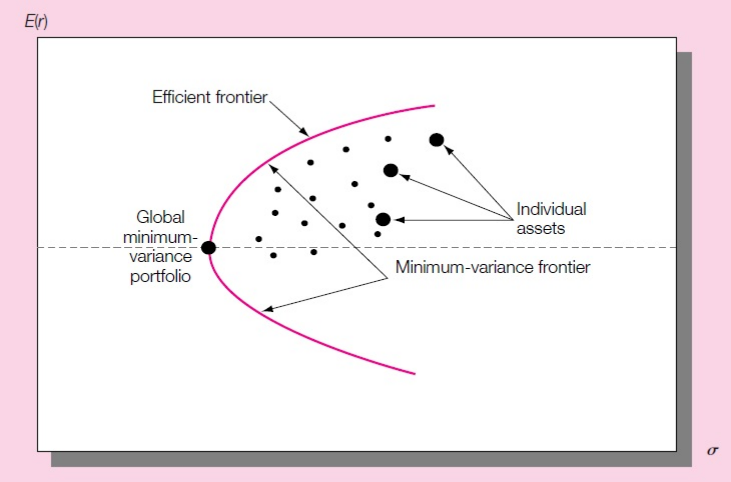
$$\sigma_p^2 = \frac{1}{D}\left[C \times E\left(r_p\right)^2 - 2A \times E\left(r_p\right) + B\right]$$

- Assim, a fronteira de variância mínima, no **espaço média-variância**, é uma parábola
  - devem ter falado de parábolas no secundário
- Rearranjando,

$$\frac{\sigma_p^2}{\frac{1}{D}} - \frac{\left[E\left(r_p\right) - \frac{A}{C}\right]^2}{\frac{D}{C^2}} = 1$$

- Temos então que, no **espaço média-desvio-padrão** a fronteira de variância mínima é uma hipérbole com:
  - centro em $\left[\sigma_p, E\left(r_p\right)\right] = \left[0, \frac{A}{C}\right]$
  - assimptotas $E\left(r_p\right) = \frac{A}{C} \pm \sqrt{\frac{D}{C}}\sigma_p$

Geometria da fronteira de variância mínima (2/2)



Fronteira de variância mínima para mais de 2 activos

- A equação da fronteira de variância mínima para mais de 2 activos é a mesma

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{D}\left[C \times E\left(r_p\right)^2 - 2A \times E\left(r_p\right) + B\right]$$

- A única diferença está na expressão para os coeficientes A, B, C e D
    - não faz parte dos objectivos da cadeira determinar estes coeficientes
    - mas têm que saber trabalhar com a equação da fronteira de variância mínima
        - por exemplo, verificar se uma determinada carteira está ou não na fronteira

Carteira de variância mínima (1/3)

- Dado que a fronteira de variância mínima é uma parábola, existe uma **carteira de variância mínima** (minimum variance portfolio)
- Podemos determinar a variância e rentabilidade esperada desta carteira de 2 formas:
  - resolvendo

$$\min_{E(r_p)} \sigma_p^2 = \frac{1}{D}\left[C \times E\left(r_p\right)^2 - 2A \times E\left(r_p\right) + B\right]$$

  - ou observando que a hipérbole tem centro em $\left[\sigma_p, E\left(r_p\right)\right] = \left[0, \frac{A}{C}\right]$
    - significa isto que $E\left(r_{mvp}\right) = \frac{A}{C}$
    - σ_{mvp}^2 obtém-se substituíndo $E\left(r_{mvp}\right) = \frac{A}{C}$ na equação da fronteira de variância mínima

Carteira de variância mínima (2/3)

- Vamos resolver o problema

$$\min_{E(r_p)} \sigma_p^2 = \frac{1}{D}\left[C \times E\left(r_p\right)^2 - 2A \times E\left(r_p\right) + B\right]$$

- A condição de primeira ordem para o mínimo é

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial E\left(r_p\right)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{D}\left[2C \times E\left(r_p\right) - 2A\right] = 0 \Leftrightarrow E\left(r_p\right) = \frac{A}{C}$$

- Para verificar que é mesmo um mínimo, temos que verificar a condição de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 \sigma_p^2}{\partial E\left(r_p\right)^2} = \frac{2C}{D} > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

Carteira de variância mínima (3/3)

- Substituíndo $E\left(r_{mvp}\right) = \frac{A}{C}$ na equação da fronteira de variância mínima

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{mvp} &= \frac{1}{D}\left[C\left(\frac{A}{C}\right)^2 - 2A\frac{A}{C} + B\right] \\
&= \frac{1}{D}\left[\frac{A^2}{C} - 2\frac{A^2}{C} + B\right] \\
&= \frac{1}{BC - A^2}\left[-\frac{A^2}{C} + B\right] \\
&= \frac{1}{BC - A^2}\frac{1}{C}\left[BC - A^2\right] \\
&= \frac{1}{C}
\end{aligned}$$

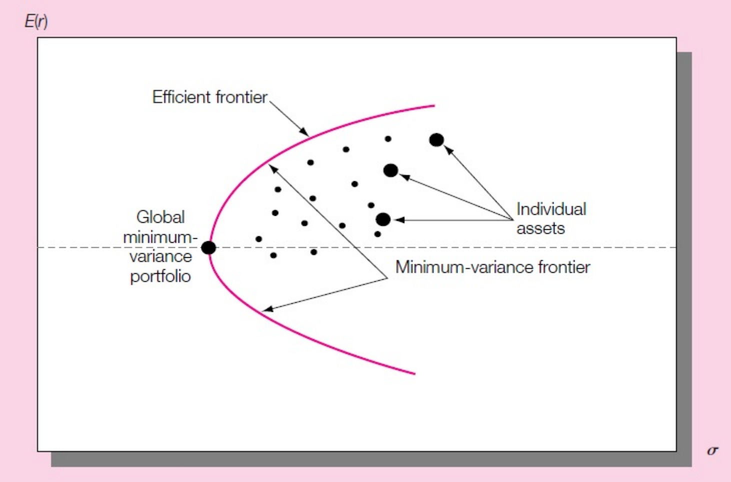
- Resumindo, a carteira de variância mínima tem

$$E\left(r_{mvp}\right) = \frac{A}{C},\ \sigma^2_{mvp} = \frac{1}{C}$$

Fronteira eficiente (de Markowitz) (1/2)

- A carteira de variância mínima divide a fronteira de variância mínima em 2 regiões simétricas:
  - a parte superior da fronteira de variância mínima, em que $E\left(r_p\right) \geq E\left(r_{mvp}\right)$, é designada por **fronteira eficiente** (de Markowitz)
  - e uma parte inferior que é a “reflexão ao espelho” da fronteira eficiente
  - ou seja, a fronteira de variância mínima tem 2 carteiras para o mesmo nível de risco; dessas 2, aquela que tiver a maior rentabilidade esperada pertence à fronteira eficiente
- Assim, a fronteira eficiente representa o conjunto de carteiras com rentabilidade esperada máxima, para um determinado nível de risco

Fronteira eficiente (de Markowitz) (2/2)



Carteiras eficientes

- As carteiras que compõem a fronteira eficiente chamam-se **carteiras eficientes**
- Um investidor não saciável e avesso ao risco escolherá sempre uma carteira eficiente:
  - qual exactamente depende da sua função de utilidade