Investimentos

António M. R. G. Barbosa

ISCTE Business School
Instituto Universitário de Lisboa

Dia 19: 20/Mar/12

Sumário

Outline

Selecção de carteiras de investimento

- Os objectivos subjacente à seleccção da carteira de investimento são:
  - minimização do risco (para um determinado nível de rentabilidade esperada)
    - quanto maior a rentabilidade esperada, maior o risco (mínimo) que terá que se assumir
  - maximização da rentabilidade esperada (para um determinado nível de risco)
    - quanto maior o risco assumido, maior a rentabilidade esperada (máxima) que se conseguirá obter
  - determinação da combinação óptima do binómio risco-rentabilidade
    - de acordo com a função de utilidade do investidor

Risco e medida de risco

Definição: Risco

O nível de risco corresponde ao grau de incerteza face à rentabilidade (ou preço) futura de um investimento.

- Ao falarmos de risco, temos inevitavelmente que falar de medidas de risco:
    - uma medida de risco sumariza, num único número, o nível de risco de um investimento
- Existem não uma, mas várias medidas de risco
- No entanto, ao longo desta cadeira vamos considerar apenas uma:
    - o desvio-padrão (ou o seu quadrado, a variância) da taxa de rentabilidade
    - que mede a variabilidade da taxa de rentabilidade em relação à média
- A utilização do desvio-padrão enquanto medida de risco deve-se à sua simplicidade

Preferências dos investidores

- As preferências dos investidores são representadas por funções de utilidade
  - as funções de utilidade permitem ordenar os investimentos de acordo com as preferências do investidor
- Naturalmente as preferências são diferentes de investidor para investidor, e logo cada um tem a sua própria função de utilidade
- No entanto, regra geral estas diferentes preferências têm dois aspectos em comum:
  - não saciedade (os investidores gostam sempre de mais dinheiro)
  - aversão ao risco (os investidores não gostam de assumir risco)

Não saciedade (1/2)

- Considere-se as seguintes alternativas de investimento

	Rentabilidade Inv. A	Rentabilidade Inv. B
Cenário Mau (50%)	4%	6%
Cenário Bom (50%)	6%	8%
Média	5%	7%
Desvio-Padrão	1%	1%

- Qual é a preferível?
  - o investimento B tem uma taxa de rentabilidade média mais elevada
  - mais do que isso, o investimento B tem uma taxa de rentabilidade mais elevada do que o investimento A em todos os cenários
  - o nível de risco, medido pelo desvio-padrão da taxa de rentabilidade, é o mesmo

Não saciedade (2/2)

- Quando os investimentos têm o mesmo nível de risco, qualquer investidor não saciável prefere o investimento com a maior rentabilidade esperada
- Significa isto que dinheiro nunca é demais!
  - investidores mais ricos certamente darão uma menor utilidade a 1€ de riqueza adicional do que investidores mais pobres
  - no entanto nunca chegam ao ponto de desejar ser mais pobres (ou menos ricos) do que o que são
- Já se estivermos a falar de outros bens, mais não é necessariamente melhor:
  - se estivermos a falar de um "mau" em vez de um bem como por exemplo poluição
  - certos bens podem-se tornar "maus" se consumidos em excesso, como por exemplo alimentos

Aversão ao risco (1/2)

- Considere-se as seguintes alternativas de investimento

	Rentabilidade Inv. A	Rentabilidade Inv. B
Cenário Mau (50%)	4%	-10%
Cenário Bom (50%)	6%	20%
Média	5%	5%
Desvio-Padrão	1%	15%

- Qual preferem?
  - o investimento B tem uma taxa de rentabilidade com maior desvio-padrão (ou seja, a rentabilidade é mais incerta ou volátil)
  - a rentabilidade esperada para os 2 investimentos é a mesma

Aversão ao risco (2/2)

- Quando os investimentos têm a mesma rentabilidade esperada, qualquer investidor avesso ao risco prefere o investimento com menor risco
- Na maior parte das suas decisões as pessoas são avessas ao risco
  - é essa a razão pela qual pagamos prémios de seguro
  - em média é um mau negócio para as pessoas, dado que os prémios têm que cobrir os pedidos de cobertura mais o lucro da seguradora
  - mas permite eliminar incerteza em caso de sinistros
- Mas há excepções:
  - quando jogamos jogos de sorte e azar (jogos de casino, lotarias, etc.)
  - também é um mau negócio para quem joga, dado que o dinheiro das apostas tem que cobrir os prémios pagos mais o lucro do casino
  - neste caso troca-se uma pequena quantia certa pela possibilidade remota de ganhar muito dinheiro

E agora?

- Geralmente, os investimentos alternativos não têm a mesma rentabilidade média nem o mesmo desvio-padrão

	Rentabilidade Inv. A	Rentabilidade Inv. B
Cenário Mau (50%)	4%	3%
Cenário Bom (50%)	6%	9%
Média	5%	6%
Desvio-Padrão	1%	3%

- Qual o melhor investimento?
  - o investimento A tem menor risco mas também menor rentabilidade
  - diferentes investidores preferirão diferentes investimentos, em função do seu nível de aversão ao risco
  - investidores mais avessos ao risco preferirão o investimento A

Modelos de média-variância

- A não saciedade e aversão ao risco sugerem que a escolha de carteiras seja feita com base no critério da média-desvio-padrão, ou como é mais conhecido, pelo critério da média-variância
- Isto implica que os investidores apenas se preocupam com estes 2 momentos da distribuição da taxa de rentabilidade:
  - os investidores gostam da média (ou seja, de uma média mais elevada)
  - mas não gostam do desvio-padrão
- No entanto, isto não é necessariamente verdade
- Sem fazermos alguns pressupostos, a utilização do desvio-padrão como medida de risco pode gerar situações caricatas, que expõem as suas limitações enquanto medida de risco

Limitações do desvio-padrão enquanto medida de risco

	Rentabilidade Inv. A	Rentabilidade Inv. B
Cenário Mau (50%)	4%	10%
Cenário Bom (50%)	6%	20%
Média	5%	15%
Desvio-Padrão	1%	5%

- O investimento B tem um desvio-padrão mais elevado
  - mas será que é mesmo o mais arriscado?
  - a rentabilidade do investimento B pode ser mais incerta, mas é sempre superior à do investimento A

Pressupostos do modelo de média-variância

- A utilização do desvio-padrão enquanto medida de risco, e logo a validade dos modelos de média-variância, pressupõe:
  - que a distribuição da taxa de rentabilidade é normal
  - ou que a função de utilidade é quadrática

$$u(W) = aW - bW^2,\ a > 0,\ b > 0$$

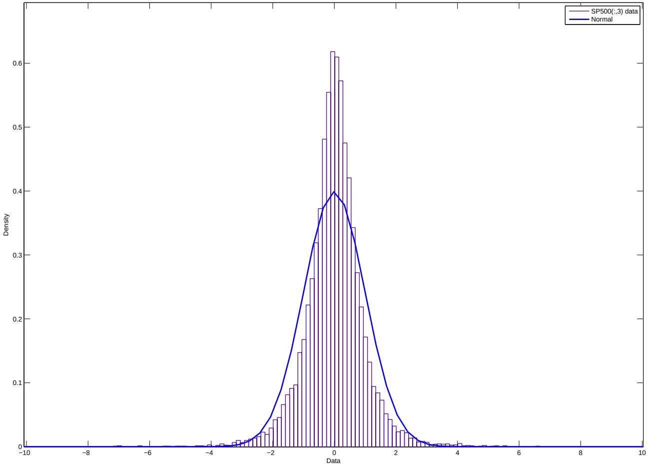
Distribuição normal (1/4)

- A distribuição normal é completamente descrita pela média e desvio-padrão:
  - assim sendo, ao focarmo-nos na média e desvio-padrao não estamos a ignorar qualquer informação relativa à distribuição da taxa de rentabilidade
  - e o desvio-padrão é a medida de risco natural
- Note-se que, sendo a distribuição normal uma distribuição contínua, é impossível ter um investimento com uma rentabilidade mais incerta mas superior em todos os cenários à rentabilidade de um investimento com rentabilidade menos incerta
  - significa isto que o exemplo anterior não se aplica se a distribuição for normal

Distribuição normal (2/4)

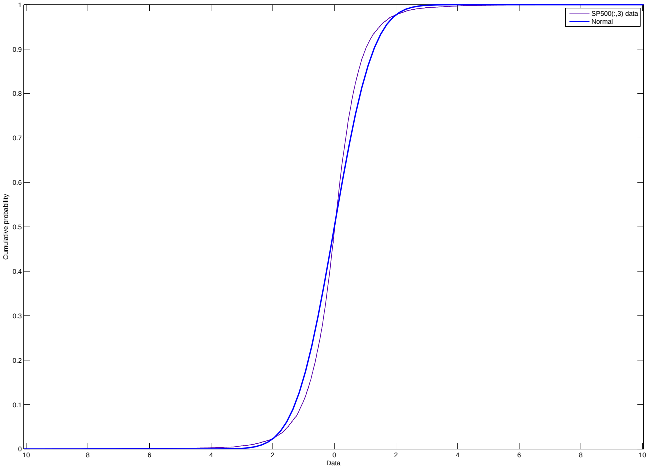
- O problema é que as taxas de rentabilidade dos activos financeiros não têm uma distribuição normal
  - as rentabilidade mensais são aproximadamente normais
  - mas as rentabilidade diárias não:
    - as caudas são demasiado pesadas
    - há assimetria negativa
    - significa isto que perdas elevadas são mais prováveis de ocorrer na realidade do que a distribuição normal indica

Distribuição normal (3/4)



Densidade S&P 500 vs. normal

Distribuição normal (4/4)



Função distribuição cumulativa S&P 500 vs. normal

Utilidade quadrática (1/2)

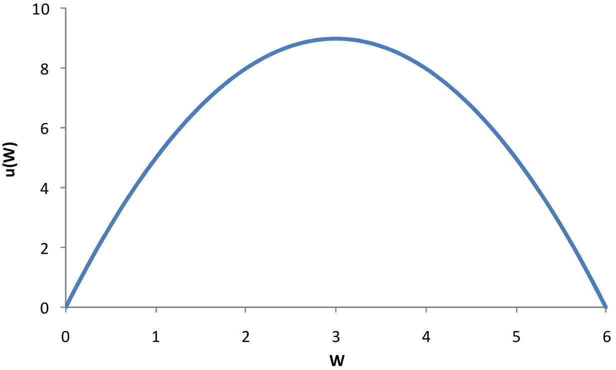
- A outra hipótese é assumir uma função de utilidade quadrática, $u(W) = aW - bW^2$, $a > 0$, $b > 0$
  - neste caso os investidores só se preocupam com a média e desvio-padrão
  - podemos escrever a utilidade esperada como

$$\begin{aligned} E[u(W)] &= aE(W) - b \underbrace{E\left(W^2\right)}_{Var(W)+E(W)^2} \\ &= aE(W) - bE(W)^2 - bVar(W) \end{aligned}$$

  - note-se que, para $E(W) < W^* \equiv \frac{a}{2b}$, a utilidade esperada aumenta com a média e diminui com a variância (ou desvio-padrão)

Utilidade quadrática (2/2)

- O problema é que a função de utilidade não é a mais adequada, dado que a partir de certo ponto ($W^* = \frac{a}{2b}$) os investidores atingem saciedade:
  - logo, temos sempre que considerar que $W < W^*$



Estimação da rentab. esperada e desvio-padrão (1/4)

- Se vamos escolher a carteira com base na sua rentabilidade esperada e desvio-padrão, precisamos primeiro de os estimar, dado que estes parâmetros não são directamente observáveis
- O que nos interessa são a rentabilidade esperada e o desvio-padrão **futuros**, não os passados
- No entanto, à falta de melhor alternativa, é comum estimar estes parâmetros a partir de dados históricos

$$E\left(r_i\right) \equiv \mu_i = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} r_{i,t}, \; \sqrt{Var\left(r_i\right)} \equiv \sigma_i = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{t=1}^{m}\left(r_{i,t}-\mu_i\right)^2}$$

sendo $r_{i,t}$ a rentabilidade do activo i na data t, dada por

$$r_{i,t} = \frac{P_t + d_t}{P_{t-1}}$$

onde d_t designa o dividendo distribuído na data t e P_t o preço do activo na data t

Estimação da rentab. esperada e desvio-padrão (2/4)

- Naturalmente, se utilizarmos cotações diárias, obtemos estimativas para a média e desvio-padrão da taxa de rentabilidade diária
- Podemos transformar as estimativas diárias em estimativas semanais, mensais, anuais, etc:
  - multiplicando a média e a **variância** da taxa de rentabilidade diária pelo número de dias numa semana, mês ou ano
  - o **desvio-padrão** semanal, mensal ou anual pode ser obtido multiplicando o desvio-padrão diário pela **raíz quadrada** do número de dias por semana, mês ou ano
  - assim sendo, a média e variância são (aproximadamente) proporcionais ao tempo, ao passo que o desvio-padrão é proporcional à raíz quadrada do tempo

Estimação da rentab. esperada e desvio-padrão (3/4)

- Note-se que a média só é proporcional ao tempo se se utilizar taxas de rentabilidade geométricas ($r_t = \ln \frac{P_t + d_t}{P_{t-1}}$)
- O desvio-padrão só é proporcional à raíz quadrada do tempo se se utilizar taxas de rentabilidade geométricas e, para além disso, as taxas de rentabilidade forem i.i.d.

Estimação da rentab. esperada e desvio-padrão (4/4)

- Se os mercados forem eficientes, toda a informação histórica já se encontra incorporada no preço actual da acção
  - assim sendo, a estimação da rentabilidade esperada com base em rentabilidade históricas não faz sentido
- A alternativa é gerar cenários para as variáveis fundamentais da empresa (vendas, margens de lucro, etc.) e avaliar a empresa nesses cenários, obtendo assim uma taxa de rentabilidade previsional
- A média e desvio-padrão podem então ser estimados como

$$E\left(r_i\right) \equiv \mu_i = \sum_{s=1}^{S} p_s r_{i,s}, \; \sqrt{Var\left(r_i\right)} \equiv \sigma_i = \sqrt{\sum_{s=1}^{S} p_s \left(r_{i,s} - \mu_i\right)^2}$$

onde p_s é a probabilidade atribuída ao cenário s e $r_{i,s}$ é a rentabilidade prevista para o cenário s

Exemplo

Cenário	Probabilidade	Rentabilidade
Profunda recessão	10%	-15%
Recessão	15%	-5%
Estagnação	50%	5%
Expansão	20%	12%
Forte expansão	5%	25%

$$E(r_i) = (-15\%) \times 10\% + (-5\%) \times 15\% + 5\% \times 50\% + 12\% \times 20\% + 25\% \times 5\% = 3.9\%$$

$$\sigma_i = \sqrt{\begin{array}{c}(-15\% - 3.9\%)^2 \times 10\% + (-5\% - 3.9\%)^2 \times 15\% \\ + (5\% - 3.9\%) \times 50\% + (12\% - 3.9\%)^2 \times 20\% \\ + (25\% - 3.9\%)^2 \times 5\%\end{array}}$$

$$= 9.14\%$$

Rentabilidade esperada de uma carteira

- A rentabilidade esperada de uma carteira é simplesmente a média ponderada da rentabilidade esperada de cada título que compõe a carteira, ponderado pelo respectivo peso relativo na carteira (w_i)

$$E\left(r_p\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i E\left(r_i\right)$$

- Sendo w_i pesos relativos, obviamente que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

Desvio-padrão de uma carteira (1/4)

- Mas o desvio-padrão da carteira não é uma média ponderada dos desvios-padrão, devido à correlação entre os activos
- O desvio-padrão da carteira é dada pela seguinte fórmula

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j}$$

onde:

- $\sigma_{i,j} = \frac{1}{m-1}\sum_{t=1}^{m}\left(r_{i,t}-\mu_i\right)\left(r_{j,t}-\mu_j\right)$ é a covariância entre a taxa de rentabilidade do activo i e a do activo j
- $\sigma_{i,i} = \sigma_i^2$ é a variância do activo i
- $\rho_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i\sigma_j}$ é o coeficiente de correlação linear entre a taxa de rentabilidade do activo i e a do activo j

Desvio-padrão de uma carteira (2/4)

- Por exemplo, para 2 activos A e B temos

$$\sigma_p = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}$$

- Apenas no caso especial em que $\rho_{A,B} = 1$ é que o desvio-padrão da carteira é uma média ponderada dos desvios-padrão dos activos que a compõem

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A\sigma_B} \\ &= \sqrt{(w_A\sigma_A + w_B\sigma_B)^2} \\ &= w_A\sigma_A + w_B\sigma_B\end{aligned}$$

Desvio-padrão de uma carteira (3/4)

- Se $\rho_{A,B} < 1$, o desvio-padrão da carteira é menor que a média ponderada dos desvios-padrão dos activos que a compõem
- Isto deve-se ao efeito de diversificação:
  - uma rentabilidade anormalmente elevada (baixa) de um activo tende a ser compensada pela rentabilidade do outro activo, que não é tão elevada (baixa)

Desvio-padrão de uma carteira (4/4)

Cenário	A	B	Carteira (12,5%A+87,5%B)
Mau ($\frac{1}{3}$)	-5%	1%	$(-5\%) \times 12,5\% + 1\% \times 87,5\% = 0,25\%$
Interm ($\frac{1}{3}$)	2%	0%	$2\% \times 12,5\% + 0\% \times 87,5\% = 0,25\%$
Bom ($\frac{1}{3}$)	9%	-1%	$9\% \times 12,5\% + (-1)\,\% \times 87,5\% = 0,25\%$
Média	2%	0%	0,25%
Desvio-padrão	5,7%	0,8%	0%

- Neste caso $\rho_{A,B} = -1$, e por isso conseguimos eliminar totalmente o risco investindo 12,5% no activo A e 87,5% no activo B
- Se $-1 < \rho_{A,B} < 1$ apenas conseguimos assegurar que

$$\sigma_p < w_A\sigma_A + w_B\sigma_B$$