Investimentos

António M. R. G. Barbosa

ISCTE Business School
Instituto Universitário de Lisboa

Dia 17: 15/Mar/12

Sumário

Outline

Fundamentação da duração enquanto medida de risco de taxa de juro (1/3)

- Já vimos que a duração tem as propriedades que desejávamos para uma medida de risco de taxa de juro
- Vamos agora fundamentar a sua utilização como medida de risco de taxa de juro de forma mais rigorosa
- **Para simplificar assuma-se que a yield curve é flat**
  - mais tarde vamos relaxar este pressuposto
- A expansão de Taylor de 1ª ordem para a variação do preço da obrigação em resultado de um choque na taxa de juro r é

Fundamentação da duração enquanto medida de risco de taxa de juro (2/3)

$$\Delta B_0 \approx \frac{\partial B_0}{\partial r}\Delta r = \frac{\partial\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{CF_j}{(1+r)^{t_j}}\right)}{\partial r}\Delta r = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\left(\frac{CF_j}{(1+r)^{t_j}}\right)}{\partial r}\Delta r$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(-t_j\frac{CF_j}{(1+r)^{t_j+1}}\right)\Delta r = \sum_{j=1}^{n}\left(-t_j\frac{CF_j}{(1+r)^{t_j}(1+r)}\right)\Delta r$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}\left(t_j\frac{CF_j}{(1+r)^{t_j}}\right)\frac{1}{1+r}\Delta r = -\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\left(t_j\frac{\frac{CF_j}{(1+r)^{t_j}}}{B_0}\right)}_{DM} B_0\frac{1}{1+r}\Delta r$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta B_0}{B_0} \approx -\underbrace{\frac{DM}{1+r}}_{MD}\Delta r$$

onde MD designa a duração modificada

Fundamentação da duração enquanto medida de risco de taxa de juro (3/3)

- Assim sendo, a quanto maior a duração, maior a sensibilidade do preço da obrigação a variações da taxa de juro:
  - note-se o sinal de menos, que significa que uma subida de taxas de juro implica uma descida no preço da obrigação
- Rearranjando a última equação, descobrimos que

$$\frac{\Delta B_0}{B_0} \approx -DM\frac{\Delta r}{1+r} \Leftrightarrow DM \approx -\underbrace{\frac{\frac{\Delta B_0}{B_0}}{\frac{\Delta r}{r}}}_{elasticidade\,preço-taxa\,de\,juro} \times \frac{1+r}{r}$$

- Temos então que a duração de Macaulay é proporcional à elasticidade preço-taxa de juro

Convexidade (1/4)

- A fórmula

$$\frac{\Delta B_0}{B_0} \approx -\frac{DM}{1+r}\Delta r$$

  é apenas uma aproximação:
  - ignorámos todos os termos da série de Taylor de ordem superior à primeira (aproximação linear)
  - e sabemos que a relação entre o preço da obrigação e a taxa de juro é convexa (logo não linear)
  - por isso só é indicada para pequenas variações da taxa de juro:
    - as subidas de preço em reposta a descidas de taxa de juro são subestimadas
    - e as descidas de preço são sobreestimadas
- Para melhorar a qualidade da aproximação, vamos considerar uma expansão de Taylor de 2ª ordem, para termos em conta a convexidade

Convexidade (2/4)

$$\Delta B_0 \approx \frac{\partial B_0}{\partial r}\Delta r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_0}{\partial r^2}\left(\Delta r\right)^2$$

- O primeiro termo já conhecemos; vamos tratar do segundo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 B_0}{\partial r^2}\Delta r^2 &= \frac{\partial^2\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{CF_j}{(1+r)^{t_j}}\right)}{\partial r^2}\left(\Delta r\right)^2 = \frac{\partial\left[\sum_{j=1}^{n}\left(-t_j\frac{CF_j}{(1+r)^{t_j+1}}\right)\right]}{\partial r}\left(\Delta r\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[t_j\left(t_j+1\right)\frac{CF_j}{\left(1+r\right)^{t_j+2}}\right]\left(\Delta r\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\left[t_j\left(t_j+1\right)\frac{CF_j}{\left(1+r\right)^{t_j}}\right]\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2 \\
&= \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\left[t_j\left(t_j+1\right)\frac{\frac{CF_j}{(1+r)^{t_j}}}{B_0}\right]}_{Convexidade\,(C)} B_0\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2
\end{aligned}$$

Convexidade (3/4)

- Temos então que a variação no preço da obrigação pode ser aproximada por

$$\Delta B_0 \approx \frac{\partial B_0}{\partial r}\Delta r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_0}{\partial r^2}(\Delta r)^2$$
$$= -DM \times B_0 \frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2} C \times B_0 \left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta B_0}{B_0} \approx -DM \frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2} C \left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2$$

- Note-se que a convexidade é positiva e logo:
  - variações positivas da taxa de juro têm menor impacto no preço da obrigação do que variações negativas de igual magnitude

Convexidade (4/4)

- Se a yield curve não for flat, a fórmula para a convexidade é

$$C = \sum_{j=1}^{n} \left[t_j \left(t_j + 1 \right) \frac{\frac{CF_j}{[1+r(0;t_j)]^{t_j}}}{B_0} \right]$$

Convexidade de uma carteira de obrigações

- Tal como para a duração, a convexidade de uma carteira de m obrigações é dada por

$$C^c = \sum_{j=1}^{m} C^j \frac{B_0^j}{\sum_{j=1}^{m} B_0^j} = \sum_{j=1}^{m} C^j \frac{B_0^j}{B_0^c}$$

em que:

- C^c é a convexidade da carteira
- C^j é a convexidade da obrigação j
- B_0^j é o valor justo da obrigação j
- B_0^c é o valor justo da carteira de obrigações

Generalização para yield curves não flat (1/3)

- A expressão
$$\frac{\Delta B_0}{B_0} \approx -DM \frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2} C \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right)^2$$
é generalizável para yield curves não flat
- No entanto, precisamos de fazer um pressuposto extra:
  - é necessário que as taxas de juro para todos os períodos se altere com base em choques multiplicativos
$$\frac{\Delta r\left(0; t_j\right)}{1 + r\left(0; t_j\right)} = \lambda,\ j = 1, \ldots, n$$
  - o que implica que
$$\begin{aligned} & \Delta r\left(0; t_j\right) = \lambda \left[1 + r\left(0; t_j\right)\right] \\ \Leftrightarrow & r'\left(0; t_j\right) = r\left(0; t_j\right) + \lambda \left[1 + r\left(0; t_j\right)\right] \\ \Leftrightarrow & 1 + r'\left(0; t_j\right) = (1 + \lambda) \left[1 + r\left(0; t_j\right)\right] \end{aligned}$$
- Note-se que um choque multiplicativo na yield curve não significa que a yield curve se desloque paralelamente, como consta na sebenta

Generalização para yield curves não flat (2/3)

- Se fixarmos $\lambda = 0$, podemos escrever

$$B_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{\{(1+\lambda)\left[1 + r\left(0; t_j\right)\right]\}^{t_j}}$$

- Para uma yield curve não flat calculamos a expansão de Taylor para variações do preço da obrigação decorrentes de choques multiplicativos λ

$$\Delta B_0 \approx \left.\frac{\partial B_0}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} \Delta\lambda + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 B_0}{\partial \lambda^2}\right|_{\lambda=0} \Delta\lambda^2$$

- Mas como $\Delta\lambda = \lambda - 0 = \lambda$,

$$\Delta B_0 \approx \left.\frac{\partial B_0}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} \lambda + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 B_0}{\partial \lambda^2}\right|_{\lambda=0} \lambda^2$$

Generalização para yield curves não flat (3/3)

- Por exemplo, o primeiro termo vem igual a

$$\left.\frac{\partial B_0}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} \lambda = \left.\frac{\partial \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{\left\{(1+\lambda)\left[1+r\left(0;t_j\right)\right]\right\}^{t_j}} \right)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} \lambda$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(-t_j \frac{CF_j}{\left[1+r\left(0;t_j\right)\right]^{t_j+1}} \left[1+r\left(0;t_j\right)\right] \right) \lambda$$

$$= \underbrace{-\sum_{j=1}^{n} \left(t_j \frac{\frac{CF_j}{\left[1+r\left(0;t_j\right)\right]^{t_j}}}{B_0} \right)}_{DFW} B_0 \lambda$$

- Repetindo para o segundo termo, obtemos

$$\frac{\Delta B_0}{B_0} \approx -DFW \times \lambda + \frac{1}{2} C \times \lambda^2$$

Outline

Exemplo 1

Exemplo 1

Considere as seguintes obrigações:

(A) OCZ com maturidade dentro de 6 meses e $B_0 = 99,7509$;

(B) obrigação com cupão anual de 4,5%, maturidade dentro de 2 anos e $B_0 = 106,4022$.

As taxas spot a 6 meses, 1 ano e 2 anos são 0,5%, 0,75% e 1,25%, respectivamente.

Calcule: a DFW e convexidade (com base na yield curve apresentada) de cada uma das obrigações.

Duração de Fisher-Weil

- A DFW da OCZ é a sua maturidade, 0,5 anos
- Para a obrigação com cupão

$$
\begin{aligned}
DFW_B &= \sum_{j=1}^{n} t_j \frac{\frac{CF_j}{[1+r(0,t_j)]^{t_j}}}{B_0} \\
&= 1 \times \underbrace{\frac{\frac{4{,}5}{(1+0{,}75\%)^1}}{106,4022}}_{0{,}0420} + 2 \times \underbrace{\frac{\frac{104{,}5}{(1+1{,}25\%)^2}}{106,4022}}_{0{,}9580} \\
&= 1,9580\, anos
\end{aligned}
$$

Convexidade

- A convexidade da OCZ é simplesmente

$$C_A = 0,5\,(1+0,5) = 0,75$$

- E a convexidade da obrigação com cupão é

$$C_B = \sum_{j=1}^{n} t_j\,(t_j+1)\,\frac{\frac{CF_j}{[1+r(0,t_j)]^{t_j}}}{B_0}$$

$$= 1\,(1+1) \times \underbrace{\frac{\frac{4{,}5}{(1+0{,}75\%)^1}}{106,4022}}_{0{,}0420} + 2\,(2+1) \times \underbrace{\frac{\frac{104{,}5}{(1+1{,}25\%)^2}}{106,4022}}_{0{,}9580}$$

$$= 5,8321$$

Exemplo 2

Exemplo 2

Retomando o exemplo 1, calcule o preço das obrigações nos seguintes cenários:
(i) choque multiplicativo de +0,1%
(ii) choque multiplicativo de -0,1%
(iii) choque multiplicativo de +1%
(iv) choque multiplicativo de -0,45%

Considere aproximações utilizando apenas a duração e também aproximações utilizando a duração e convexidade. Compare com o valor exacto das obrigações.

Choque multiplicativo de +0,1% (1/2)

- Após o choque multiplicativo, as taxas spot a 0,5, 1 e 2 anos ficam

$$
\begin{aligned}
r\left(0;0,5\right) &= 0,5\% + 0,1\%\left(1+0,5\%\right) = 0,6005\% \\
r\left(0;1\right) &= 0,75\% + 0,1\%\left(1+0,75\%\right) = 0,8508\% \\
r\left(0;2\right) &= 1,25\% + 0,1\%\left(1+1,25\%\right) = 1,3513\%
\end{aligned}
$$

- A aproximação para o preço da OCZ utilizando apenas a duração é

$$
\frac{\Delta B_0^A}{B_0^A} \approx -DFW \times \lambda = -0,5 \times 0,1\% = -0,05\%
$$

$$
\Rightarrow B_0^{A'} \approx B_0^A - DFW \times \lambda \times B_0^A = 99,7509 - 0,5 \times 0,1\% \times 99,7509 = 99,7011
$$

Choque multiplicativo de +0,1% (2/2)

- Utilizando a duração e convexidade

$$\frac{\Delta B_0^A}{B_0^A} \approx -DFW \times \lambda + \frac{1}{2}C \times \lambda^2 = -0,5 \times 0,1\% + \frac{0,75 \times 0,1\%^2}{2} = -0,05004\%$$

$$\Rightarrow B_0^{A'} \approx B_0^A - DFW \times \lambda \times B_0^A + \frac{1}{2}C \times \lambda^2 \times B_0^A$$

$$= 99,7509 - 0,5 \times 0,1\% \times 99,7509 + \frac{1}{2}0,75 \times 0,1\%^2 \times 99,7509 = 99,7011$$

- O preço exacto da obrigação é

$$B_0^{A'} = \frac{100}{(1 + 0,6005\%)^{0,5}} = 99,7011$$

Quadro resumo

- Os cálculos para a obrigação com cupão e para os outros 3 cenários é semelhante
- Os resultados são apresentados na seguinte tabela

Choque	Obrigação A			Obrigação B		
multiplicativo	Duração	D+Conv	Exacto	Duração	D+Conv	Exacto
0%			99,7509			106,4022
+0,1%	99,7011	99,7011	99,7011	106,1938	106,1942	106,1942
-0,1%	99,8008	99,8008	99,8008	106,6105	106,6108	106,6108
+1%	99,2522	99,2559	99,2559	104,3188	104,3498	104,3494
-0,45%	99,9754	99,9761	99,9761	107,3397	107,3460	107,3460

- Note-se que a convexidade melhora a qualidade da aproximação, mas continuam a existir erros de aproximação

Exemplo 3

Exemplo 3

Retomando o exemplo 1, calcule a DFW e convexidade de uma carteira de obrigações investida 25% na OCZ e 75% na obrigação com cupão (percentagens relativas ao valor de equilíbrio da carteira)

- A DFW da carteira é

$$\begin{aligned} DFW_C &= 25\% \times DFW_A + 75\% \times DFW_B \\ &= 25\% \times 0,5 + 75\% \times 1,9580 = 1,5935 \end{aligned}$$

- E a convexidade da carteira é

$$\begin{aligned} C_C &= 25\% \times C_A + 75\% \times C_B \\ &= 25\% \times 0,75 + 75\% \times 5,8321 = 4,5616 \end{aligned}$$