ISCTE Business School – Licenciatura de Gestão
***Investimentos* 2010/11 – Frequência e Exame 1ª Época**
Duração: 2 horas (Frequência) ou 3 horas (Exame) 07/Junho/2010

<u>CASO 1</u> (2x1=2 valores)

a) Mostre que o parâmetro beta de uma carteira de acções é igual à média ponderada dos betas das acções componentes.

$$\beta_p = \frac{COV(r_p, r_M)}{\sigma_M^2}$$
$$= \frac{1}{\sigma_M^2} COV\left(\sum_{i=1}^{n} r_i w_i, r_M\right)$$
$$= \frac{1}{\sigma_M^2} \sum_{i=1}^{n} w_i COV(r_i, r_M)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{COV(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i$$

b) No âmbito do modelo de Markowitz, é possível a carteira óptima de activos com risco ser ineficiente?

Assumindo que os investidores são não saciáveis e avessos ao risco, tal não será possível visto que as curvas de indiferença terão inclinação positiva.

Para que tal acontecesse seria necessário que as curvas de indiferença tivessem inclinação negativa, ou seja que o investidor preferisse igualmente outra carteira com menor rentabilidade e maior risco.

c) Comente a seguinte afirmação e classifique-a como sendo verdadeira ou falsa: "À luz dos pressupostos do CAPM, todos os investidores deveriam deter a mesma carteira de activos".

Afirmação falsa.

A carteira de activos com risco seria igual para todos os investidores, visto assumir-se que a taxa de juro sem risco é igual para todos os investidores e que estes possuem expectativas homogéneas.

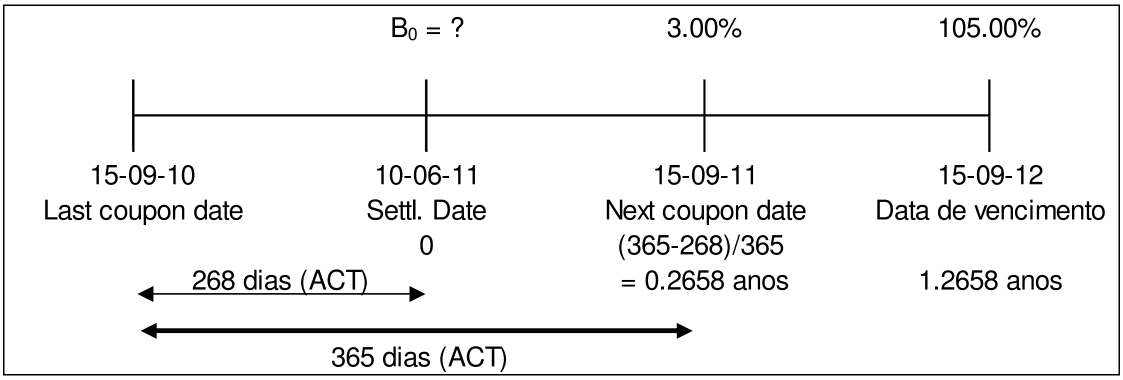
Contudo, a combinação óptima entre o activo sem risco e a carteira cópia de mercado será diferente para diferentes investidores.

<u>CASO 2</u> (7 **valores)**

a)

Settlement date = 07/06/11 + 3 dias de calendário = 10/06/11.

Pretende-se avaliar uma obrigação com os seguintes *cash flows* vincendos:



Portanto,

$$B_0 = \frac{3\%}{[1+r(0;0.2658)]^{0.2658}} + \frac{105\%}{[1+r(0;1.2658)]^{1.2658}}.$$

A taxa spot a 0.2658 anos pode ser obtida via extrapolação linear:

$$r(0,0.2658) \approx 1.5\% + (2\% - 1.5\%) \times \frac{0.2658 - 1}{2 - 1} \cong 1.1329\%.$$

A taxa spot a 1.2658 anos pode ser obtida via interpolação linear:

$$r(0,1.2658) \approx 2\% + (3\% - 2\%) \times \frac{1.2658 - 1}{2 - 1} \cong 1.6329\%.$$

Então:

$$B_0 = \frac{3\%}{[1+1.1329\%]^{0.2658}} + \frac{105\%}{[1+1.6329\%]^{1.2658}} \cong 105.86\%.$$

b)

$$VT_0^{bid} = \frac{3\%}{[1+1.7\%]^{0.2658}} + \frac{105\%}{[1+1.7\%]^{1.2658}} \cong 105.77\%.$$

$VT_0^{bid} < B_0 \Rightarrow$ Não vender.

$$VT_0^{ask} = \frac{3\%}{[1+1.65\%]^{0.2658}} + \frac{105\%}{[1+1.65\%]^{1.2658}} \cong 105.83\%.$$

Decisão:

$\mathrm{VT}_0^{\mathrm{ask}} < \mathrm{B}_0 \Rightarrow$ Comprar.

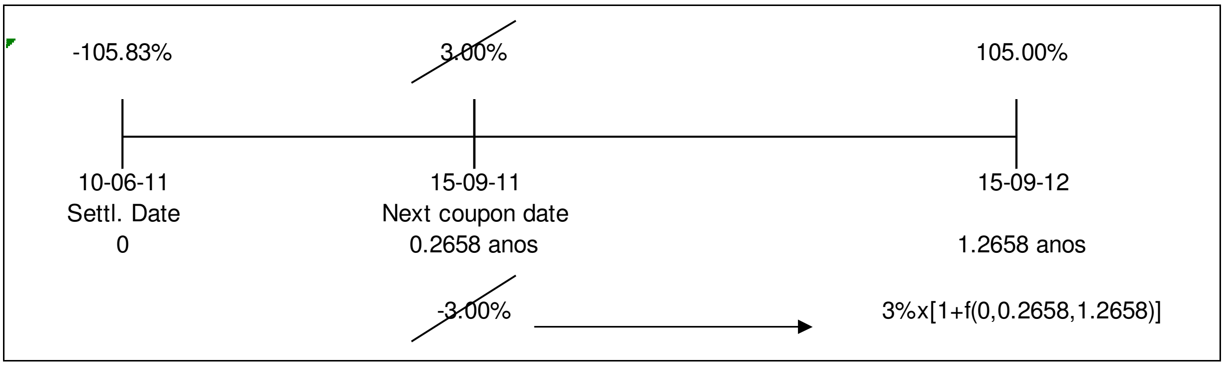
c)

$$f(0,0.2658,1.2658): \quad (1+1.6329\%)^{1.2658} = (1+1.1329\%)^{0.2658} \times [1+f(0,0.2658,1.2658)]^{1}$$

$$\Rightarrow f(0,0.2658,1.2658) \cong 1.766\% > r(0,1) = 1.5\%.$$

Consequentemente, o mercado antecipa uma subida da taxa a 1 ano.

d)



Cálculo da TRR, utilizando a taxa *forward* da alínea anterior:

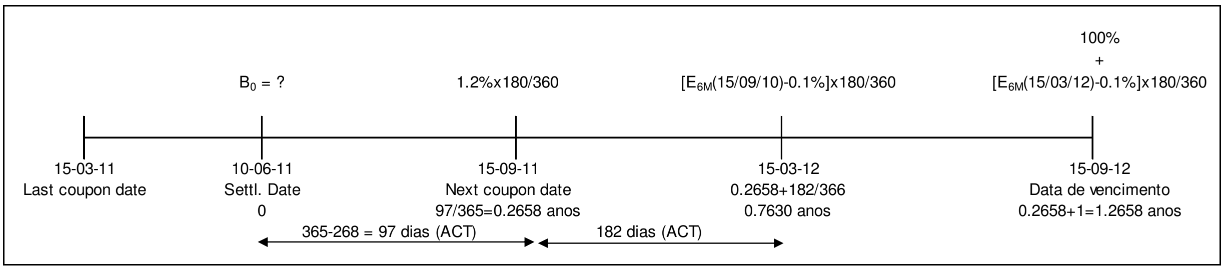
$$105.83\% \times (1+TRR)^{1.2658} = 3\% \times (1+1.766\%)^{1} + 105\%$$

$$\Leftrightarrow TRR \cong 1.656\%.$$

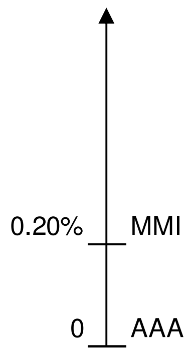
A TRR (1.656%) é superior à taxa spot a 1.2658 anos (1.6329%) na medida em que o VT-ask (105.83%) é inferior ao *fair value* da obrigação (105.86%).

e)

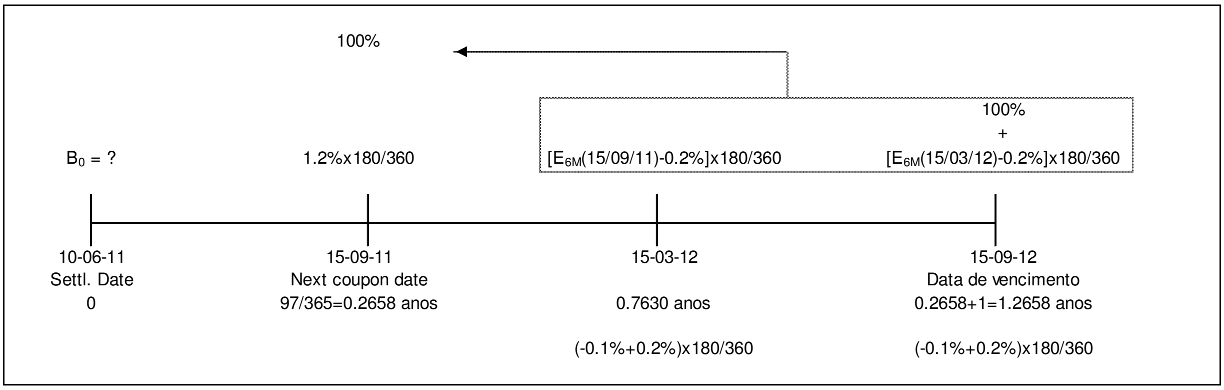
Diagrama temporal da FRN a avaliar:



Considerando a seguinte escala de risco de crédito



tal é equivalente a considerar a seguinte decomposição de cash flows:



A taxa *spot* com risco AAA (S&P) a 0.7630 anos pode ser obtida via extrapolação linear:

$$r(0{,}0.7630) \approx 1.5\% + (2\% - 1.5\%) \times \frac{0.7630 - 1}{2 - 1} \cong 1.3815\%.$$

Portanto,

$$B_0 = \frac{100\% + {}^{1.2\%}\!/_{2}}{(1 + 1.1329\%)^{0.2658}} + \frac{(-0.1\% + 0.2\%) \times \frac{180}{360}}{(1 + 1.3815\%)^{0.7630}} + \frac{(-0.1\% + 0.2\%) \times \frac{180}{360}}{(1 + 1.6329\%)^{1.2658}}$$

$$\cong 100.40\%.$$

<u>CASO 3</u> (7 valores)

a) A rentabilidade esperada da carteira do Sr. Fonseca é

$$E(r_p) = 0{,}212 \times 15\% + 0{,}896 \times 11\% - 0{,}108 \times 6\% = 12{,}388\%,$$

e o respectivo desvio-padrão é

$$\sigma_p = \sqrt{\begin{array}{c} 0{,}212^2 \times 0{,}0625 + 0{,}896^2 \times 0{,}0324 + (-0{,}108)^2 \times 0{,}0081 \\ +2 \times 0{,}212 \times 0{,}896 \times 0{,}036 \\ +2 \times 0{,}212 \times (-0{,}108) \times 0{,}01125 \\ +2 \times 0{,}896 \times (-0{,}108) \times 0{,}00324 \end{array}} = 20{,}359\%.$$

b) A composição da carteira do Sr. Meireles é obtida resolvendo o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 0{,}06 = 0{,}15w_A + 0{,}11w_B + 0{,}06w_C \\ 0{,}07326 = \sqrt{\begin{array}{c} 0{,}0625w_A^2 + 0{,}0324w_B^2 + 0{,}0081w_C^2 \\ +2 \times 0{,}036w_Aw_B + 2 \times 0{,}01125w_Aw_C + 2 \times 0{,}00324w_Bw_C \end{array}} \\ w_A + w_B + w_C = 1 \end{cases}$$

Embora seja possível resolver este sistema, é mais fácil utilizarmos a informação adicional de que $w_A = -0{,}23$. Desta forma, podemos descartar a equação do desvio-padrão do sistema, resolvendo o seguinte sistema, que é mais simples

$$\begin{cases} 0{,}06 = 0{,}15w_A + 0{,}11w_B + 0{,}06w_C \\ w_A + w_B + w_C = 1 \\ w_A = -0{,}23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}06 = 0{,}15 \times (-0{,}23) + 0{,}11w_B + 0{,}06w_C \\ -0{,}23 + w_B + w_C = 1 \\ w_A = -0{,}23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}06 = 0{,}15 \times (-0{,}23) + 0{,}11 \times (1{,}23 - w_C) + 0{,}06w_C \\ w_B = 1{,}23 - w_C \\ w_A = -0{,}23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}06 = -0{,}0345 + 0{,}1353 - 0{,}11w_C + 0{,}06w_C \\ w_B = 1{,}23 - w_C \\ w_A = -0{,}23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}05w_C = 0{,}0408 \\ w_B = 1{,}23 - w_C \\ w_A = -0{,}23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_C = 0{,}816 \\ w_B = 1{,}23 - 0{,}816 = 0{,}414 \\ w_A = -0{,}23 \end{cases}$$

c) Uma carteira é eficiente (à luz do modelo de Markowitz) se verificar cumulativamente as seguintes condições: (i) pertencer à fronteira de variância mínima de Markowitz; (ii) tiver uma rentabilidade esperada superior à da carteira de variância mínima.

Começando pela carteira do Sr. Fonseca, o primeiro passo será verificar se se trata de uma carteira de fronteira:

$$\sigma_p = \sqrt{5{,}874 \times 0{,}12388^2 - 0{,}608 \times 0{,}12388 + 0{,}0207} = 18{,}848\% < 20{,}359\%.$$

Portanto, como a carteira de fronteira com rentabilidade esperada de 12,388% tem um risco de 18,848%, inferior ao risco de 20,359% da carteira do Sr. Fonseca. Portanto, a carteira do Sr. Fonseca não é uma carteira de fronteira. Logo, não é uma carteira eficiente.

Passando à carteira do Sr. Meireles:

$$\sigma_p = \sqrt{5{,}874 \times 0{,}06^2 - 0{,}608 \times 0{,}06 + 0{,}0207} = 7{,}326\% = 7{,}326\%.$$

Portanto, a carteira do Sr. Meireles situa-se na fronteira de variância mínima de Markowitz. Resta se saber se na parte inferior (ineficiente), se na parte superior (eficiente). Para tal, tem que se calcular a rentabilidade esperada da carteira de variância mínima, que divide a fronteira de variância mínima em 2 partes, a eficiente e a ineficiente. Para tal, resolve-se

$$\min_{E(r_p)} \sigma_p^2 = 5{,}874E(r_p)^2 - 0{,}608E(r_p) + 0{,}0207$$

A condição de primeira ordem (a condição de segunda ordem é sempre verificada) é
$2 \times 5{,}874E(r_{mvp}) - 0{,}608 = 0$

$$E(r_{mvp}) = \frac{0{,}608}{2 \times 5{,}874} = 5{,}175\%$$

Como a rentabilidade esperada da carteira do Sr. Meireles é de 6%, logo superir a 5,175%, a carteira do Sr. Meireles é eficiente.

(d.1) Substituindo o desvio-padrão da carteira do Sr. Fonseca na equação para a fronteira de variância mínima, obtém-se o par de rentabilidades das 2 carteiras de fronteira para esse nível de risco. O que nos interessa é a carteira eficiente, logo a rentabilidade esperada mais elevada do par.

$$0{,}20359^2 = 5{,}874E(r_p)^2 - 0{,}608E(r_p) + 0{,}0207$$

$$5{,}874E(r_p)^2 - 0{,}608E(r_p) - 0{,}020749 = 0$$

$$E(r_p) = \frac{0{,}608 \pm \sqrt{(-0{,}608)^2 - 4 \times 5{,}874 \times (-0{,}020749)}}{2 \times 5{,}874}$$

$$E(r_p) = 13{,}056\% \ ou \ E(r_p) = -2{,}706\%.$$

O incremento máximo de rentabilidade esperada (para o mesmo risco) que se pode obter investindo numa carteira eficiente é de $13{,}056\% - 12{,}388\% = 0{,}668\%$.

(d.2) A resposta a esta questão está implícita na resolução da questão c), quando verificámos que a carteira do Sr. Fonseca não era uma carteira de fronteira. Para uma rentabilidade esperada de 12,388%, o desvio-padrão mínimo que se pode obter, investindo numa carteira eficiente, é de 18,848%, pelo que a redução máxima de risco é de $20{,}359\% - 18{,}848\% = 1{,}511\%$.

e) Dado que a carteira do Sr. Meireles é eficiente, é potencialmente uma carteira óptima para um investidor avesso ao risco e não saciável. Se é ou não óptima para o Sr. Meireles dependerá das suas preferências. Para responder a esta questão vamos calcular a carteira óptima em função do nível de aversão ao risco α, e posteriomente determinar qual o α que torna a carteira do Sr. Meireles óptima.

A carteira óptima pode ser obtida resolvendo o seguinte problema
$\max_{E(r_p)} U_p = \ln[E(r_p) - \alpha\sigma_p^2] \ s.a. \ \sigma_p^2 = 5{,}874E(r_p)^2 - 0{,}608E(r_p) + 0{,}0207$

Como é apenas a ordenação dada pela função de utilidade que interessa, não o seu valor em concreto, e como a função logaritmica é uma função monotónica crescente, podemos maximizar $E(r_p) - \alpha\sigma_p^2$ em vez de $\ln[E(r_p) - \alpha\sigma_p^2]$, dado que a primeira torna-se mais simples e a solução é a mesma. Podemos também simplificar o problema, substituindo a restrição na função objectivo para evitar de resolver a Lagrangeana. Assim sendo, o problema equivalente que vamos resolver é

$$\max_{E(r_p)} E(r_p) - \alpha\left[5{,}874E(r_p)^2 - 0{,}608E(r_p) + 0{,}0207\right].$$

A condição de primeira ordem é

$$1 - 2 \times 5{,}874\alpha E(r_{p^*}) + 0{,}608\alpha = 0$$

$$E(r_{p^*}) = \frac{1 + 0{,}608\alpha}{11{,}748\alpha}$$

Com base nesta expressão para a rentabilidade esperada da carteira óptima, podemos obter o valor de α que torna óptima a carteira do Sr. Meireles, a qual tem uma rentabilidade esperada de 6%:

$$0{,}06 = \frac{1 + 0{,}608\alpha}{11{,}748\alpha}$$

$$0{,}06 \times 11{,}748\alpha = 1 + 0{,}608\alpha$$

$$0{,}70488\alpha - 0{,}608\alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{0{,}09688} = 10{,}322.$$

Para que esta carteira fosse óptima, o Sr. Meireles teria que ter um parâmetro de aversão do risco de 10,322. No entanto, como se estimou um parâmetro de aversão ao risco α algures entre 5 e 7 para o Sr. Meireles, o Sr. Meireles é de facto menos avesso ao risco do que o necessário para que a sua actual carteira seja óptima. Desta forma, a actual carteira do Sr. Meireles revela-se demasiado conservadora para o seu perfil de risco.

a) Como só existem estes 3 activos, a carteira cópia de mercado é uma carteira que inclui estes 3 activos na mesma proporção da sua capitalização bolsista, ou seja,

$$w_A^M = \frac{1.438.742€}{1.438.742€ + 3.530.586€ + 5.030.672€} = \frac{1.438.742€}{10.000.000€} = 14{,}387\%$$

$$w_B^M = \frac{3.530.586€}{10.000.000€} = 35{,}306\%$$

$$w_C^M = \frac{5.030.672}{10.000.000€} = 50{,}307\%$$

Logo, a rentabilidade esperada da carteira cópia de mercado é

$$E(r_M) = 0{,}14387 \times 15\% + 0{,}35306 \times 11\% + 0{,}50307 \times 6\% = 9{,}06\%.$$

O seu desvio-padrão pode ser obtido da mesma forma que o fizemos para a carteira do Sr. Fonseca (questão a)). Alternativamente, podemos obter o desvio-padrão de uma forma mais expedita se notarmos que a carteira cópia de mercado é, em equilíbrio, uma carteira eficiente. Logo, situa-se na fronteira de variância mínima de Markowitz, pelo que podemos utilizar a equação que a define para obter o desvio-padrão da carteira cópia de mercado.

$$\sigma_M = \sqrt{5{,}874 \times 0{,}0906^2 - 0{,}608 \times 0{,}0906 + 0{,}0207} = 11{,}761\%.$$

g) Em equilíbrio, a carteira de tangência coincide com a carteira cópia de mercado. Logo, basta-nos determinar qual a taxa de juro sem risco que torna a carteira cópia de mercado obtida na carteira de tangência.

A carteira de tangência é obtida resolvendo o seguinte problema

$$\max_{E(r_p)} \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p} \; s.a. \sigma_p^2 = 5{,}874E(r_p)^2 - 0{,}608E(r_p) + 0{,}0207$$

Substituindo a restrição na função objectivo, para evitar de resolver a Lagrangeana,

$$\max_{E(r_p)} \frac{E(r_p) - r_f}{\sqrt{5{,}874E(r_p)^2 - 0{,}608E(r_p) + 0{,}0207}}$$

A condição de primeira ordem é

$$\frac{1}{\sqrt{5{,}874E(r_M)^2 - 0{,}608E(r_M) + 0{,}0207}} - \frac{[E(r_M) - r_f][2 \times 5{,}874E(r_M) - 0{,}608]}{2[5{,}874E(r_M)^2 - 0{,}608E(r_M) + 0{,}0207]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$2[5{,}874E(r_M)^2 - 0{,}608E(r_M) + 0{,}0207] - [E(r_M) - r_f][2 \times 5{,}874E(r_M) - 0{,}608] = 0$$

Substituindo $E(r_M) = 9{,}06\%$ na expressão acima, obtemos a taxa de juro sem risco

$$2 \times (5{,}874 \times 0{,}0906^2 - 0{,}608 \times 0{,}0906 + 0{,}0207) - (0{,}0906 - r_f)(2 \times 5{,}874 \times 0{,}0906 - 0{,}608) = 0$$

$$0{,}027662 - 0{,}456369 \times (0{,}0906 - r_f) = 0$$

$$r_f = 0{,}0906 - \frac{0{,}027662}{0{,}456369} = 3\%$$

Em alternativa, a carteira de tangencia pode também ser obtida igualando as inclinações da fronteira eficiente global e da fronteira eficiente de Markowitz:

$$\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} = \left[\frac{1}{2}\frac{2 \times 5{,}874E(r_M) - 0{,}608}{\sqrt{5{,}874E(r_M)^2 - 0{,}608E(r_M) + 0{,}0207}}\right]^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{E(r_M) - r_f}{\sqrt{5{,}874E(r_M)^2 - 0{,}608E(r_M) + 0{,}0207}} = \frac{2\sqrt{5{,}874E(r_M)^2 - 0{,}608E(r_M) + 0{,}0207}}{2 \times 5{,}874E(r_M) - 0{,}608}$$

$$\Leftrightarrow [E(r_M) - r_f][2 \times 5{,}874E(r_M) - 0{,}608] = 2[5{,}874E(r_M)^2 - 0{,}608E(r_M) + 0{,}0207]$$

Substituindo $E(r_M) = 9{,}06\%$ na expressão acima, obtemos a mesma taxa de juro sem risco de 3%.

(Resolução alternativa: $r_f = 2\%$.)

h) Se o mercado está em equilíbrio, os 3 activos têm um Alpha de Jensen igual a 0, ou seja, estão situados sobre a SML. O mesmo é verdade de qualquer carteira que combine esses activos, nomeadamente a carteira do Sr. Meireles. Logo, podemos determinar o β da carteira do Sr. Meireles indirectamente através da SML.

$$0{,}06 = 0{,}03 + \beta \times (0{,}0906 - 0{,}03)$$

$$\beta = \frac{0{,}06 - 0{,}03}{0{,}0906 - 0{,}03} = 0{,}495$$

O risco total (7,326%) da carteira do Sr. Meireles pode então ser decomposto em

$$\mathit{Risco\ Sistemático} = \beta\sigma_M = 0{,}495 \times 0{,}11761 = 5{,}822\%$$

$$Risco\ Específico = \sqrt{\sigma_p^2 - \beta^2 \sigma_M^2} = \sqrt{0{,}07326^2 - 0{,}05822^2} = 4{,}447\%.$$

(Resolução alternativa 1: $\beta = 0{,}685$, $Risco\ Sistemático = 6{,}543\%$, $Risco\ Específico = 3{,}295\%$.)
(Resolução alternativa 2: $\beta = 0{,}714$, $Risco\ Sistemático = 6{,}640\%$, $Risco\ Específico = 3{,}095\%$.)

<u>CASO 4</u> (4 valores)

a)

Determinação da TDD:

1.125/1.50 = 75%

Determinação do g:

$$g = RoE \times (1 - TDD) \Rightarrow g = 15\% \times (1 - 75\%) \Rightarrow g = 3.75\%$$

Determinação da R(Telecom UK):

Se Rm = 10% e Rm – Rf = 5%, então Rf = 5%

$$R = Rf + Beta \times (Rm - Rf) \Rightarrow R = 5\% + 1.25 \times 5\% \Rightarrow R = 11.25\%$$

Anos	EPS	DPS
1 – 2012	1.25	1.00
2 – 2013	1.50	1.125
3 - 2014	1.50x(1+3.75%) = 1.5563	1.5563x75% = 1.1672

(…)

Valor de equilíbrio da acção:

$$Po = \frac{1.00}{(1+11.25\%)^1} + \frac{1.125}{(1+11.25\%)^2} + \frac{\frac{1.1672}{11.25\% - 3.75\%}}{(1+11.25\%)^2} \Rightarrow Po = 14.3822$$

Decisão de trading: comprar (o valor de equilíbrio das acções é superior ao seu valor de mercado)

b)

$$12.50 = \frac{1.00}{(1+11.25\%)^1} + \frac{1.125}{(1+11.25\%)^2} + \frac{\frac{1.125x(1+g)}{11.25\% - g}}{(1+11.25\%)^2} \Rightarrow g = 2.5334\%$$

c)

com TDD = 100%, então g = 0%

Anos	EPS	DPS
1 – 2012	1.25	1.00
2 – 2013	1.50	1.125
3 – 2014	1.50x(1+0%) = 1.5	1.5x100% = 1.5

(…)

Valor de equilíbrio da acção:

$$Po = \frac{1.00}{(1+11.25\%)^1} + \frac{1.125}{(1+11.25\%)^2} + \frac{\frac{1.5}{11.25\%}}{(1+11.25\%)^2} \Rightarrow Po = 12.5809$$

Determinar o valor do VAOC:

$$VAOC = Poc/cresc. - Pos/cresc. = 13.3820 - 12.5809 = 0.8011$$

Como RoE é maior R então o VAOC é maior que zero

d)

PER sector 2012 = 11x
PER Telecom UK 2012 = Cotação actual / EPS 2012 = 12.5 / 1.25 = 10x está abaixo do PER do sector

Decisão: Colocar na carteira pois o PER 2012 da empresa é inferior ao PER do sector e valor de Equilíbrio é maior que cotação actual.