

CASO 1

- a) Em que condições pode o desvio-padrão da taxa de rentabilidade de uma carteira composta por duas acções ser dado pela média ponderada dos desvio-padrão das duas acções?

Caso o coeficiente de correlação linear entre as taxas de rentabilidade das duas acções seja igual a 1.

Com efeito,

$$\sigma_p^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}.$$

Quando $\rho_{A,B} = 1$, então

$$\sigma_p^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B$$

$$= (w_A \sigma_A + w_B \sigma_B)^2.$$

Portanto,

$$\sigma_p = w_A \sigma_A + w_B \sigma_B.$$

- b) Sabendo que os Bilhetes do Tesouro a 6 meses estão actualmente cotados a 99.50% e que a Euribor a 6 meses é igual a 1.5%, calcule o *credit spread* entre o mercado monetário e o Tesouro.

Taxa *spot* sem risco a 6 meses (taxa nominal anual na base de calendário 30/360):

$$r(0,6M): 99.50\% = \frac{100\%}{1 + r(0,6M) \times \frac{6}{12}} \Rightarrow r(0,6M) \cong 1\%.$$

$$\text{Credit spread} = 1.5\% - 1\% = 0.5\%.$$

- c) Defina a equação da *Capital Market Line*, considerando que a taxa de juro sem risco para aplicação de fundos (r_b) é inferior à taxa de juro para contracção de financiamentos (r_a).

Quando $r_b = r_a = r$, a equação da CML corresponde à equação da recta com origem no ponto $(r_f, 0)$ e tangente à fronteira eficiente de Markowitz no ponto correspondente à carteira cópia do mercado (M), i.e.

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \sigma_p.$$

Sendo $r_b < r_a$, então:

$$E(r_p) = \begin{cases} r_b + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \sigma_p & \text{se } \sigma_p \leq \sigma_M \\ r_a + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \sigma_p & \text{se } \sigma_p > \sigma_M \end{cases}.$$

- d) Comente a seguinte afirmação e classifique-a como sendo verdadeira ou falsa: “O *fair value* da acção é negativo quando a taxa de crescimento constante é superior à taxa de rentabilidade mínima exigida para a acção”.

Afirmação falsa, visto não ser possível utilizar o modelo de Gordon quando $g > r$. Quando $g > r$, então $P_0 = +\infty$.

Com efeito,

$$P_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{D_n}{(1+r)^n} \right].$$

Assumindo crescimento constante à taxa g , então

$$P_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{D_1}{1+r} + \frac{D_1 \times (1+g)}{(1+r)^2} + \dots + \frac{D_1 \times (1+g)^{n-1}}{(1+r)^n} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{D_1}{1+r} \times \frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^n}{1 - \left(\frac{1+g}{1+r} \right)}$$

$$= D_1 \times \frac{1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^n}{r - g}.$$

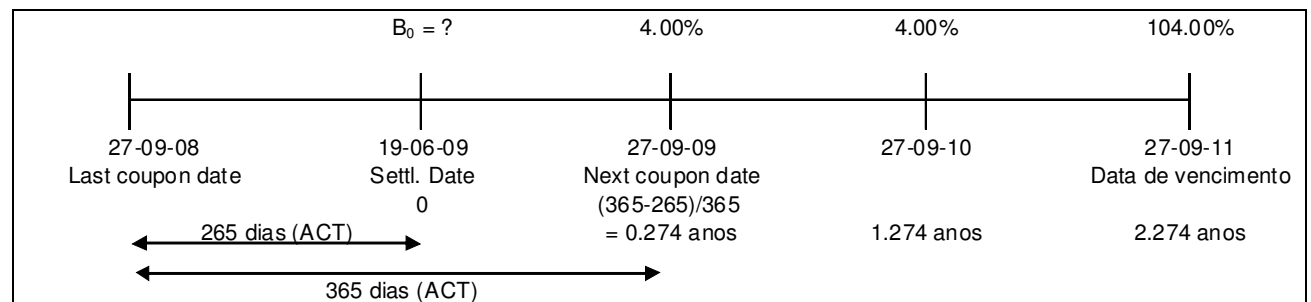
Caso $g > r$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^n = +\infty.$$

CASO 2

a)

Pretende-se avaliar uma obrigação do Tesouro com os seguintes *cash flows* vindendos:



Portanto,

$$B_0 = \frac{4\%}{[1 + r(0,0.274)]^{0.274}} + \frac{4\%}{[1 + r(0,1.274)]^{1.274}} + \frac{104\%}{[1 + r(0,2.274)]^{2.274}}$$

As taxas *spot* a 1.274 e 2.274 anos podem ser obtidas via interpolação linear:

$$r(0,1.274) \approx 1.5\% + (2\% - 1.5\%) \times \frac{1.274 - 1}{2 - 1} \approx 1.637\%;$$

$$r(0,2.274) \approx 2\% + (3\% - 2\%) \times \frac{2.274 - 2}{3 - 2} \approx 2.274\%.$$

A taxa *spot* a 0.274 anos pode ser obtida via extrapolação linear:

$$r(0,0.274) \approx 1.5\% + (2\% - 1.5\%) \times \frac{0.274 - 1}{2 - 1} \approx 1.137\%.$$

Então:

$$B_0 = \frac{4\%}{[1 + 1.137\%]^{0.274}} + \frac{4\%}{[1 + 1.637\%]^{1.274}} + \frac{104\%}{[1 + 2.274\%]^{2.274}} \approx 106.72\%.$$

$$AI = 4\% \times \frac{265}{365} = 2.90\%.$$

Decisão:

$$VT_0^{bid} = 103.75\% + 2.90\% = 106.65\% < B_0 \Rightarrow \text{Não vender};$$

$$VT_0^{ask} = 103.80\% + 2.90\% = 106.70\% < B_0 \Rightarrow \text{Comprar.}$$

b)

$$DFW = \frac{0.274 \times \frac{4\%}{[1+1.137\%]^{0.274}} + 1.274 \times \frac{4\%}{[1+1.637\%]^{1.274}} + 2.274 \times \frac{104\%}{[1+2.274\%]^{2.274}}}{106.72\%} \cong 2.1625.$$

c)

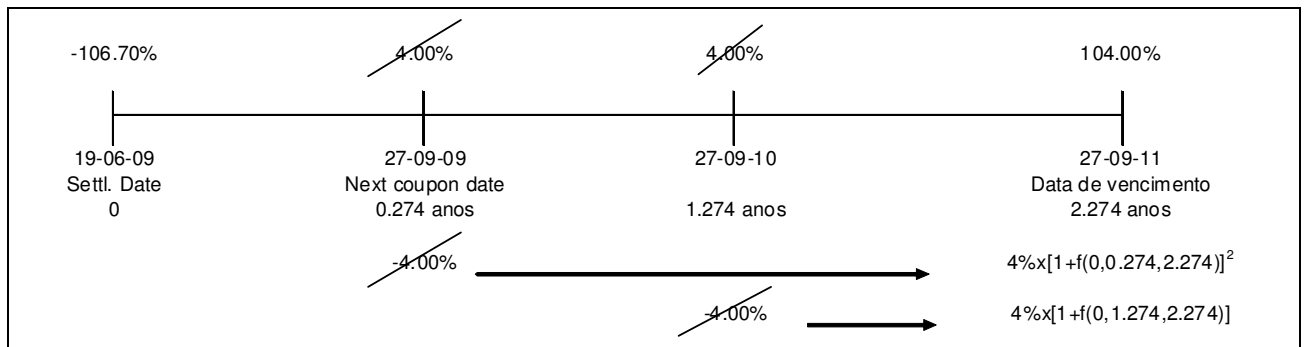
$$\lambda = -0.20\%.$$

$$\Delta\% B_0 \approx -2.1625 \times (-0.20\%) \cong 0.433\%.$$

Em suma, uma “descida” das taxas *spot* em 20 pontos base implicará uma subida do valor da obrigação igual a 0.433%.

d)

Assumir que as futuras taxas *spot* corresponderão às actuais taxas *forward* significa definir os seguintes *cash flows* para a operação:



Cálculo das taxas forward:

$$(1 + 2.274\%)^{2.274} = (1 + 1.137\%)^{0.274} \times [1 + f(0, 0.274, 2.274)]^2 \Rightarrow f(0, 0.274, 2.274) \cong 2.431\%;$$

$$(1 + 2.274\%)^{2.274} = (1 + 1.637\%)^{1.274} \times [1 + f(0, 1.274, 2.274)] \Rightarrow f(0, 1.274, 2.274) \cong 3.091\%.$$

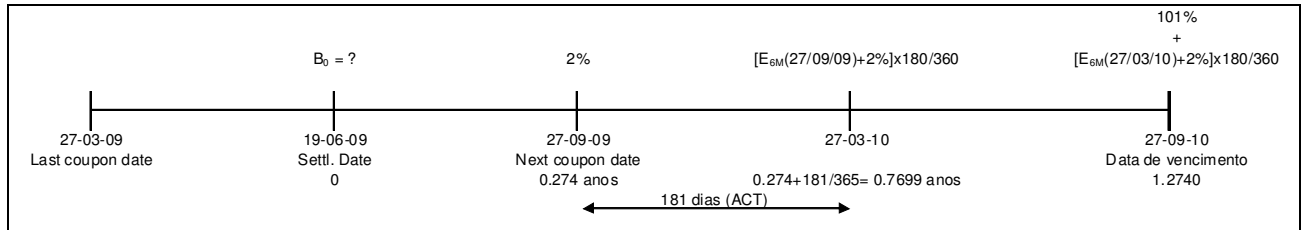
Portanto,

$$106.70\% \times (1 + TRR_{2.274})^{2.274} = 4\% \times (1 + 2.431\%)^2 + 4\% \times (1 + 3.091\%) + 104\%$$

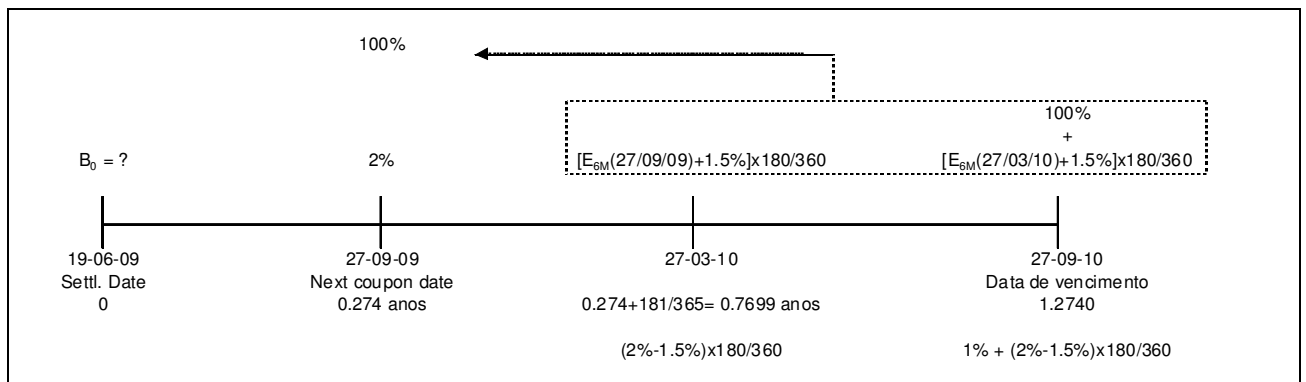
$$\Leftrightarrow TRR_{2.274} \cong 2.283\%.$$

e)

Pretende-se avaliar uma FRN com os seguintes *cash flows* futuros:



Tal é equivalente a considerar a seguinte decomposição de *cash flows* futuros:



Taxas de actualização sem risco:

$$r(0,0.274) = 1.137\%;$$

$$r(0,0.7699) \approx 1.5\% + (2\% - 1.5\%) \times \frac{0.7699 - 1}{2 - 1} \cong 1.385\%;$$

$$r(0,1.274) = 1.637\%.$$

Portanto,

$$B_0 = \frac{100\% + 2\%}{(1 + 1.137\% + 2\%)^{0.274}} + \frac{(2\% - 1.5\%) / 2}{(1 + 1.385\% + 2\%)^{0.7699}} + \frac{(2\% - 1.5\%) / 2}{(1 + 1.637\% + 2\%)^{1.274}}$$

$$\cong 102.57\%.$$

CASO 3

- a) Determine o valor esperado e o desvio padrão da taxa de rentabilidade da composição actual do fundo AVS.

$$w_a = 1.275 / (1.275 + 150 + 75) = 85\%$$

$$w_b = 150 / (1.275 + 150 + 75) = 10\%$$

$$w_c = 75 / (1.275 + 150 + 75) = 5\%$$

$$\begin{aligned} E[r_p] &= w_a \times E[r_a] + w_b \times E[r_b] + w_c \times E[r_c] = \\ &= 85\% \times 8\% + 10\% \times 12\% + 5\% \times 20\% = 9\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{w_a^2 \sigma_a^2 + w_b^2 \sigma_b^2 + w_c^2 \sigma_c^2 + 2w_a w_b \sigma_a \sigma_b \rho_{a,b} + 2w_a w_c \sigma_a \sigma_c \rho_{a,c} + 2w_b w_c \sigma_b \sigma_c \rho_{b,c}} = \\ &= \sqrt{85\%^2 \times 12\%^2 + 10\%^2 \times 20\%^2 + 5\%^2 \times 30\%^2 + 2 \times 85\% \times 10\% \times 12\% \times 20\% \times 0,6 + 2 \times 85\% \times 5\% \times 12\% \times 30\% \times 0,1 + 2 \times 10\% \times 5\% \times 20\% \times 30\% \times 0,4} = \\ &= 11,842\% \end{aligned}$$

- b) Verifique se a composição da carteira de acções do fundo AVS é eficiente, considerando as três áreas alternativas de investimento apresentadas acima.

1º Verificar se está sobre a portfolio frontier

$$\sigma_p = \sqrt{6,76 \times 9\%^2 - 1,28 \times 9\% + 0,074467} = 11,842\%$$

2º Verificar se está acima do mvp

Condição de primeira ordem:

$$\frac{d\sigma_p^2}{dE(r_p)} = 0$$

$$2 \times 6,76 E(r_p) - 1,28 = 0 \Leftrightarrow E(r_{mvp}) = 9,467\% > 9\%$$

Logo não é eficiente.

- c) Caso a actual composição da carteira não seja eficiente, identifique a taxa de rentabilidade esperada que é possível, de forma eficiente, atingir, para o actual nível de risco total da carteira.

Procura-se a carteira eficiente (sobre o troço da parábola com inclinação positiva) com $\sigma_p = 11,842\%$.

Uma vez que a parábola (*portfolio frontier*) tem um eixo de simetria sobre o seu vértice (mvp), então:

$$E[r_p] = 9.467\% + (9.467\% - 9\%) = 9.934\%.$$

Em alternativa, basta resolver a seguinte equação de forma a determinar as carteiras de fronteira com $\sigma_p = 11,842\%$:

$$(11,842\%)^2 = 6,76 \times E(r_p)^2 - 1,28 \times E(r_p) + 0,074467$$

$$\Leftrightarrow 6,76 \times E(r_p)^2 - 1,28 \times E(r_p) + 0,0604437 = 0$$

$$\Leftrightarrow E(r_p) = \frac{1,28 \pm \sqrt{(1,28)^2 - 4 \times 6,76 \times 0,0604437}}{2 \times 6,76}$$

$$\Leftrightarrow E(r_p) \cong 9\% \quad \vee \quad E(r_p) \cong 9,935\%$$

- d) Determine a taxa de rentabilidade esperada da carteira óptima de acções de um investidor com a seguinte função de utilidade: $U_p = E[r_p] - 3\sigma_p^2$.

Maximizar a Lagrangeana

$$\text{Max}_{\{E[r_p], \sigma_p, \lambda\}} L = [E(r_p) - 3\sigma_p^2] + \lambda [6,76 \times E(r_p)^2 - 1,28 \times E(r_p) + 0,074467 - \sigma_p^2]$$

Condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial L}{\partial E(r_p)} = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda [13,52 \times E(r_p) - 1,28] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_p} = 0 \Leftrightarrow -6\sigma_p + -2\lambda\sigma_p = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$$

Substituindo na primeira equação, vem

$$1 - 3[13,52 \times E(r_p) - 1,28] = 0 \Leftrightarrow E(r_p) = 11,93\%$$

- e) Sabendo que a taxa de rentabilidade esperada para o índice Euronext 100 é de 15% e o desvio padrão da rentabilidade é de 16% e que a taxa de juro sem risco é de 3%, calcule o desvio padrão do risco específico da carteira actual do fundo AVS.

$$9\% = 3\% + (15\% - 3\%) \beta \Leftrightarrow \beta = 0,5$$

$$11,842\%^2 = 0,5^2 0,16^2 + \sigma_{e_p}^2 \Leftrightarrow \sigma_{e_p}^2 = 0,00762$$

CASO 4

a)

Anos	EPS	DPS
1	2.00	1.00
2	2.25	1.20
3	2.3175	1.854

(...)

Determinação da TDD:

$$g = RoE \times (1 - TDD) \Rightarrow 3\% = 15\% \times (1 - TDD) \Rightarrow TDD = 80\%$$

$$EPS_3 = 2.25 \times (1 + 3\%) = 2.3175$$

$$DPS_3 = 2.3175 \times 80\% = 1.854$$

Determinação da R(BBB):

$$R(BBB) = R_f + Beta \times (R_m - R_f) \Rightarrow R(BBB) = 4.5\% + 1.2 \times 4.0\% \Rightarrow R(BBB) = 9.3\%$$

Valor de equilíbrio da acção:

$$P_o = \frac{1.00}{(1 + 9.3\%)^1} + \frac{1.20}{(1 + 9.3\%)^2} + \frac{1.854}{(1 + 9.3\%)^2} \Rightarrow P_o = 26.553$$

Decisão de *trading*: comprar (o valor de equilíbrio das acções é superior ao seu valor de mercado).

b)

Anos	EPS	DPS
1	2.00	1.00
2	2.25	1.20
3	2.25	2.25

(...)

Determinação da TDD: Para $g=0$ e $TDD=100\%$

Determinação da R(BBB): igual ao valor da alínea a)

$$R(BBB) = R_f + Beta \times (R_m - R_f) \Rightarrow R(BBB) = 4.5\% + 1.2 \times 4.0\% \Rightarrow R(BBB) = 9.3\%$$

Valor de equilíbrio da acção:

$$Po = \frac{1.00}{(1+9.3\%)^1} + \frac{1.20}{(1+9.3\%)^2} + \frac{\frac{2.25}{9.3\%}}{(1+9.3\%)^2} \Rightarrow Po = 22.171$$

Determinar o valor do VAOC:

$$VAOC = Poc / cresc. - Pos / cresc. = 26.553 - 22.171 = 4.382$$

Como RoE é maior R então o VAOC é maior que zero

c)

PER de Mercado com base no EPS estimado para o ano 3 =10

Poderemos calcular o preço implícito no título no ano 2 com PER=10

$$PER = \frac{P2}{EPS3} \Rightarrow 10 = \frac{P2}{2.25} \Rightarrow P2 = 22.5$$