

CASO 1 (2x1.5=3 valores)

- a) Comente a seguinte afirmação e classifique-a como sendo verdadeira ou falsa: “A Fronteira Eficiente de Markowitz associada a investimentos na zona EUR está localizada mais a noroeste que a Fronteira Eficiente de Markowitz associada a investimentos no PSI-20”.

Afirmação verdadeira.

A alteração do conjunto de possibilidades de investimento do PSI-20 para toda a zona EUR consubstancia uma estratégia de diversificação.

Ora, via diversificação é possível obter maior taxa de rentabilidade esperada para igual nível de risco, isto é obtêm-se carteiras mais a noroeste no espaço desvio-padrão rentabilidade esperada.

- b) É possível constituir uma carteira sem risco combinando apenas 2 acções?

Não, a não ser no caso teórico de as duas acções possuírem um coeficiente de correlação (entre as respectivas taxas de rentabilidade) igual a -1 ou 1.

Com efeito, consideremos duas acções “A” e “B”:

$$w_A + w_B = 1 \Rightarrow w_A = 1 - w_B.$$

$$\sigma_p^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2\sigma_{A,B} w_A w_B.$$

Pretendemos que $\sigma_p^2 = 0$. Portanto,

$$0 = (1 - w_B)^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2\sigma_{A,B} (1 - w_B) w_B$$

$$\Leftrightarrow (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{A,B}) w_B^2 + (2\sigma_{A,B} - 2\sigma_A^2) w_B + \sigma_A^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow w_B = \frac{2\sigma_A^2 - 2\sigma_{A,B} \pm \sqrt{(2\sigma_{A,B} - 2\sigma_A^2)^2 - 4(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{A,B})\sigma_A^2}}{2(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{A,B})}$$

$$\Leftrightarrow w_B = \frac{2\sigma_A^2 - 2\sigma_{A,B} \pm \sqrt{(4\sigma_{A,B}^2 - 8\sigma_{A,B}\sigma_A^2 + 4\sigma_A^4) - 4(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{A,B})\sigma_A^2}}{2(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{A,B})}$$

$$\Leftrightarrow w_B = \frac{2\sigma_A^2 - 2\sigma_{A,B} \pm \sqrt{4\sigma_{A,B}^2 - 4\sigma_B^2\sigma_A^2}}{2(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{A,B})}$$

$$\Leftrightarrow w_B = \frac{2\sigma_A^2 - 2\sigma_{A,B} \pm 2\sqrt{\rho_{A,B}^2\sigma_B^2\sigma_A^2 - \sigma_B^2\sigma_A^2}}{2(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{A,B})}$$

$$\Leftrightarrow w_B = \frac{2\sigma_A^2 - 2\sigma_{A,B} \pm 2\sigma_B\sigma_A\sqrt{\rho_{A,B}^2 - 1}}{2(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{A,B})}.$$

Ora, para que $\sqrt{\rho_{A,B}^2 - 1}$ seja um real, é necessário que $\rho_{A,B}^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \rho_{A,B}^2 \geq 1$. Mas como $\rho_{A,B}$ só pode assumir valores entre -1 e 1, a única solução possível é ter $\rho_{A,B}^2 = 1$.

c) Enuncie duas limitações do *Price Earnings Ratio* enquanto critério de avaliação de acções.

Limitações do $PER_0 = \frac{VC_0}{EPS_1}$:

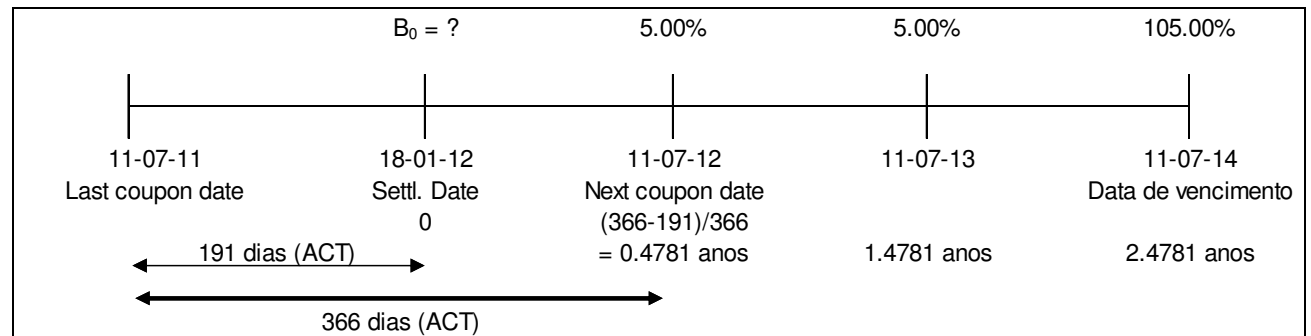
- i) Assume que todos os resultados líquidos por acção futuros serão iguais aos estimados para o próximo exercício;
- ii) Ignora a diferença entre resultados e dividendos;
- iii) Ignora os efeitos de actualização.

CASO 2 (7 valores)

a)

Settlement date = 13/01/12 + 5 dias = 18/01/12.

Pretende-se avaliar uma obrigação do Tesouro com os seguintes *cash flows* vinctendos:



Portanto,

$$B_0 = \frac{5\%}{[1+r(0,0.4781)]^{0.4781}} + \frac{5\%}{[1+r(0,1.4781)]^{1.4781}} + \frac{105\%}{[1+r(0,2.4781)]^{2.4781}}$$

As taxas *spot* a 1.4781 e 2.4781 anos podem ser obtidas via interpolação linear:

$$r(0,1.4781) \approx 1\% + (1.5\% - 1\%) \times \frac{1.4781 - 1}{2 - 1} \cong 1.239\%;$$

$$r(0,2.4781) \approx 1.5\% + (2\% - 1.5\%) \times \frac{2.4781 - 2}{3 - 2} \cong 1.739\%.$$

A taxa *spot* a 0.4781 anos pode ser obtida via extrapolação linear:

$$r(0,0.4781) \approx 1\% + (1.5\% - 1\%) \times \frac{0.4781 - 1}{2 - 1} \cong 0.739\%.$$

Então:

$$B_0 = \frac{5\%}{[1 + 0.739\%]^{0.4781}} + \frac{5\%}{[1 + 1.239\%]^{1.4781}} + \frac{105\%}{[1 + 1.739\%]^{2.4781}} \cong 110.50\%.$$

b)

$$AI = 5\% \times \frac{191}{366} = 2.61\%.$$

Decisão:

$$VT_0^{bid} = 107.80\% + 2.61\% = 110.41\% < B_0 \Rightarrow \text{Não vender};$$

$$VT_0^{ask} = 107.85\% + 2.61\% = 110.46\% < B_0 \Rightarrow \text{Comprar}.$$

c)

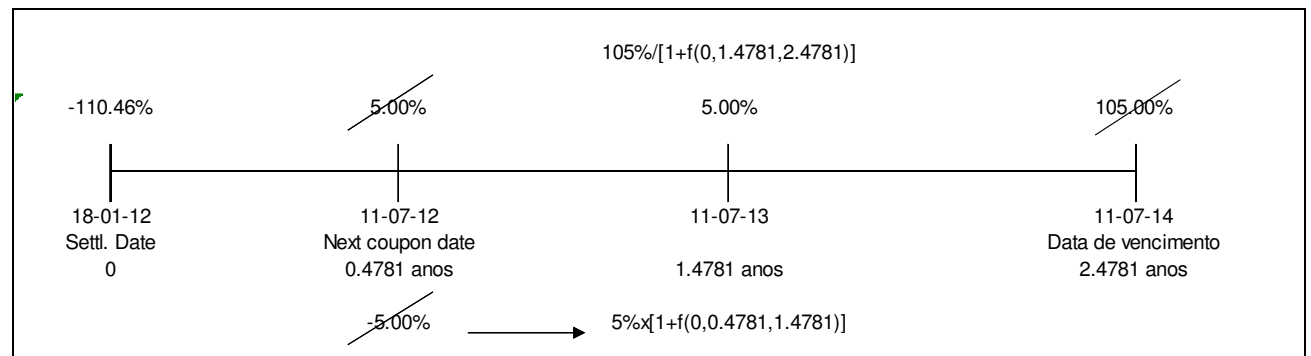
$$CFW = \frac{1}{110.50\%} \times \left\{ 0.4781 \times 1.4781 \times \frac{5\%}{[1 + 0.739\%]^{0.4781}} \right.$$

$$+ 1.4781 \times 2.4781 \times \frac{5\%}{[1 + 1.239\%]^{1.4781}} + 2.4781 \times 3.4781 \times \frac{105\%}{[1 + 1.739\%]^{2.4781}} \left. \right\}$$

$$\cong 8.0423.$$

d)

Assumir que as futuras taxas *spot* corresponderão às actuais taxas *forward* significa definir os seguintes *cash flows* para a operação:



Cálculo das taxas forward:

$$(1 + 1.239\%)^{1.4781} = (1 + 0.739\%)^{0.4781} \times [1 + f(0, 0.4781, 1.4781)] \Rightarrow f(0, 0.4781, 1.4781) \cong 1.479\%;$$

$$(1 + 1.739\%)^{2.4781} = (1 + 1.239\%)^{1.4781} \times [1 + f(0, 1.4781, 2.4781)] \Rightarrow f(0, 1.4781, 2.4781) \cong 2.483\%.$$

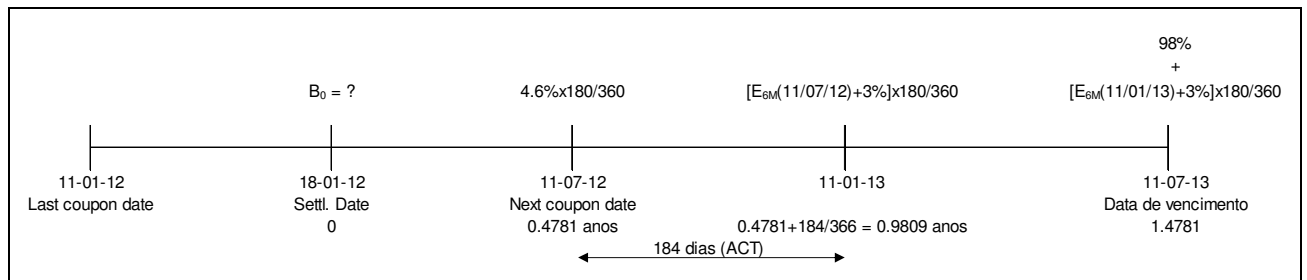
Portanto,

$$110.46\% \times (1 + TRR)^{1.4781} = 5\% \times (1 + 1.479\%) + 5\% + \frac{105\%}{1 + 2.483\%}$$

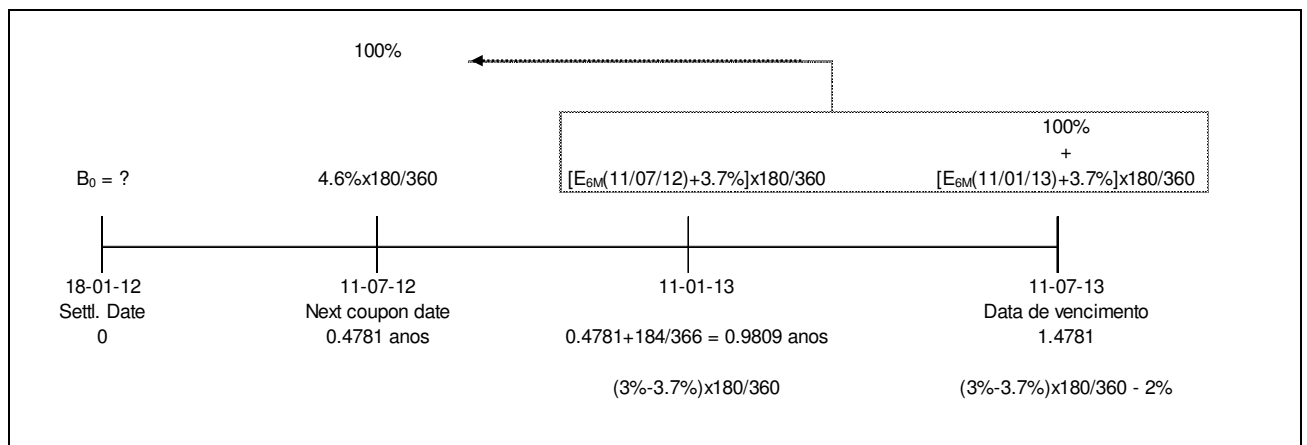
$$\Leftrightarrow TRR \cong 1.264\%.$$

e)

Pretende-se avaliar uma FRN com os seguintes *cash flows* futuros:



Tal é equivalente a considerar a seguinte decomposição de *cash flows* futuros:



Taxas de actualização sem risco:

$$r(0, 0.4781) \cong 0.739\%;$$

$$r(0, 0.9809) \approx 1\% + (1.5\% - 1\%) \times \frac{0.9809 - 1}{2 - 1} \cong 0.99\%;$$

$$r(0, 1.4781) \cong 1.239\%;$$

Portanto,

$$B_0 = \frac{100\% + 2.3\%}{(1 + 0.739\% + 4\%)^{0.4781}} + \frac{(3\% - 3.7\%) / 2}{(1 + 0.99\% + 4\%)^{0.9809}} + \frac{(3\% - 3.7\%) / 2 - 2\%}{(1 + 1.239\% + 4\%)^{1.4781}}$$

$$\cong 97.56\%.$$

CASO 3

a)

Atendendo à actual composição da carteira,

$$E(r_p) = 5\% \times 0.3 + 15\% \times 0.2 + 10\% \times 0.4 + 1\% \times 0.1 \cong 8.6\%;$$

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= (0.3 \times 0.04)^2 + (0.2 \times 0.35)^2 + (0.4 \times 0.2)^2 \\ &+ 2 \times 0.3 \times 0.2 \times 0.04 \times 0.35 \times (-0.4) + 2 \times 0.3 \times 0.4 \times 0.04 \times 0.20 \times 0.3 \\ &+ 2 \times 0.2 \times 0.4 \times 0.35 \times 0.20 \times 0.1\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_p^2 = 0.012468 \Rightarrow \sigma_p \cong 11.166\%.$$

b)

Condição de 1ª ordem:

$$\frac{d\sigma_p^2}{dE(r_p)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d[8.2275 E(r_p)^2 - 0.8832 E(r_p) + 0.02486]}{dE(r_p)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 8.2275 E(r_p) - 0.8832 = 0$$

$$\Leftrightarrow E(r_{mvp}) = \frac{0.8832}{2 \times 8.2275} \cong 5.367\%$$

c)

Sabemos que $\sigma_T = 3.529\%$.

Visto que a carteira de tangencia também pertence à portfolio frontier, então:

$$(3.529\%)^2 = 8.2275 E(r_T)^2 - 0.8832 E(r_T) + 0.02486$$

$$\Leftrightarrow 8.2275 E(r_T)^2 - 0.8832 E(r_T) + 0.023616476 = 0$$

$$\Leftrightarrow E(r_T) = \frac{0.8832 \pm \sqrt{(-0.8832)^2 - 4 \times 8.2275 \times 0.023616476}}{2 \times 8.2275}$$

$$\Leftrightarrow E(r_T) = 5.690\% \vee E(r_T) = 5.045\%$$

Visto que a taxa de rentabilidade da carteira de tangência tem de ser superior à taxa de rentabilidade do MVP (5.367%), então $E(r_T) = 5.690\%$.

Dado ser possível investir no activo sem risco (componente “liquidez”), então a actual composição é eficiente sse satisfizer a equação da Fronteira eficiente Global:

$$E(r_p) = 1\% + \frac{5.69\% - 1\%}{3.529\%} \sigma_p.$$

Atendendo aos resultados da alínea a),

$$8.6\% = 1\% + \frac{5.69\% - 1\%}{3.529\%} \times 11.166\%$$

$$\Leftrightarrow 8.6\% = 15.839\%$$

Obtém-se, portanto, uma proposição falsa. Tal significa que a actual composição não é eficiente.

Com efeito, é possível definir uma combinação entre a carteira de tangencia e a componente de “liquidez” que possua o mesmo nível de risco que a actual composição (11.166%) mas que gere uma taxa de rentabilidade mais alta (15.839% > 8.6%).

d)

A solução consiste em determinar a combinação entre a carteira de tangencia e a componente de “liquidez” que possua o mesmo nível de risco que a actual composição (11.166%).

Visto que $\sigma_p = w_T \sigma_T$, então

$$11.166\% = w_T \times 3.529\% \Leftrightarrow w_T = \frac{11.166\%}{3.529\%} \cong 316.38\%.$$

Consequentemente,

$$w_f = 1 - w_T = 1 - 316.38\% = -216.38\%.$$

Em suma, é necessário:

- a) Obter um financiamento à taxa de 1% e no valor de 216.38% da riqueza inicial;
- b) Investir 316.38% x 93.562% = 296.015% da riqueza inicial em Obrigações;
- c) Investir 316.38% x 7.365% = 23.302% da riqueza inicial em Acções;
- d) Desinvestir 316.38% x 0.927% = 2.934% da riqueza inicial em Imobiliário.

e)

$$\underset{E(r_p), \sigma_p}{MAX} U_p = E(r_p) - 2\sigma_p^2$$

$$\text{Sujeito a } E(r_p) = 1\% + \frac{5.69\% - 1\%}{3.529\%} \sigma_p.$$

Lagrangiana:

$$\underset{E(r_p), \sigma_p, \lambda}{MAX} L = E(r_p) - 2\sigma_p^2 + \lambda[E(r_p) - 0.01 - 1.3289\sigma_p]$$

Condições de 1ª ordem:

$$\frac{\partial L}{\partial E(r_p)} = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_p} = 0 \Leftrightarrow -4\sigma_p - 1.3289\lambda = 0 \xRightarrow{\lambda=-1} \sigma_p = \frac{1.3289}{4} \cong 33.22\%.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow E(r_p) - 0.01 - 1.3289\sigma_p = 0 \xRightarrow{\sigma_p=33.22\%} E(r_p) = 0.01 + 1.3289 \times 33.22\% \cong 45.15\%.$$

A carteira ótima deverá ser uma combinação entre o activo sem risco e a carteira de tangencia:

$$\begin{cases} w_f \times 1\% + w_T \times 5.69\% = 45.15\% \\ w_f + w_T = 100\% \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_T = 941.37\% \\ w_f = -841.37\% \end{cases}$$

Portanto, a percentagem ótima a investir em ações pelo Fundo de Investimento MPN é igual a 941.37% x 7.365% = 69.33%.

f)

O parâmetro beta de uma carteira é igual à média ponderada dos betas dos activos componentes:

$$\beta_p = 0 \times 0.3 + 1.3 \times 0.2 + 0.4 \times 0.4 + 0 \times 0.1 = 0.42.$$

Consequentemente,

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_p}^2$$

$$\Rightarrow (11.166\%)^2 = (0.42 \times 0.2)^2 + \sigma_{\varepsilon_p}^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{\varepsilon_p} = \sqrt{(11.166\%)^2 - (0.42 \times 0.2)^2} \cong 7.357\% \neq 0.$$

Carteira com risco específico i.e. não completamente diversificada. Consequentemente, é possível diversificar mais a carteira.

CASO 4 (4 valores)

a)

Taxas de actualização:

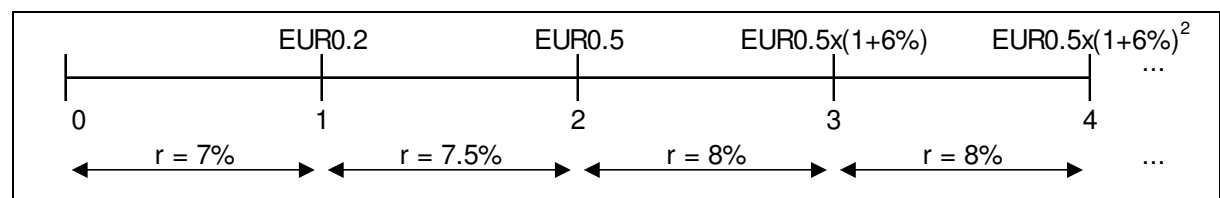
$$E(r_{GN}) = r_f + \beta_{GN} [E(r_m) - r_f]$$

k	0	1	2 e seguintes
$r_f(0, k, k+1)$	1%	1.5%	2%
$E(r_m) - r_f$	5%	5%	5%
$E(r_{MPN})(0, k, k+1)$	7%	7.5%	8%

Taxa de crescimento constante dos dividendos a partir do ano 2:

$$g = ROE \times (1 - TDD) = 10\% \times (1 - 0.4) = 6\%$$

Em suma, pretende-se avaliar uma acção associada ao seguinte diagrama temporal de dividendos futuros:



Portanto,

$$P_0 = \frac{0.2}{(1+7\%)} + \frac{0.5}{(1+7\%)(1+7.5\%)} + \frac{\frac{0.5 \times (1+6\%)}{8\% - 6\%}}{(1+7\%)(1+7.5\%)}$$

$$\cong EUR23.66$$

b)

$$VC_{bid} = EUR23.70 > P_0 = EUR23.66 \Rightarrow \text{Vender.}$$

$$VC_{ask} = EUR23.80 > P_0 = EUR23.66 \Rightarrow \text{Não comprar.}$$

c)

Sendo TDD=100% a partir do ano 2, então temos que $g=0\%$ e $DPS=EPS$ a partir do ano 2. Consequentemente,

$$VCZ = \frac{0.2}{(1+7\%)} + \frac{0.5}{(1+7\%)(1+7.5\%)} + \frac{\frac{0.5 \times (1+6\%)}{8\% - 0\%} / 40\%}{(1+7\%)(1+7.5\%)}$$

$$\cong EUR15.02$$

d)

$$VAOC = P_0 - VCZ = 23.66 - 15.02 = EUR8.64 > 0$$

O VAOC é positivo uma vez que o ROE (10%) é superior à remuneração exigida pelos accioistas (8%).