

Nota: Não são prestados esclarecimentos durante a prova! Só é permitida a consulta do formulário, das tabelas estatísticas e o uso da calculadora.

NOME: _____

Nº Aluno(a): _____

QUESTÃO 1
(4,5 valores)

Considere uma população X cuja distribuição de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{(1-\theta)^x}{\theta^{x-1}} \quad x=0, 1 \quad 0 < \theta < 1$$

- a) Deduza a distribuição conjunta de uma amostra aleatória de tamanho $n=10$ retirada daquela população e explique o seu significado.
- b) Suponha que retirou a seguinte amostra concreta daquela população: $x_{(10)}^* = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$.
Se $\theta = 0,1$, qual a probabilidade de obter aquela amostra?
- c) A população X tem valor esperado $(1 - \theta)$ e variância $\theta (1 - \theta)$.
Mostre que o estimador $\hat{\theta} = 1 - \bar{X}$ é estimador consistente em média quadrática para θ .

NOME: _____

Nº Aluno(a): _____

QUESTÃO 1

NOME: _____

Nº Aluno(a): _____

QUESTÃO 2
(6,5 valores)

Considere duas populações normais X_1 e X_2 com médias $\mu_1=90$ e $\mu_2=100$ e variâncias desconhecidas das quais foram retiradas 2 amostras aleatórias independentes, uma de cada população com 36 e 25 elementos, respetivamente, tendo-se obtido os seguintes resultados amostrais:

Amostra retirada da população X_1 : $\frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 = 1080$

Amostra retirada da população X_2 : $\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 = 1200$

- Indique as melhores estimativas para as variâncias das duas populações X_1 e X_2 justificando convenientemente as suas respostas com base nas propriedades dos estimadores que escolheu.
- Construa um intervalo de confiança a 90% para a variância da população X_2 .
- Calcule a probabilidade da média da segunda amostra exceder a média da primeira amostra em mais de 19 unidades admitindo agora que $\sigma_1^2=1080$ e $\sigma_2^2=1275$.

NOME: _____

Nº Aluno(a): _____

QUESTÃO 3
(6 valores)

Uma empresa que comercializa produtos de grande consumo pretende estimar a proporção de potenciais clientes interessados em consumir um novo gel de banho que está a preparar para lançar no mercado. Como se trata de um produto suscetível de ser consumido pela generalidade das pessoas, admite-se que a população alvo seja relativamente elevada.

- a) Defina adequadamente a população em estudo e o parâmetro a estimar.
- b) Indique, justificando, qual a dimensão da amostra que sugere, admitindo que a empresa pretende uma estimativa que não se afaste da verdadeira proporção da população por mais de 2%, com um nível de confiança de 95%.
- c) Suponha agora que, com base na dimensão da amostra que determinou na alínea b) tinha obtido 1441 indivíduos que declararam vir a consumir regularmente aquele gel de banho. Construa um intervalo de confiança a 99% para a verdadeira proporção de consumidores daquele produto e interprete o resultado obtido. Caso não tenha resolvido a alínea b) considere $n=2400$.
- d) Comente a margem de erro associada ao intervalo que encontrou na alínea c) face às condições explicitadas na alínea b).

NOME: _____

Nº Aluno(a): _____

QUESTÃO 3

NOME: _____

Nº Aluno(a): _____

QUESTÃO 4
(3 valores)

Para cada uma das questões seguintes existe apenas uma resposta correta. Assim, assinale essa resposta com uma cruz.

- 1) Para uma população $\{1,1,2\}$, definiram-se amostras aleatórias (X_1, X_2) recolhidas com reposição. Nesse caso, a estatística $T = (X_1 - X_2)^2$ tem distribuição:
- ☐ a) Qui-quadrado; ☐ c) Bernoulli;
- ☐ b) Normal; ☐ d) Nenhuma das anteriores.
- 2) Uma distribuição amostral é a distribuição de probabilidade de:
- ☐ a) uma amostra;
- ☐ b) uma estatística;
- ☐ c) uma população;
- ☐ d) um parâmetro da população.
- 3) O facto de a média amostral não sobreestimar ou subestimar a média da população torna a média amostral um estimador:
- ☐ a) Consistente; ☐ c) Eficiente;
- ☐ b) Não enviesado; ☐ d) Nenhuma das respostas anteriores.
- 4) Para a amostra aleatória $(X_1, X_2, \dots, X_n), n > 1$, proveniente de uma população Bernoulli com probabilidade de sucesso p , definiu-se o estimador: $\hat{p} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \alpha \cdot X_n$, em que α é uma constante função da dimensão da amostra. O estimador $\hat{p}$ é um estimador não enviesado assintoticamente para p , quando:
- ☐ a) $\alpha = 1$ ☐ c) $\alpha = 0$
- ☐ b) α é um infinitésimo; ☐ d) As opções b) e c) estão corretas.
- 5) Qual das seguintes afirmações exprime melhor a relação entre um parâmetro e uma estatística:
- ☐ a) Um parâmetro tem uma distribuição amostral cujo valor esperado é uma estatística;
- ☐ b) Uma estatística pode ser utilizada para fazer inferência sobre um parâmetro;
- ☐ c) Um parâmetro é utilizado para estimar uma estatística;
- ☐ d) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.
- 6) Para reduzir a amplitude de um intervalo de confiança deve:
- ☐ a) Aumentar a dimensão da amostra (mantendo os restantes fatores constantes);
- ☐ b) Reduzir o nível de confiança (mantendo os restantes fatores constantes);
- ☐ c) Ambas a) e b) estão corretas;
- ☐ d) Nem a) nem b) estão corretas.

