

ISCTE-IUL – Instituto Universitário de Lisboa
Licenciatura em Gestão – 1º Teste de Estatística II

19 de Março de 2011

Duração: 1h +30m

Nota: Não são prestados esclarecimentos durante a prova! Só é permitida a consulta do formulário, das tabelas estatísticas e o uso da calculadora.

NOME: _____

Nº Aluno(a): _____

QUESTÃO 1
(7 valores)

1. Considere uma amostra aleatória de dimensão 5 retirada de uma população Bernoulli de parâmetro p e a seguinte estatística:

$$T_1 = \sum_{i=1}^5 X_i$$

- a) Quantas amostras diferentes se podem obter a partir desta população? Justifique
- b) Deduza a distribuição amostral de T_1 indicando os respectivos parâmetros.
- c) Assumindo que $p=0,3$, qual a probabilidade de T_1 ser igual a 3?
- d) Qual a estimativa que sugeriria para a proporção de sucessos na população se a estatística T_1 assumir o valor 3? Justifique.

Soluções:

a) 32;

b) $T_1 \sim b(n=5; p)$; $f(t_1) = \binom{5}{p} p^{t_1} (1-p)^{1-t_1}$ com $t_1 = 0,1,2,3,4,5$;

$$E[T_1] = 5p \text{ e } VAR[T_1] = 5p(1-p)$$

c) 0,1323;

d) $\hat{p}^* = 0,6$.

NOME: _____

Nº Aluno(a): _____

QUESTÃO 1

2. Considere agora que se recolheram duas amostras de duas populações Bernoulli (A e B) com parâmetros p_A e p_B , de dimensões 35 e 31, respectivamente.

Considere as seguintes estatísticas:

$$T_2 = \frac{(\bar{X}_A + \bar{X}_B)}{2}$$

$$T_3 = 3 \times \sum_{j=1}^{31} X_{Bj}$$

- e) Deduza a distribuição aproximada (assimptótica) de T_2 indicando os respectivos parâmetros.
- f) Deduza a distribuição amostral de T_3 indicando também os respectivos parâmetros.

Soluções:

$$e) T_2 \overset{0}{\cap} n \left(\mu = \frac{35p_A + 30p_B}{2}; \sigma = \sqrt{\frac{35p_A(1-p_A) + 30p_B(1-p_B)}{4}} \right);$$

$$f) \frac{T_3}{3} \overset{0}{\cap} b(n = 30; p) \text{ com } \frac{t_3}{3} = 0, 1, 2, 3, \dots, 30.$$

NOME: _____

Nº Aluno(a): _____

QUESTÃO 2
(5,5 valores)

A partir de uma amostra aleatória $(X_1, \dots, X_m, \dots, X_n)$, com $m < n$, retirada de uma população normal com média μ e variância σ^2 , foram propostos dois estimadores para a média e um estimador para a variância daquela população:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \quad \tilde{\mu} = \frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^n X_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

- Verifique se $\hat{\mu}$ e $\tilde{\mu}$ são estimadores não enviesados para μ . Justifique.
- Determine o valor de m a partir do qual o estimador $\hat{\mu}$ é mais eficiente que $\tilde{\mu}$.
- Verifique se $\hat{\sigma}^2$ é um estimador consistente em média quadrática para a variância populacional. Justifique adequadamente a sua resposta.

Soluções:

- $\hat{\mu}$ e $\tilde{\mu}$ são estimadores não enviesados para μ ;
- $m > \frac{n}{2}$;
- $\hat{\sigma}^2$ é um estimador consistente em média quadrática para σ^2 .

NOME: _____

Nº Aluno(a): _____

QUESTÃO 2

NOME: _____

Nº Aluno(a): _____

QUESTÃO 3
(7,5 valores)

A quantidade de vinho por garrafa, medida em centilitros, é uma variável aleatória com distribuição normal cuja verdadeira média e variância se desconhecem. Recolheu-se uma amostra aleatória de 25 garrafas que forneceu o valor 0,0625 centilitros² como estimativa para a variância amostral corrigida.

a) Estime o desvio-padrão desta população através de um intervalo de confiança a 90%.

No passado recente têm surgido diversas queixas de consumidores que reclamam não ser correcta a informação contida nos rótulos das garrafas que indicam que cada garrafa contém 75 centilitros do precioso néctar. Tal afirmação é desmentida pelo responsável pelo controlo de qualidade da empresa que, com base numa amostra de 25 garrafas, avançou com o seguinte intervalo de confiança:

$$[I_{\lambda}]_{\mu} =] 74,8968; 75,1032 [$$

- b) Que valor proporia como estimativa para a quantidade média de vinho por garrafa? Justifique adequadamente a sua resposta.
- c) Qual a margem de erro associada ao intervalo de confiança obtido pelo responsável do controlo de qualidade?
- d) Determine o nível de confiança $\lambda=1-\alpha$ utilizado pelo responsável pelo controlo de qualidade na construção daquele intervalo.
- e) Comente a veracidade da seguinte afirmação da associação dos direitos dos consumidores ao serem confrontados com o intervalo de confiança apresentado: “É nossa convicção que só metade das garrafas comercializadas respeita o limite inferior e superior daquele intervalo”.

Soluções:

- a) $]IC_{0,90}[\sigma^* =]0,2030 ; 0,3297[;$
- b) $\bar{x} = 75cl;$
- c) 0,1032;
- d) $\lambda = 0,95;$
- e) Falsa.

NOME: _____

Nº Aluno(a): _____

QUESTÃO 3