

Exercícios sobre Distribuições amostrais

1. Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson da qual se retirou uma amostra aleatória de dimensão igual a 3.
 - a) Suponha que λ é 0,7. Calcule a probabilidade de se obter a amostra (2,0,1).
 - b) Supondo que $\lambda = 0,7$, qual a probabilidade da média amostral exceder 1 numa amostra de dimensão 3.

2. Num estudo realizado num bairro social da cidade de Lisboa inquiriu-se aleatoriamente um determinado número de arrendatários. Uma das questões colocadas prendia-se com a disponibilidade demonstrada pelos locatários em adquirir a residência onde habitam se aquela fosse vendida por um preço razoável. O número de arrendatários interessados em adquirir casa própria é uma variável aleatória com distribuição Bernoulli cuja média está estimada em 0,3.
 - a) O responsável pela análise dos dados julga ter cometido um lapso: na observação 34, de uma determinada amostra aleatória, ele pensa que registou a observação 35 e na observação 35 registou a 34. Assim, existem duas possibilidades para a amostra em concreto - a que ele tem de facto registada ou a que ele pensa ser a correcta. Para se decidir, calculou a probabilidade da ocorrência de cada uma delas e tomou como verdadeira a mais provável. Comente, detalhadamente, a decisão tomada pelo responsável.
 - b) Calcule a probabilidade de, numa amostra de dimensão 100, a proporção de interessados ser de 0,42.

3. Seja (X_1, X_2) uma amostra aleatória retirada de uma população com distribuição normal padrão. Deduza a distribuição das seguintes estatísticas:

a) $\frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{(X_1 + X_2)^2}{(X_2 - X_1)^2}$



4. A proporção de habitantes do bairro de Alvalade interessados em frequentar o ginásio VIVAGym é desconhecida. Com o objectivo de estimar esse parâmetro recolheu-se uma amostra aleatória de n habitantes desse bairro. É proposto o seguinte estimador T para o parâmetro em estudo:

$$T_1 = \frac{\sum_{i=2}^{n-3} X_i}{n-4}$$

- a₁)** Deduza a sua distribuição amostral para $n=10$.
a₂) E para $n=100$.

5. Considere uma população normal com média μ e variância 15. Para uma amostra amostra de dimensão $n = 10$, calcule $P\left[(\bar{X} - \mu)^2 \leq 7.53\right]$.

Solução: 0.975

6. Seja X uma população binária definida pela função de probabilidade $f(x) = \theta^{x-1} (1 - \theta)^{2-x}$ com $x = 1, 2$. Para $n=3$, a probabilidade de obter a amostra $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 2)$ é:
- ☐ a) $\theta^2(1 - \theta)$;
 - ☐ b) $\theta^3(1 - \theta)$;
 - ☐ c) $\theta(1 - \theta)^3$;
 - ☐ d) Nenhuma das anteriores.

Solução: a)

7. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_9$ variáveis aleatórias com distribuição binomial em que $X_i \cap b(n_i = i; p = 0.5)$ para $i=1, \dots, 9$, e as variáveis $Y_j \cap N(2;1)$ para $j=1, 2$. Estas variáveis são todas independentes.

- a) Deduza a distribuição amostral de $T = \sum_{i=1}^5 X_i$.
- b) Calcule o valor esperado e a variância de T .
- c) Deduza a distribuição amostral de $R = \sum_{i=1}^9 X_i - \sum_{j=1}^2 Y_j$.

Soluções: a) $T \cap b(n=15; p=0.5)$ b) $E[T] = 7.5; Var[T] = 3.75$ c) $R \cap n(\mu=18.5; \sigma=\sqrt{2+11.25})$

8. Seja X uma população normal com variância $\sigma^2 = 20$. Se recolher uma amostra de 25 elementos, a probabilidade de a variância amostral exceder 29,12 é de:

- ☐ a) 0,025;
- ☐ b) 0,05;
- ☐ c) 0,95;
- ☐ d) Nenhuma das anteriores.

Solução: b)

9. Seja (X_1, X_2) uma amostra aleatória retirada de uma população com distribuição normal padrão. A distribuição amostral da estatística $T = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$ é a seguinte:

- ☐ a) $T \sim N(\mu = 0; \sigma = \sqrt{2})$;
- ☐ b) $T \sim N(\mu = 0; \sigma = 1)$;
- ☐ c) $T \sim N(\mu = 0; \sigma = 2)$;
- ☐ d) Nenhuma das anteriores.

Solução: b)

10. Seja X uma população definida pela função de probabilidade $f(x) = \theta^{x-1} (1 - \theta)^{2-x}$ em que $x = 1, 2$. Sabe-se ainda que $E[X] = 1 + \theta$ e $VAR[X] = \theta(1 - \theta)$.

Para $n > 30$, a distribuição aproximada de $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ é a seguinte:

- ☐ a) $\bar{X} \sim N\left(\mu = 1 + \theta; \sigma = \sqrt{\frac{\theta}{n}}\right)$;
- ☐ b) $\bar{X} \sim N\left(\mu = \theta; \sigma = \sqrt{\frac{1-\theta}{n}}\right)$;
- ☐ c) $\bar{X} \sim N\left(\mu = 1 + \theta; \sigma = \sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}\right)$;
- ☐ d) Nenhuma das anteriores.

Solução: c)

11. Seja X uma população com distribuição normal de média $\mu = 200$ e desvio-padrão $\sigma = 6,25$. Qual a dimensão da amostra a recolher se pretender que a probabilidade de a média amostral se situar entre 199 e 201 seja de 0,99.

- ☐ a) $n = 260$;
- ☐ b) $n = 212$;
- ☐ c) $n = 256$;
- ☐ d) Nenhuma das anteriores.

Solução: a)

12. A distribuição conjunta de uma amostra aleatória de dimensão $n=5$ retirada de uma população com função de probabilidade: $f(x) = p(1-p)^{x-1}$, $0 < p < 1$, $x = 1, 2, 3, \dots$ é a seguinte:

- ☐ a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = p^5 \cdot (1-p)^{5x-1}$
- ☐ b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = p^5 \cdot (1-p)^4$
- ☐ c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 5p \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^5 x_i - 5}$
- ☐ d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = p^5 \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^5 x_i - 5}$

Solução: d)

13. Seja $X_i \sim p(\lambda)$. Quando $n \rightarrow \infty$ então:

- ☐ a) $\sum_{i=1}^n X_i \dot{\sim} n(n\lambda; \sqrt{n\lambda})$;
- ☐ b) $\sum_{i=1}^n X_i^2 \dot{\sim} n(0; 1)$;
- ☐ c) $\frac{\bar{X} - n\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \dot{\sim} n(0; 1)$;

- ☐ d) As respostas a) e b) estão ambas corretas.

Solução: a)

14. Considere uma população normal com variância $\sigma^2=20$. Se recolher uma amostra de 25 elementos dessa população, a probabilidade do quadrado da diferença entre a média amostral e a média da população exceder 2,168 é de:

- ☐ a) 0,05;
- ☐ b) 0,95;
- ☐ c) 0,90;
- ☐ d) Nenhuma das anteriores.

Solução: d)

15. Considere uma amostra de dimensão 3 retirada de uma população X cuja função de densidade de probabilidade é dada por: $f(x) = \theta \cdot x^{(\theta-1)}$ com $0 < x < 1$, $\theta > 0$.

A probabilidade de obter a amostra $(x_1, x_2, x_3) = (0,3, 0,4, 0,8)$ é:

- ☐ a) $\theta^3 \cdot (0,096)^{\theta-1}$;
- ☐ b) $3\theta \cdot (0,096)^\theta$;
- ☐ c) $\theta^3 \cdot (0,00096)^{\theta-1}$;
- ☐ d) Nenhuma das anteriores.

Solução: a)

16. Considere (X_1, X_2, X_3) uma amostra aleatória retirada de uma população com distribuição de Bernoulli com função de probabilidade $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$. Para $p = 0,1$, o valor mais provável da

estatística $T = \frac{\sum_{i=1}^3 X_i}{3}$ ocorre quando:

- ☐ a) $t = 1$;
- ☐ b) $t = 0$;
- ☐ c) $t = 2/3$
- ☐ d) Nenhuma das anteriores.

Solução: b)

17. Seja X uma população com distribuição normal padrão. Quando $n \rightarrow \infty$, a distribuição amostral assintótica da estatística $T = \sum_{i=1}^n X_i^2$ é a seguinte:

- ☐ a) $\sum_{i=1}^n X_i^2 \hat{\sim} n (\mu = 0; \sigma = \sqrt{n})$;
- ☐ b) $\sum_{i=1}^n X_i^2 \hat{\sim} n (\mu = n; \sigma = \sqrt{2n})$;
- ☐ c) $\sum_{i=1}^n X_i^2 \hat{\sim} n (\mu = n; \sigma = \sqrt{n})$;
- ☐ d) $\sum_{i=1}^n X_i^2 \hat{\sim} n (\mu = 0; \sigma = \sqrt{2n})$.

Solução: b)

18. Uma amostra de 100 jovens com idades entre 18 e 25 anos foi entrevistada para estimar a sua participação em atividades políticas.

a) Explique o significado da seguinte estatística:

$$T = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

b) Foram propostos os seguintes estimadores para estimar o parâmetro desta população:

$$T_1 = \frac{X_1 + X_{100}}{2} \quad T_2 = \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100}$$

b₁) Deduza a distribuição amostral de T_1 e os seus parâmetros.

b₂) Explique o significado e deduza a distribuição amostral de T_2 e os seus parâmetros.

Soluções:

a) Número de jovens com idades entre 18 e 25 anos, em 100, que participam em atividades políticas

b₁) $E[T_1] = p$; $VAR[T_1] = [p(1-p)] / 2$

t_1	0	1/2	1
$f(t_1)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

b₂) Proporção de jovens com idades entre 18 e 25 anos, numa amostra de 100, que participam em atividades políticas

$$T_2 \overset{0}{\cap} n \left(\mu = p; \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}} \right)$$

19. Considere a seguinte estatística T definida a partir de uma amostra aleatória de dimensão 9:

$$T = \frac{5X_1 + 5X_{10}}{10}. \text{ Qua a distribuição e parâmetros de } T, \text{ se assumir que a amostra foi recolhida de}$$

uma população normal com média μ e desvio padrão σ ?

Solução: T tem distribuição normal com $E[T] = \mu; Var[T] = \sigma^2 / 2$

20. Deduza a distribuição conjunta de uma amostra aleatória com dimensão $n=5$ retirada de uma população com distribuição exponencial:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0, \lambda > 0$$

Solução: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \lambda^5 e^{-\lambda \sum_{i=1}^5 x_i}$