Estatística I

Variáveis aleatórias

Variáveis aleatórias (1)

- Uma **variável aleatória**, designada por X(.) ou X, é uma função

$$X(.) : \Omega \rightarrow \Re$$
$$\mathrm{w_i} \rightarrow X(\mathrm{w_i})$$

- **Nota**: Variável (símbolo que representa uma determinada característica) é diferente de variável aleatória (é uma função)
- **Exemplo1**: $\Omega=\{0,1,2,3,\ldots\}$
- Seja X – o número de chamadas telefónicas atendidas num posto de enfermagem, durante um período de 8 h. Então $X(\Omega)=\{x_i: x_i=0,1,2,3,\ldots\}$

- **Exemplo2**: $\Omega=\{t: t\geq 0\}$
- Seja X – o tempo que medeia entre duas chamadas telefónicas para um posto de enfermagem, durante um período de 8 h. Então $X(\Omega)=\{x_i: x_i\geq 0\}$

Variáveis aleatórias (2)

- Dado que a cada acontecimento, A, foi associado um número real (uma variável aleatória), X, a probabilidade de um dado acontecimento pode ser expressa pela probabilidade da variável aleatória assumir um dado valor, ou seja,

$$P[X = x] = P[A] \text{ em que } A = \{w \in \Omega : X(w) = x\}$$

- Exemplo: Sejam P1, P2, P3 e P4, quatro postos médicos com, respectivamente, 4,5,4,6 enfermeiros. Seja Ω={P1,P2,P3, P4, P5} e X - o número de enfermeiros existentes nos posto médicos P1,P2,P3 e P4. Então X(Ω)={4,5,6}.

  Defina-se agora A - um posto médico, escolhido aleatoriamente, ter 4 enfermeiros. Desta forma, P[A]=P[X=4]=2/4

Variáveis aleatórias n-dimensionais

- Até agora vimos exemplos de variáveis aleatórias unidimensionais, ou seja, em que a correspondência é $\Omega \to \Re$
- Se a correspondência é feita de $\Omega \to \Re^2$ estamos na presença de uma variável aleatória bidimensional
- Generalizando, se a correspondência é feita de $\Omega \to \Re^n$ estamos na presença de uma variável aleatória n-dimensional
- Exemplo:

- As variáveis aleatórias podem ser
  - Discretas
  - Contínua

Variáveis aleatórias discretas unidimensionais função de probabilidade

- **DEF.:** Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores distintos, x_1, x_2,…,x_n,… A função representada por f(x) e definida por

$$f_X(x) = f(x) = \begin{cases} P(X = x), \text{se } x = x_j \\ 0, \text{se } x \neq x_j \end{cases}, j = 1,2,3,...$$

  designa-se por <u>função de probabilidade</u>
- **Nota**: como f(x) corresponde a uma probabilidade, então podemos afirmar que
  - $0 \leq f(x) \leq 1$
  - A soma de todos os valores que pode assumir é 1, uma vez que corresponde à probabilidade do espaço de resultados
- Face a esta nota, podemos redefinir função de probabilidade

Variáveis aleatórias discretas unidimensionais função de probabilidade (cont.)

- É uma função de probabilidade de uma variável aleatória discreta X, qualquer função que verifique:

  1. $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \Re$

  2. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$ (caso n seja infinito, $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ é uma série convergente de soma 1)

- **Exemplo** Seja Ω={1,2,3,…,n,…}

  Consideremos a variável aleatória X - número de número de clientes que são atendidos na caixa 1 do banco "SóLucro", até aparecer um cliente que faça um levantamento.

  Neste caso, X={x: x=1,2,3,…,n,…} é uma variável aleatória discreta. A P[X=x]=P[atender pelo menos k clientes, k≤x, até atender um cliente que faça um levantamento]

Exemplo (1)

- Seja
  - p – probailidade de um cliente fazer um levantamento, com p não nulo
  - 1-p - probabilidade de um cliente não fazer um levantamento

então

$$P[X=x]=(1-p)^{x-1}p$$

- Vejamos que

$$f(x)=\begin{cases}P(X=x), \text{ se } x=1,2,3,\dots, \\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases} = f(x)=\begin{cases}(1-p)^{x-1}p, \text{ se } x=1,2,3,\dots, \\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases}$$

é uma função de probabilidade

Exemplo (2)

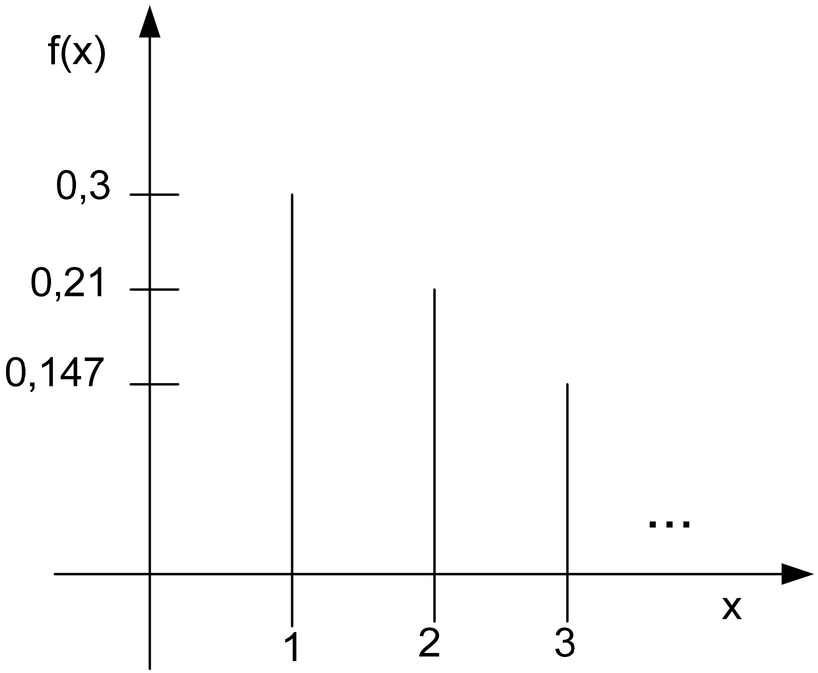
1) $0 \le f(x) \le 1$, para todo o x real: (prova por indução)
   1) se x=1, então $f(1)=(1-p)^0 p=p$. Como p é uma probabilidade então $0 \le f(1) \le 1$
   2) Suponhamos que $0 \le f(n) \le 1$. Então $f(n+1) = (1-p)^{n+1}p=(1-p)(1-p)^n p=(1-p)f(n)$. Dado que $0 \le f(n) \le 1$ e $0 \le 1-p \le 1$ então $0 \le f(n+1) \le 1$
2) Vamos agora verificar a segunda parte da definição:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p = p \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} = p \frac{1}{p} = 1$$

Série geométrica de razão (1-p). Logo
S=1/(1-(1-p))=1/p

Representação gráfica da função de probabilidade

- Consideremos o exemplo anterior e suponhamos que p=0.3. Então
  - f(1)=P[X=1]=0.3
  - f(2)=P[X=2]=0.7x0.3=0.21
  - f(3)=P[X=3]=0.7^2x0.3=0.147
  - …



Variáveis aleatórias discretas unidimensionais função distribuição

- Vamos agora supor que estamos interessados em determinar a probabilidade de X assumir um conjunto de valores, por exemplo, $P[X \leq 2]$
- **Função distribuição:** Define-se função distribuição de uma variável aleatória e representa-se por F(.), como sendo uma função $F_X : \Re \to [0,1]$

$$x \in \Re \to F_X(x) = P[X \leq x]$$

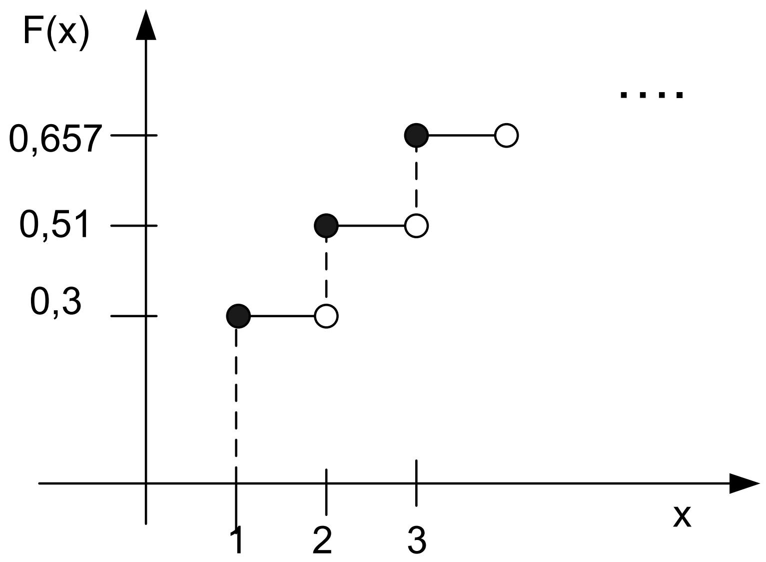
e que verifica as seguintes propriedades:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x_2) \geq F(x_1)$, para todo x_1, x_2, com $x_2 > x_1$ (monótona não decrescente)
3. $\lim_{x \to -\infty} = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} = 1$
4. $P[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1)$, para todo x_1, x_2, com $x_2 > x_1$

Representação gráfica da função distribuição

- A função distribuição pode ser representada graficamente e, no caso de variáveis aleatórias discretas, tem uma representação em escada.

- Para o exemplo anterior vem



$$F(X) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.3, & 1 \le x < 2 \\ 0,21, & 2 \le x < 3 \\ \ldots\ldots & \end{cases}$$

Variáveis aleatórias continuas unidimensionais função de distribuição e função densidade de probabilidade

- Será que existe função de probabilidade para variáveis aleatórias contínuas?
- Seja X uma variável aleatória contínua. Segundo o conceito clássico de probabilidade, temos que

$$\mathrm{P}[\mathrm{X}=\mathrm{x}]=\frac{\mathrm{n}^{\mathrm{o}}\,\text{casos favoráveis}}{\mathrm{n}^{\mathrm{o}}\,\text{casos possíveis}}=\frac{k}{\infty}=0$$

  ou seja, para qualquer valor a probabilidade seria nula o que não faz sentido.
- No entanto, não são nulas as probabilidades definidas em intervalos, existindo por isso função distribuição.
- Tomemos o intervalo $[x,x+\Delta x]$ e calculemos a variação da probabilidade nesse intervalo:

$$P[x \leq X \leq x+\Delta x] = P[x < X \leq x+\Delta x] = F(x+\Delta x)-F(x).$$

- Sendo assim, a variação média é dada por

Variáveis aleatórias continuas unidimensionais função de distribuição e função densidade de probabilidade (cont.)

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

- E a variação instantânea por $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$

- Como F(x) representa a probabilidade acumulada, F'(x) vai representar a taxa a que essa probabilidade está a aumentar. A função f(x)= F'(x) designa-se por função densidade de probabilidade.
- De uma forma genérica, qualquer função $f:\Re\to[0,1]$ tal que:

$f(x)\geq 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$

tem a designação de função densidade de probabilidade

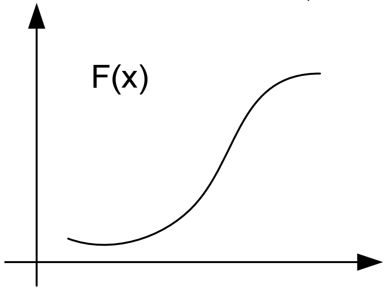
Representação gráfica de f(x) e de F(x)

- Sendo f(x) =F'(x) então pode definir-se a função distribuição por

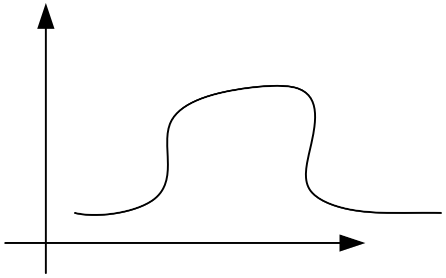
$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

- E desta forma, $P[x_1 < X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

- Nota: a definição de função distribuição dada na página 10, também é válida para variáveis aleatórias contínuas
- Graficamente,



Paralelismo com polígono de frequências acumuladas



Paralelismo com polígono de frequências

Parâmetros de variáveis aleatórias
Média ou valor esperado

- Seja X uma variável aleatória. O <u>valor esperado de</u> X , também designado por média de X, define-se por

$$E[X] = \mu_X = \sum_i x_i f_i \text{, se X é uma variável aleatória discreta}$$

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \text{, se X é uma variável aleatória contínua}$$

- <u>Propriedades do valor esperado</u>: Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e k uma constante real:

$$1 - E[k] = k$$

$$2 - E[kX] = kE[X]$$

$$3 - E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$$

$$4 - E[XY] = E[X]E[Y] + \operatorname{cov}(X, Y)$$

$$5 - E[XY] = E[X]E[Y] \text{, se X e Y forem independentes}$$

Parâmetros de variáveis aleatórias
Mediana e Moda

- Seja X uma variável aleatória. A mediana de X define-se por

$$\eta_X = \mathrm{x}_1 \text{ em que } \mathrm{F}(\mathrm{x}_1) \geq 0.5, \text{ se X é uma variável aleatória discreta}$$

$$\eta_X \text{ é o valor da variável que é solução da equação } \mathrm{F}(\eta_X) = 0.5$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\eta_X} \mathrm{f}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} = 0.5, \text{ se X é uma variável aleatória contínua}$$

- Note-se que, no caso de <u>variáveis aleatórias contínuas</u>, se a solução da equação não for única então a mediana é dada por

$$\eta_X = \frac{\mathrm{X}_{\min} + \mathrm{X}_{\max}}{2}$$

em que X_{min} e X_{max} representam, respectivamente, o mínimo e o máximo do conjunto das soluções

- Seja X uma variável aleatória. A moda de X, ξ_X , é o valor da variável para o qual a função probabilidade, se X é discreta, ou a função densidade de probabilidade, se X é contínua, toma o valor máximo

Parâmetros de variáveis aleatórias
Valor esperado de função de uma variável aleatória

- Seja X uma variável aleatória e g(X) é uma função de contradomínio em **R**. Então:

$$E[g(X)] = \sum_{i} g(x_i) f(x_i), \text{ se X for uma variável aleatória discreta}$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x), \text{ se X for uma variável aleatória contínua}$$

Parâmetros de variáveis aleatórias
Variância e desvio padrão

- Seja X uma variável aleatória. A <u>variância de X</u>, define-se por

$$\mathrm{Var}[X] = \sigma_X^2 = \sigma^2 = E[(X - \mu_X)^2]$$

sendo o seu cálculo dado por:

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 f_i \text{, se X é uma variável aleatória discreta}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x)\, dx \text{, se X é uma variável aleatória contínua}$$

- Designa-se por <u>desvio padrão</u>:

$$\sigma_X = \sigma = +\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Parâmetros de variáveis aleatórias
Propriedades da Variância

- Propriedades da variância: Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e k uma constante real:

$$1 - \mathrm{Var}[k] = 0$$

$$2 - \mathrm{Var}[kX] = k^2\mathrm{Var}[X]$$

$$3 - \mathrm{Var}[X \pm Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] \pm 2\mathrm{Cov}[X, Y]$$

$$4 - \mathrm{Var}[X \pm Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y], \text{se X e Y forem independentes}$$

$$5 \text{ - } \mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - E^2[X]$$

$$6 - \text{Se X é uma variável aleatória tal que } \mathrm{E}[X] = \mu \text{ e } \mathrm{Var}[X] = \sigma^2, \text{ então}$$

$$W = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ tem parâmetros } \mathrm{E}[W] = 0 \text{ e } \mathrm{Var}[W] = 1$$

Variáveis aleatórias discretas bidimensionais função de probabilidade e de distribuição conjunta

- Designa-se por <u>função de probabilidade conjunta da variável aleatória (X,Y)</u> à função f(x,y)=P(X=x,Y=y) e que verifica:

$$1 - 0 \leq \mathrm{f}(x, y) \leq 1 \,,\, \forall (x, y) \in \Re^2$$

$$2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{f}(x_i, y_j) = 1$$

- Designa-se por <u>função de distribuição conjunta de (X,Y)</u> a função de distribuição conjunta F(x,y)=P(X≤x,Y ≤ y) e que verifica:

$$1 - \lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0 \,,\, \forall \mathrm{y} \text{ fixo e } \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0, \forall \mathrm{x} \text{ fixo}$$

$$2 - \lim_{\substack{y \to -\infty \\ x \to -\infty}} F(x, y) = 0 \text{ e } \lim_{\substack{y \to +\infty \\ x \to +\infty}} F(x, y) = 1$$

$$3 - 0 \leq \mathrm{F}(x, y) \leq 1$$

$$4 - \forall x_2 > x_1, \forall y_2 > y_1 : \mathrm{F}(x_1, y_1) \leq \mathrm{F}(x_2, y_2)$$

Variáveis aleatórias discretas bidimensionais função de probabilidade marginal e independência

- Designa-se por função probabilidade marginal de

$$X : f_X(x) = P[X = x, -\infty < Y < +\infty] = \sum_y f(x, y)$$

$$Y : f_Y(y) = P[-\infty < X < +\infty, Y = y] = \sum_x f(x, y)$$

- Dada uma variável aleatória bidimensional (X;Y), diz-se que as variáveis aleatórias unidimensionais X e Y são independentes, se a sua função de probabilidade conjunta f(x,y) for igual ao produto das funções de probabilidade marginais, ou seja,

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, para todo o (x,y)

Parâmetros de variáveis aleatórias
Covariância

- Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. Define-se <u>covariância entre X e Y</u> por

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \sigma_{X,Y} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

Sendo o seu cálculo dado por,

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y) f(x_i, y_j),$$

$$\text{se } (X,Y) \text{ for uma variável aleatória discreta}$$

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f(x,y)\,dx\,dy,$$

$$\text{se X for uma variável aleatória contínua}$$

- Desenvolvendo a expressão anterior, podemos obter uma expressão simplificada para a covariancia: Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]
- Se X e Y forem independentes então Cov(X,Y)=0. Mas o contrário não é verdadeiro

Parâmetros de variáveis aleatórias
Coeficiente de Correlação Linear

- Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. Define-se coeficiente de correlação linear, por

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- O coeficiente de correlação linear varia entre -1 e 1
- Se X e Y forem independentes então Cov(X,Y)=0. O recíproco não é válido. De facto, a Cov(X,Y) pode ser nula e existir uma ligação não linear entre as variáveis e portanto elas não são independentes.

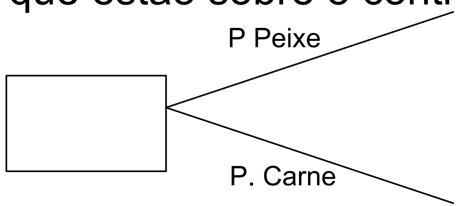
Valor Esperado Monetário (1)

- **Objectivo**: Efectuar a análise de problemas nos quais se pretende escolher a alternativa, de entre várias, que maximiza ou minimiza uma determinada grandeza, por exemplo, maximizar o lucro, minimizar a perda ou o gasto, etc
- <u>Exemplo</u>: Um gerente de um restaurante pretende incluir um novo prato na lista. Existem duas opções possíveis: prato de peixe, prato de carne. O gerente sabe que o lucro é uma função da procura e é dado por:
  - Prato de peixe: 500 u.. Se a procura for alta e 300 u.m. se a procura for baixa
  - Prato de carne: 700 u.m. se a procura for alta e 500 se a procura for baixa

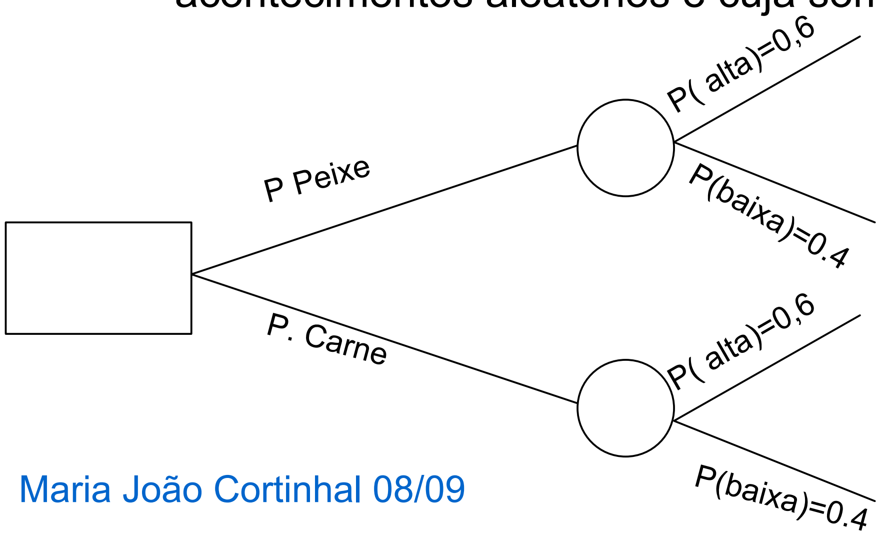
  Sabendo que a probabilidade da procura ser alta é de 0,6 e de a procura ser baixa é de 0,4, qual dos dois pratos deve o gerente escolher para incluir na lista, se tiver como objectivo maximizar o lucro?

Valor Esperado Monetário (2)

- A análise deste tipo de problemas pode ser realizada através duma <u>árvore de decisão</u>. Uma árvore de decisão é constituída por:
  - **<u>Nó de decisão</u>**, representado por meio de um rectângulo, e de onde saem as decisões que estão sobre o controlo do decisor:



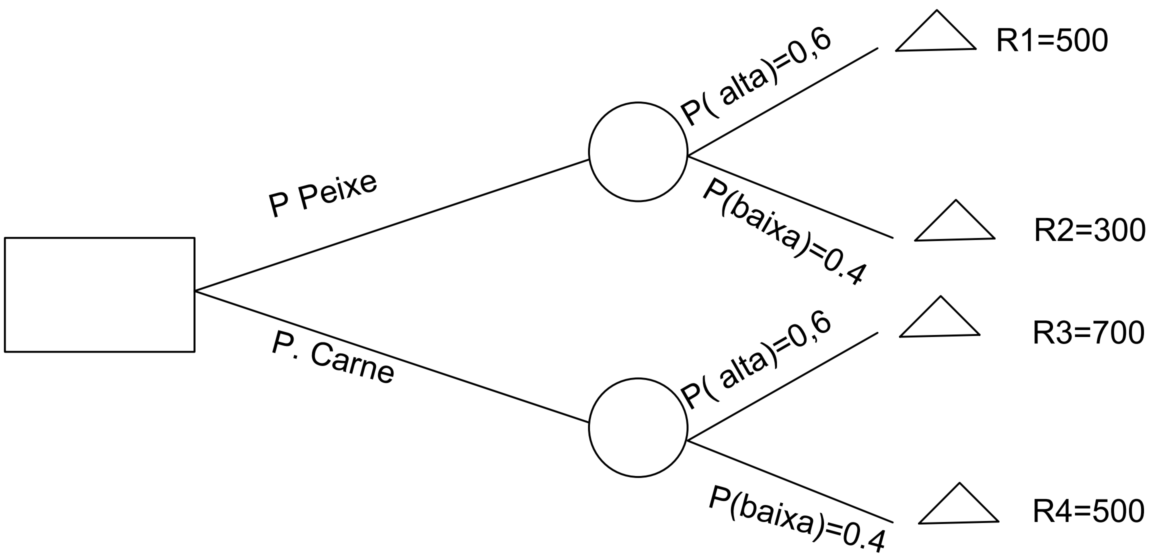
  - **<u>Nós de acontecimentos</u>**, representados por circunferências, de onde saem acontecimentos aleatórios e cuja soma das probabilidades é 1



Cada ramo da árvore representa uma alternativa, ou seja, uma sequência de decisões em que algumas delas estão sobre o controlo do decisor e outras são de natureza aleatórias

Valor Esperado Monetário (3)

- Fim de sequências, ou alternativas, e que são representadas por meio de triângulos



Valor Esperado Monetário (4)

- Uma vez representada a árvore de decisão, é necessário avaliar cada nó de acontecimentos, calculando o seu valor esperado monetário:
  - <u>E[Prato de peixe]= 500x0,6+300x0,4=420 u.m.</u>
  - <u>E[Prato de carne]= 700x0,6+500x0,4=620 u.m.</u>

- O valor esperado monetário é inserido no interior de cada nó de acontecimentos e o melhor valor no nó de decisão. Os ramos não escolhidos são “cortados”