TEORIA DAS PROBABILIDADES

Matéria apoiada pelo livro
“Estatística Aplicada”, dos autores
Elizabeth Reis, P. Melo, R. Andarade,
T. Calapez, Ed. Sílabo.

Conceitos de Probabilidade

- Conceito clássico de probabilidade
  - Só pode ser aplicado quando os acontecimentos elementares são **igualmente prováveis**

Se a uma experiência aleatória se podem associar **N** resultados possíveis, mutuamente exclusivos e igualmente prováveis, e se **m** desses resultados têm uma característica **A**, então a probabilidade de ocorrência de **A** é:

$$p(A) = \frac{m}{N} = \frac{\text{nº de casos favoraveis}}{\text{nº de casos possiveis}}$$

Catarina Marques

Conceitos de Probabilidade

- Conceito frequencista de probabilidade
  - Depende da possibilidade de reproduzir o mesmo processo e da habilidade de contar o número de repetições

Se em N realizações de uma experiência, o acontecimento A se verificou **m** vezes, a frequência relativa **m/N** é aproximadamente igual à probabilidade de **A**:

$$p(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{m}{N}$$

- *Obs.:* m/N é apenas uma estimativa de p(A)

Catarina Marques

Exemplo

(in "Estatística Aplicada", Reis et al, Vol.1, pág.49)

"A experiência aleatória que consiste na observação do sexo de um recém-nascido pode considerar-se o exemplo típico para a aplicação do conceito frequencista de probabilidade. Esta experiência já se realizou inúmeras vezes e existem registos dos seu resultado. Sabe-se que a probabilidade do sexo de um recém-nascido ser masculino é aproximadamente 0,52 e de ser do sexo feminino é de 0,48.

A utilização do conceito clássico de probabilidade teria conduzido ao valor 0,5 para cada uma das referidas probabilidades, o que constituiria um erro, pois estaríamos a considerar equiprováveis *nascer rapaz* e *nascer rapariga*, quando estes não o são.

Catarina Marques

Conceitos de Probabilidade

- Conceito subjectivo ou personalista de probabilidade
  - Medida da confiança ou da credibilidade que temos sobre a verdade de certa proposição;
  - Baseia-se na informação quantitativa (ex: frequência de ocorrência de um acontecimento) e/ou qualitativa (ex: informação sobre experiência passada em situações semelhantes) que o decisor possui sobre o acontecimento em causa;
  - Diferentes decisores podem atribuir diferentes probabilidades ao mesmo acontecimento decorrentes da experiência, atitudes, valores, etc. que possuem.

Axiomas da teoria de probabilidades

- A axiomática da teoria de probabilidades foi feita em 1933 pelo matemático russo A. N. Kolmogorov.

Axiomas:

Consideremos que p(.) é uma função que associa a todo o acontecimento A, definido em S, um número compreendido no intervalo [0,1] e que satisfaz os seguintes axiomas:

1) $p(A) \geq 0, \ \forall \ A \in S$
2) $p(S) = 1$
3) Sendo A e B acontecimentos mutuamente exclusivos definidos em S, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, tem-se que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Generalizando a n acontecimentos mutuamente exclusivos, A_1, A_2, ..., A_n, tem-se que:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

Catarina Marques

Teoremas

1. Numa experiência, se P(A) é a probabilidade de ocorrência do acontecimento A, então a probabilidade do seu complementar é: $$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$
2. A probabilidade do acontecimento impossível é zero, isto é: $$p(\emptyset) = 0$$
3. Dados dois acontecimentos quaisquer A e B, a probabilidade do acontecimento diferença B - A obtém-se por: $$p(B - A) = p(B \cap \overline{A}) = p(B) - p(A \cap B)$$
4. A probabilidade da união de dois acontecimentos quaisquer A e B, obtém-se por: $$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Catarina Marques

A tabela seguinte apresenta a distribuição de 100 alunos de Gestão por sexo e turmas A e B. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A1 – aluno e.a. é da turma A
A2 – aluno e.a. é da turma B
B1 - aluno e.a. é do sexo feminino
B2 - aluno e.a. é do sexo masculino

	Turma A	Turma B	total
Feminino	34	15	**49**
Masculino	34	17	**51**
total	**68**	**32**	**100**

Qual a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso
a) ser uma rapariga da turma A?
b) ser um rapaz da turma B?
c) ser rapaz?
d) ser da turma A?
e) Suponha-se agora que se reduz o estudo ao conjunto dos rapazes. Qual a probabilidade de um aluno e.a., no grupo dos rapazes ser da turma A?

Quando as probabilidades são calculadas "em relação" a um subconjunto do espaço amostral, dizem-se ***probabilidades condicionadas***.

Catarina Marques

Probabilidades condicionadas

Sejam A e B acontecimentos tais que $p(B)>0$. Define-se ***probabilidade de A condicionada à ocorrência do acontecimento B*** do seguinte modo:

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

Lê-se ***probabilidade de A dado B*** ou ***probabilidade de A se B***

Estamos a calcular a probabilidade de A em relação ao espaço amostral B em vez de o fazer em relação ao espaço amostral S.

Axiomática e teoremas da teoria das probabilidades na probabilidade condicionada

1) $p(A/B)\geq 0$

2) $p(S/B)=1$

Ao obedecer à axiomática da teoria das probabilidades, o conceito de probabilidade condicionada também satisfaz todos os seus teoremas.

3) Se A_1 e A_2 são acontecimentos mutuamente exclusivos então

$$p(A_1\cup A_2/B)=p(A_1/B)+p(A_2/B)$$

Catarina Marques

Probabilidade da intersecção de acontecimentos

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)},\ p(B)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad p(A\cap B)=p(A/B)p(B)\ \text{com}\ p(B)\neq 0$$

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)},\ p(A)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad p(A\cap B)=p(B/A)p(A)\ \text{com}\ p(A)\neq 0$$

Generalizando a mais de 2 acontecimentos:

$$\begin{aligned}p(A\cap B\cap C)=p((A\cap B)\cap C)&=p(C/(A\cap B)p(A\cap B)\\&=p(C/(A\cap B)p(B/A)p(A)\\&\quad\text{com}\ p(A)\neq 0\ \text{e}\ p(A\cap B)\neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)&=p(A_n/(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})p(A_{n-1}/(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-2})\times\\&\times p(A_{n-2}/(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-3})\times\cdots\times p(A_2/A_1)p(A_1)\end{aligned}$$

sendo não nula a probabilidade de qualquer um dos acontecimentos condicionantes

Catarina Marques

Acontecimentos independentes

Dois acontecimentos A e B dizem-se independentes sse for verificada

$$p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

ou

$$p(A/B) = p(A)$$
$$p(B/A) = p(B)$$

Teoremas: Se A e B são acontecimentos independentes

1) A e $\overline{B}$ também o são
2) $\overline{A}$ e B também o são
3) $\overline{A}$ e $\overline{B}$ também o são

Generalização do conceito de acontecimentos independentes

A_1, A_2, ..., A_n dizem-se independentes se se verificarem simultaneamente as seguintes condições:

$$p(A_i \cap A_j) = p(A_i)p(A_j) \quad \forall i, j = 1,2,...,n, i \neq j$$

$$p(A_i \cap A_j \cap A_k) = p(A_i)p(A_j)p(A_k) \quad \forall i, j, k = 1,2,...,n, \text{ com } i \neq j, i \neq k, j \neq k$$

...

$$p(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} p(A_i)$$

- Os acontecimentos A_1, A_2, ..., A_n dizem-se independentes 2 a 2 se verificarem apenas a 1ª condição.
- A última condição é necessária mas não suficiente para que A_1, A_2, ..., A_n sejam independentes .