Teoria das probabilidades

Experiência aleatória

- Teoria das probabilidades: estuda os fenómenos aleatórios ou seja os acontecimentos influenciados pelo acaso.
- Na base está o conceito de experiência aleatória, cujas características são:
  - Pode ser repetida em condições semelhantes;
  - Embora se conheçam todos os resultados possíveis não se conhece o resultado de cada experiência;
  - Regularidade, quando a experiência é repetida muitas vezes

Experiência aleatória: lançamento de uma moeda

Experiência determinística: temperatura de entrada em ebulição da água

Espaço de resultados

- **Espaço de resultados (Ω)**: conjunto de todos os resultados possíveis que se podem obter na realização de uma experiência
- Exemplo:
  - Experiência aleatória: lançamento de uma moeda ao ar
  - Espaço de resultados: Ω={cara, coroa}
- O espaço de resultados:
  - Discreto: contem um número finito ou infinito numerável de elementos
    - Exemplo: lançamento de uma moeda ao ar
  - Contínuo: contem um número infinito não numerável de elementos
    - a temperatura do ar medida ao longo de 24 h
- Os elementos podem ser indicados em:
  - Extensão: $\Omega=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
  - Compreensão: $\Omega=\{(i,j): 1\leq i\leq 3,\ 1\leq j\leq 2\}$

Acontecimento

- **Acontecimento**: é um subconjunto A $\subseteq$ Ω.
- Diz-se que o acontecimento A se realizou se o resultado da experiência aleatória ω é um elemento de A
- Exemplo:
  - Exp aleatória: lançamento de um dado: Ω={1,2,3,4,5,6}
  - Acontecimento:
  - saída de uma face superior a 2: A={2,3,4,5,6}
  - Saída de uma face inferior a 1 A={} : Acontecimento impossível
  - Saída de uma face superior a 0: A={1,2,3,4,5,6} : Acontecimento certo

- Álgebra dos acontecimentos:
  - Dada uma sucessão infinita de acontecimentos, A_1, A_2, …, define-se:
    - a sua união $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ como sendo o acontecimento que ocorre se e só se ocorrer pelo menos um dos acontecimentos A_i

Acontecimento

- Álgebra dos acontecimentos:

  - Dada uma sucessão infinita de acontecimentos, A_1, A_2, …, define-se a sua intersecção $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ como sendo o acontecimento que ocorre se e só se todos os acontecimentos A_i ocorrerem
  - Dados dois acontecimentos A e B, define-se diferença entre dois acontecimentos como sendo o acontecimento constituído por todos os elementos de A que não pertençam B por

    $A\text{-}B = A \setminus B = \{\omega : \omega \in A \text{ e } \omega \notin B\}$
  - Dois acontecimentos dizem-se mutuamente exclusivos ou incompatíveis se $A \cap B = \varnothing$

Propriedades

Propriedades	União	Intersecção
Comutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Elemento neutro	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \Omega = A$
Elemento absorvente	$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Idempotência	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Lei do complemento	$A \cup \overline{A} = \Omega$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
Leis de Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Axiomas da teoria das probabilidades

- Dado um acontecimento A de Ω, probabilidade é uma função

$$P() : A \rightarrow [0,1]$$

que satisfaz os seguintes axiomas:

  - P[A] ≥ 0, para todo o A ∈ Ω
  - P[Ω]=1
  - P[$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$] = $\sum_{i=1}^{n} P[A_i]$, em que A_i são acontecimentos definidos em Ω

    e mutuamente exclusivos, ou seja $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \varnothing$

Conceitos de probabilidades

- **Clássico (à priori)**: Consideremos uma experiência aleatória com N resultados possíveis, mutuamente exclusivos e igualmente prováveis. Seja n_A o número de resultados favoráveis a um acontecimento A. Então

$$P[A] = \frac{n_A}{n}$$

  - Exemplo: num lançamento de um dado, seja A - "saída da face um". Então P[A]=1/6

- **Conceito frequencista (à posteriori)**: Consideremos um experiência aleatória realizada N vezes em que o acontecimento A se verificou n vezes. Designa-se por frequência relativa de A

$$f_A = \frac{n}{N}$$

Devido à regularidade, quando N aumenta f_A tende a estabilizar e portanto

$$P[A] = \lim_{N \to +\infty} f_A$$

Conceitos de probabilidades

- **Conceito subjectivo ou personalista**: baseado no grau de credibilidade ou confiança dado ao acontecimento
  - Exemplo: A minha filha vai passar no exame de condução com 95% de confiança

Probabilidade baseada no conhecimento da pessoa
Não é possível aplicar os outros conceitos

Teoremas

- Teoremas:

$$T1: P[\overline{A}] = 1 - P[A], \forall A \in \Omega$$

$$\text{Dem}: \Omega = A \cup \overline{A} \Rightarrow P[\Omega[= P[A \cup \overline{A}] \underset{\text{mut.exc.}}{\Leftrightarrow} P[\Omega[= P[A] + P[\overline{A}] \Leftrightarrow 1 = P[A] + P[\overline{A}]$$

$$\Leftrightarrow P[\overline{A}] = 1 - P[A]$$

$$T2: P[\varnothing] = 0$$

$$\text{Dem}: \Omega = \Omega \cup \varnothing \Rightarrow P[\Omega[= P[\Omega \cup \varnothing] \underset{\text{mut.exc.}}{\Leftrightarrow} P[\Omega[= P[\Omega] + P[\varnothing] \Leftrightarrow 1 = 1 + P[\varnothing]$$

$$\Leftrightarrow P[\varnothing] = 1 - 1 = 0$$

Teoremas

$$\mathrm{T3: P[B - A]} = P[B] - P[A \cap B], \forall A, B \in \Omega$$

$$\mathrm{Dem: B} = B \bigcap \Omega \Rightarrow \mathrm{B} = B \bigcap (A \bigcup \overline{A}) \Rightarrow \mathrm{B} = (B \bigcap A) \bigcup (B \cap \overline{A}) \Rightarrow$$

$$B = (A \cap B) \cup (B - A) \Rightarrow \mathrm{P[B]} = \mathrm{P}[(A \cap B) \cup (B - A)]$$

$$\underset{\text{mut.exc.}}{\Leftrightarrow} \mathrm{P[B]} = \mathrm{P}[A \cap B] + \mathrm{P}[(B - A)] \Leftrightarrow \mathrm{P}[(B - A)] = \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A \cap \mathrm{B}]$$

Nota : a partir de T3 vem que :

$$\text{se } \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{P}[B - \mathrm{A}] = P[B] - \mathrm{P[A]}$$

$$\text{Dem : Se } \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{P}[A \cap B] = P[A]$$

Teoremas

$$\text{T4}: \mathrm{P}[\mathrm{A} \cup \mathrm{B}] = P[A] + P[B] - P[A \cap B], \forall A, B \in \Omega$$

$$\text{Dem}: \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = (A \cup B) \bigcap \Omega \Rightarrow \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \bigcap (A \bigcup \overline{A}) \Rightarrow \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = (A \bigcap A) \bigcup (B \cap \overline{A}) \Rightarrow$$

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = A \cup (B \cap \overline{A}) \Rightarrow \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = A \cup (B - A) \Rightarrow \mathrm{P}[\mathrm{A} \cup \mathrm{B}] = \mathrm{P}[A \cup (B - A)]$$

$$\underset{\text{mut.exc.}}{\Leftrightarrow} \mathrm{P}[\mathrm{A} \cup \mathrm{B}] = \mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[(B - A)] \underset{\text{T3}}{\Leftrightarrow} \mathrm{P}[A \cup \mathrm{B}] = P[A] + \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A \cap \mathrm{B}]$$

$$\text{Gen T4}: \mathrm{P}[\bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{A}_{\mathrm{i}}] = \sum_{i=1}^{n} P[A_1] - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P[A_i \cap A_j] + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P[A_i \cap A_j \cap A_k] \ldots$$

$$+ (-1)^{n+1} P[A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n]$$

Nota: Seja A um acontecimento impossível. Então P[A]=0

Contudo se P[A]=0 não significa que o acontecimento seja impossível.

Probabilidade condicional

- Dados dois acontecimentos A e B tais que P[B]>0, a probabilidade de A se realizar dado que B se realizou é dada por

$$P[A/B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \Rightarrow P[A \cap B] = P[A/B] \times P[B]$$

- De modo análogo, se P[A]>0 tem-se que

$$P[B/A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} \Rightarrow P[A \cap B] = P[B/A] \times P[A]$$

Axiomas e Teoremas

Seja P[B]>0:

- P[A/B] ≥ 0, para todo o A e B
- P[Ω/B]=1
- P[$(A_1 \cup A_2)$/B] = P[A_1 /B]+P[A_2 /B] , em que A_1 e A_2 são acontecimentos definidos em Ω e mutuamente exclusivos,
  ou seja $A_1 \cap A_2$ Ø

Teoremas:

$$T1: P[\overline{A}/B] = 1 - P[A/B]$$

$$T2: P[\varnothing/B] = 0$$

$$T3: P[(A_1 - A_2)/B] = P[A_1/B] - [(A_1 \cap A_2)/B]$$

$$T4: P[(A_1 \cup A_2)/B] = P[A_1/B] + P[A/B]_2 - [(A_1 \cap A_2)/B]$$

Acontecimentos independentes

- Dois acontecimentos, A e B, dizem-se independentes se P[A/B]=P[A] ou P[B/A]=P[B]
- Da definição anterior resulta o seguinte:
  - Dois acontecimentos, A e B, são independentes se e só se P[A∩B]=P[A]xP[B] (mesmo que P[A]=0 ou P[B]=0)
- Teoremas: Se A e B são acontecimentos independentes então
  - $\bar{A}$ e B também são independentes, A e $\bar{B}$ também são independentes
  - $\bar{A}$ e $\bar{B}$ também são independentes
- Generalizando: Os acontecimentos A_1, A_2, …, A_n são independentes se

$$P[A_i \cap A_j] = P[A_i] \times P[A_j], \forall i, j : i \neq j \longrightarrow$$

independentes 2 a 2

$$P[A_i \cap A_j \cap A_k] = P[A_i] \times P[A_j] \times P[A_k] \forall i, j, k : i \neq j, i \neq k, j \neq k$$

Indep. 3 a 3

……………………………

$$P[\prod_{i=1}^{n} A_i] = \prod_{i=1}^{n} P[A_i]$$

Nota: Os acontecimentos podem ser independentes 2 a 2 mas não serem 3 a 3, 4 a 4, etc e, como tal, não são independentes.

Notas

- Dois acontecimentos de probabilidade não nula não podem ser simultaneamente independentes e mutuamente exclusivos
  - Dem: Se $P[A]>0$ e $P[B]>0$ então sendo independentes vem que $P[A \cap B]=P[A]P[B]>0$, logo não podem ser mutuamente exclusivos
- Só quando um dos acontecimentos for impossível, ou seja com probabilidade nula, é que dois acontecimentos podem ser independentes e mutuamente exclusivos

Partição

- Diz-se que os acontecimentos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, definem uma partição em Ω quando:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i = \Omega : \text{a união de todos é o espaço de resultados}$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \mathrm{i} \neq \mathrm{j},\ \ \mathrm{i}, \mathrm{j} = 1,2,\ldots,\mathrm{n} : \text{são imcompatíveis 2 a 2}$$

$$\mathrm{P}[\mathrm{A}_\mathrm{i}) > 0, \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{n} : \text{todos têm probabilidade não nula}$$

Teorema da Probabilidade Total

- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ acontecimentos que definem uma partição em Ω e B um qualquer acontecimento definido em Ω. Então

$$P[B] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}[\mathrm{B}/\mathrm{A}_i] \times \mathrm{P}[\mathrm{A}_i]$$

$$\mathrm{Dem: B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)} = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i)$$

$$\therefore P[B] = P[\bigcup_{i=1}^{n} (\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i)]$$

Mas os acontecimentos A_i definem uma partição em Ω logo $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing \Rightarrow (\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i) \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_j) = \varnothing$.

Desta forma, $P[\bigcup_{i=1}^{n} (\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i)] = \sum_{i=1}^{n} P[\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i]$.

Por definição de probabilidade condicionada vem que $\sum_{i=1}^{n} P[\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i] = \sum_{i=1}^{n} P[\mathrm{B}/\mathrm{A}_i] \times \mathrm{P}[\mathrm{A}_i]$

Exemplo

- Sejam M_1, M_2 e M_3 três máquinas utilizadas na produção de parafusos. Suponhamos que:
  - M_1 produz 25% dos parafusos sendo 5% defeituosos
  - M_2 produz 35% dos parafusos sendo 2% defeituosos
  - M_3 produz 40% dos parafusos sendo 4% defeituosos
- Seja D: "um parafuso, escolhido ao acaso, ser defeituoso". Qual a P[D]?
- Resolução:
- Sejam
  - A_1: "um parafuso, escolhido ao acaso, provir de M_1"
  - A_2: "um parafuso, escolhido ao acaso, provir de M_2"
  - A_3: "um parafuso, escolhido ao acaso, provir de M_3"
- A_1, A_2, A_3 formam uma partição pois:
  - Apenas as máquinas M_1, M_2, M_3 podem produzir parafusos
  - Cada parafuso é produzido numa única máquina
  - Qualquer máquina produz parafusos

Continuação do exemplo

- Pelo enunciado sabemos que:
  - $P[A_1]=0,25$; $P[A_2]=0,35$; $P[A_3]=0,40$
  - $P[D/A_1]=0,05$; $P[D/A_2]=0,2$; $P[D/A_3]=0,04$
- Então, como estamos perante uma partição podemos aplicar o teorema da probabilidade total:

$$P[D]=\sum_{i=1}^{3}P[D/A_i]P[A_i]=0,25\times 0,05+0,35\times 0,02+0,4\times 0,04=$$

$$=0,00355$$

Fórmula de Bayes

- Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ acontecimentos que definem uma partição em Ω e B um qualquer acontecimento definido em Ω. Então

$$P[A_i/B] = \frac{P[A_i] \times P[B/A_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[B/A_j] \times P[A_j]}, \; i = 1,2,\ldots,n$$

Dem:

$$P[A_i/B] \underset{\text{Por def.}}{=} \frac{P[A_i \cap B]}{P[B]} \underset{\text{Por def.}}{=} \frac{P[A_i] \times P[B/A_i]}{P[B]} \underset{\text{Teo. Prob.Total}}{=} \frac{P[A_i] \times P[B/A_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[A_j] \times P[B/A_j]}, \; i = 1,2,\ldots,n$$

Exemplo

- Consideremos o exemplo anterior.
- Suponhamos que se tirou um parafuso defeituoso. Qual é a probabilidade de ele provir da máquina M_1?
  - Queremos determinar $P[A_1/D]$
  - Como estamos perante uma partição, podemos aplicar a fórmula de Bayes:

$$P[A_1/D] = \frac{P[D/A_1]P[A_1]}{\sum_{i=1}^{3} P[D/A_i]P[A_i]} = \frac{0{,}25 \times 0{,}05}{0{,}0355} = 0{,}352$$

$$= 0{,}00355$$