

Estatística I

Distribuições Teóricas

Distribuições Discretas

- As distribuições teóricas representam os modelos matemáticos das distribuições empíricas
- Podem ser:
 - Discretas
 - Contínuas
- Exemplo: Consideremos a experiência aleatória que consiste num lançamento de um dado. Seja X a variável aleatória que representa o número inscrito na face voltada para cima. Então, admitindo que o dado não está viciado, é fácil de concluir que

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{se } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

- No exemplo anterior, a variável aleatória X apresenta uma função de probabilidade com características muito próprias: todos os valores que a variável pode assumir são equiprováveis, ou sejam ocorrem com a mesma probabilidade

Distribuição Uniforme (Discreta)

- **DEF:** A variável aleatória discreta X segue uma distribuição uniforme (discreta) e escreve-se $X \sim U(N)$, em que N é o parâmetro caracterizador da distribuição, se a sua função de probabilidade $f(x)$ é dada por

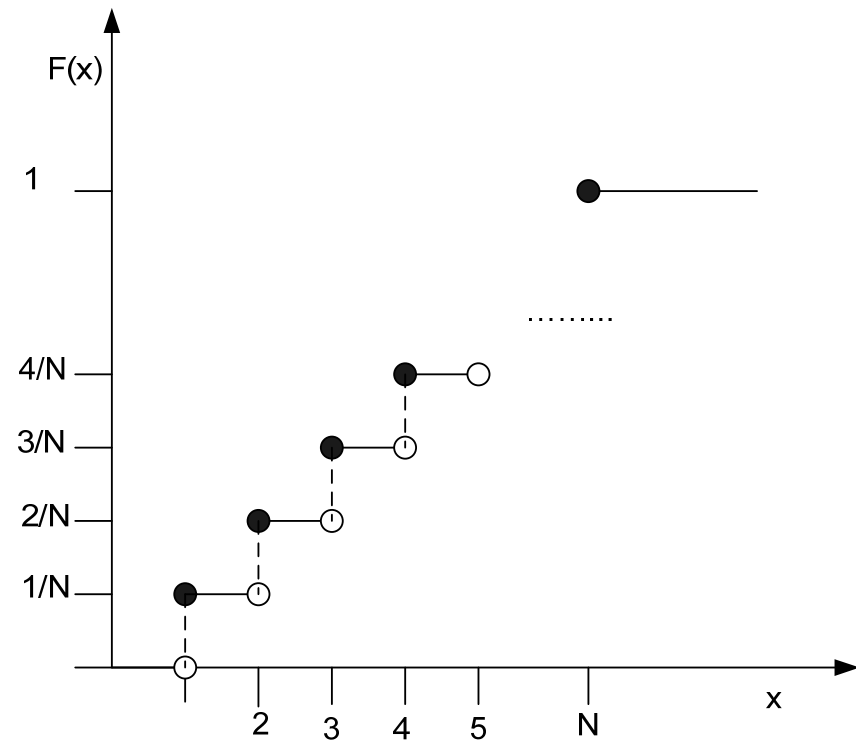
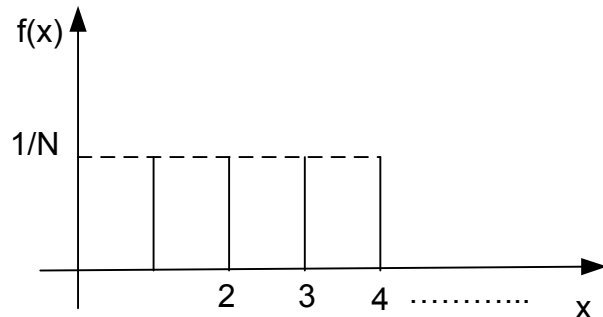
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & \text{se } x = 1, 2, \dots, N \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

- Se X é uma variável aleatória com distribuição uniforme então:

- $E[X] = (N+1)/2$
- $\text{Var}[X] = (N^2-1)/12$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ \frac{x_i}{N}, & \text{se } x_i \leq x \leq x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, N \\ 1, & \text{se } x \geq N \end{cases}$$

Representação gráfica da função probabilidade e distribuição da distribuição Uniforme (Discreta)



Provas de Bernoulli

- **DEF.:** Designa-se por prova de Bernoulli uma experiência aleatória, com apenas dois resultados possíveis
A (designado por sucesso) e $\bar{A}$ (designado por insucesso)
em que $P(A) = p$ e $P(\bar{A}) = 1 - p = q$
- Exemplo: A experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda ao ar
- **DEF. :** Designa-se por sucessão de provas de Bernoulli, ou processo de Bernoulli, uma experiência que consiste num conjunto de repetidas provas em que:
 1. Em cada prova só existem dois resultados possíveis (poderão existir mais mas podem ser resumidos a 2) mutuamente exclusivos, denominados por sucesso e insucesso;
 2. A probabilidade de sucesso, p , mantém-se constante de prova para prova;
 3. As provas são independentes, i.e., o resultado obtido numa certa prova ou sequência de provas não depende dos resultados obtidos nas provas anteriores.
- Exemplo: A experiência aleatória que consiste em lançar 3 vezes uma moeda ao ar.

Distribuição de Bernoulli - 1

- Exemplo: Consideremos a experiência aleatória que consiste no lançamento de um dado equilibrado. Seja X a variável aleatória que representa o número de vezes que a face seis saiu. Então
- X pode assumir os valores 0 ou 1.
 - $p = P[\text{sucesso}] = P[\text{sair a face seis}] = 1/6$.

Desta forma tem-se que :

$$P[X = 0] = \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^1 \text{ e } P[X = 1] = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^0$$

- No exemplo anterior, a variável aleatória X representa o número de sucessos numa prova de Bernoulli. Sendo assim, a variável aleatória apenas pode assumir o valor 0 ou 1. em que

$$p = P[\text{sucesso}] = P[X=1] \text{ e } 1-p = P[\text{insucesso}] = P[X=0]$$

Distribuição de Bernoulli -2

- **DEF:** Diz-se que a variável aleatória X segue uma distribuição de Bernoulli, e escreve-se $X \sim b(1,p)$, se a sua função de probabilidade for

$$f(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}, & \text{se } x = 0,1 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}, p \in [0,1]$$

- Se X é uma variável aleatória tal que $X \sim b(1,p)$ então:
- $E[X]=p$
 - $\text{Var}[X]=p(1-p)=pq$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1-p, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Distribuição de Binomial -1

- Exemplo: Um estudante tem 3 exames. A probabilidade de obter classificação positiva, em cada um, é 0.5. Seja X a variável aleatória que representa o número de exames, em 3, em que o aluno obteve classificação positiva. Então X pode assumir os valores 0,1,2 ou 3. Seja $p=P[\text{sucesso}]=P[\text{obter classificação positiva}]=0.5$.

Então

- $P[X=0]=\overbrace{(1-p)(1-p)(1-p)}^{3 \text{ factores}}$
- $P[X=1]=\overbrace{p(1-p)(1-p)+(1-p)p(1-p)+(1-p)(1-p)p}^{2 \text{ factores}}$
- $P[X=2]=\overbrace{pp(1-p)+p(1-p)p+(1-p)pp}^{1 \text{ factor}}$
- $P[X=3]=ppp$

Distribuição de Binomial - 2

- No exemplo anterior, a variável aleatória X representa o número de sucessos em $n=3$ provas de Bernoulli. Sendo assim, a variável aleatória apenas pode assumir o valor 0, 1, 2 ou 3 e além disso $p=P[\text{sucesso}]$
- **DEF. :** Uma variável aleatória X tem uma distribuição binomial, e escreve-se $X \sim b(n,p)$ se a sua função probabilidade for

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & \text{se } x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}, p \in [0, 1]$$

$\binom{n}{x}$: representa o número de formas distintas de obter x sucessos e como tal $(n-x)$ insucessos

- Se X é uma variável aleatória tal que $X \sim b(n,p)$ então:

- $E[X] = np$
- $\text{Var}[X] = np(1-p) = npq$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \sum_{k=0}^i \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & \text{se } i \leq x < i+1, i = 1, 2, \dots, n \\ 1, & \text{se } x \geq n \end{cases}$$

Distribuição de Binomial - 3

➤ Notas:

- Se $p=0,5$, então a distribuição é simétrica
- Se $p < 0,5$ então a distribuição é assimétrica positiva
- Se $p > 0,5$ a distribuição é assimétrica negativa

➤ Tanto $f(x)$ como $F(x)$ encontram-se tabeladas, em geral, para valores de $p \leq 0,5$. O que fazer se $p > 0,5$?

➤ Exemplo: Uma empresa comercializa lâmpadas e garante que 90% delas não apresentam defeito. Qual a probabilidade de, numa amostra de 5, 4 não serem defeituosas?

Seja X – o número de lâmpadas, em 5, que não são defeituosas, então $X=0,1,2,3,4,5$ e $p=P[\text{uma lâmpada, escolhida ao acaso, não ser defeituosa}]=0,9$. Então podemos dizer que X representa o número do sucessos em 5 provas de Bernoulli e portanto $X \sim b(5,0,9)$.

Contudo, $p > 0,5$. Vamos definir uma outra variável aleatória, $X_1=5-X$, o número de lâmpadas, em 5, que são defeituosas, e podemos afirmar que $X_1 \sim b(5,0,1)$. Além disso, é fácil de verificar que

$P[X=4]=P[X_1=1]$. Deste exemplo, podemos concluir que:

Distribuição de Binomial - 4

- A probabilidade de se obter x sucessos, em n provas de Bernoulli, é igual à probabilidade de se obter $n-x$ insucessos, ou seja,

- se $X \cap b(n,p)$ e $Y \cap b(n,1-p)$

$$P[X = x] = P[Y = n-x]$$

- Teorema: Aditividade da distribuição binomial

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_k$, k variáveis aleatórias independentes tais que

$$X_j \cap b(n_j; p).$$

Então, $S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k \cap b(n_1 + n_2 + \dots + n_k, p)$

Distribuição de Binomial negativa - 1

- Exemplo: Sabe-se que a probabilidade de um atirador acertar no alvo é de 0.6. Quantas tiros terá o atirador que efectuar para que acerte 3 vezes no alvo?

Seja X a variável aleatória que representa o número de tiros a efectuar pelo atirador, para que acerte 3 vezes. Se se pretende que o atirador acerte 3 vezes no alvo, é necessário que X seja pelo menos 3, ou seja, $X=3,4,5,\dots$

Sabe-se que a probabilidade de acertar no alvo é 0,6, ou seja, $p=P[\text{sucesso}]=0,6$.

Vejamos agora como se calculam as probabilidades associados a alguns valores de X .

$$P[X = 3] = ppp = p^3 = \binom{2}{2} p^3 (1-p)^0$$

$$P[X = 4] = pp(1-p)p + p(1-p)pp + (1-p)ppp = \binom{3}{2} p^3 (1-p)^1$$

NOTA: Dado que se pretende o número de tiros a efectuar para que o atirador acerte 3 vezes, então a última tentativa é sempre um sucesso. Daí que no cálculo das probabilidades o último factor seja sempre $p=P[\text{sucesso}]$

Distribuição de Binomial negativa - 2

- No exemplo anterior, conhecendo a probabilidade de sucesso, p , pretende determinar-se número de provas necessárias para que se obtenham k sucessos, ou seja o valor de x .

Como tal, têm que ocorrer k sucessos, daí o factor p^k , e $(x-k)$ insucessos e daí o termo $(1-p)^{x-k}$.

Por outro lado, é necessário considerar as diferentes formas de obter k sucessos, tendo em conta que a última prova é sempre um sucesso, e daí o termo $\binom{x-1}{k-1}$

- **DEF:** Diz-se que a variável aleatória X segue uma distribuição binomial negativa, e escreve-se $X \sim \text{bn}(k,p)$ se a sua função de probabilidade for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, & \text{se } x \geq k \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}, p \in [0,1]$$

Distribuição de Binomial negativa - 3

- Se X é uma variável aleatória tal que $X \sim \text{bn}(k, p)$ então:
 - $E[X] = k/p$
 - $\text{Var}[X] = k(1-p)/p^2$
- Obs:
 - Como se pode observar pelo exemplo anterior, existe uma relação entre a distribuição binomial e a distribuição binomial negativa. Na distribuição binomial, a variável aleatória X representa o número de sucessos em n provas de Bernoulli, ou seja o número de provas é fixo. Por outro lado, na distribuição binomial negativa, a variável aleatória X representa o número de provas de Bernoulli, para se obterem k sucessos, ou seja o número de sucessos é fixo
 - Se $k=1$, ou seja se X representa o número de provas de Bernoulli para se obter o 1º sucesso, então diz-se que $X \sim \text{bn}(1, p)$ também designada por distribuição Geométrica ou de Pascal. Neste caso, $f(x) = (1-p)^{x-1}p$

Distribuição de Poisson -1

➤ Exemplos:

- Chegada de chamadas a uma central telefónica, durante um dia
- Número de chegadas a um hospital, durante um dia
- Número de defeitos num tampo de mesa

➤ Nos exemplos anteriores, cada ocorrência é designada por um evento e, como é óbvio, cada vez que ocorre um evento o sistema altera-se.

➤ Uma das características destes processo é que os eventos ocorrem em espaços (intervalos de tempo, áreas, volumes) contínuos

➤ Neste processos, vamos assumir que:

- A probabilidade de ocorrência de um evento é igual em intervalos de tempos, áreas, volumes, etc, de igual amplitude, ou seja, a probabilidade só depende da amplitude do intervalo e não onde ou quando ocorre.
- A probabilidade de ocorrência de vários eventos em intervalos de pequena amplitude é muito pequena quando comparada com a probabilidade de ocorrer apenas um evento
- O número de eventos em intervalos de tempo não sobrepostos são variáveis aleatórias independentes

Distribuição de Poisson – 2

- A um processo com as características atrás enumeradas, dá-se o nome de processo de Poisson
- Exemplo: O número de chegadas a um hospital durante um dia em que ocorreu uma catástrofe não é um processo de Poisson: viola a condição 1.
- Se certo fenómeno verificar estas condições pode ser descrito através de uma distribuição de Poisson.
- **DEF**: Diz-se que a variável aleatória X , que toma valores inteiros não negativos e que obedece às condições anteriormente descritas, segue uma distribuição de Poisson, e escreve-se $X \sim P(\lambda)$, se a sua função de probabilidade for dada por

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

em que $\lambda > 0$ é o parâmetro caracterizador da distribuição

Distribuição de Poisson – 3

- Se X é uma variável aleatória tal que $X \sim P(\lambda)$ então:
 - $E[X] = \lambda$
 - $\text{Var}[X] = \lambda$
- **Obs:** Nesta distribuição, o parâmetro que a caracteriza, λ , identifica o número esperado de ocorrências por intervalo
- **Teorema:** Aditividade da distribuição de Poisson
Sejam $X_1, X_2, \dots, X_k$, k variáveis aleatórias independentes tais que $X_j \sim P(\lambda_j)$.
Então, $S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k \sim P(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)$
- A distribuição binomial converge para a distribuição de Poisson quando
 - $n \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$, mantendo-se $\lambda = np$ constanteNestas condições, se $X \sim b(n; p)$, então $X \sim P(\lambda = np)$
- A aproximação é considerada satisfatória se $n > 20$ e $p \leq 0.05$.
- Note-se que λ pode ser interpretado como o número esperado de sucessos em n provas de Bernoulli

Distribuições Contínuas

- **DEF:** A variável aleatória contínua X segue uma distribuição uniforme (contínua) no intervalo $[a,b]$ e escreve-se $X \sim U(a,b)$, se a sua função densidade de probabilidade $f(x)$ é dada por

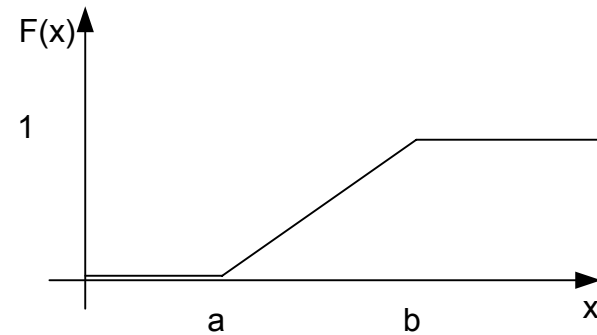
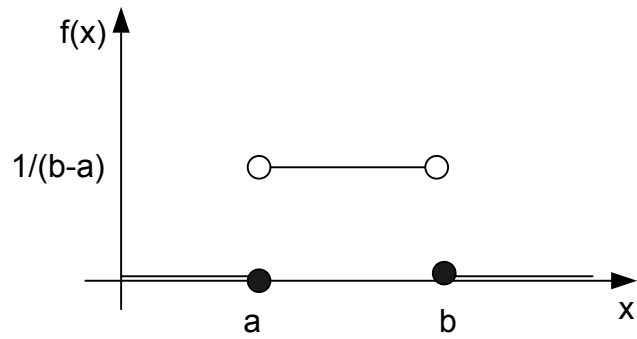
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)}, & \text{se } a < x < b \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}, -\infty < a, b < +\infty$$

- Se X é uma variável aleatória com distribuição uniforme então:

- $E[X] = (a+b)/2$
- $\text{Var}[X] = (b-a)^2/12$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a < x < b \\ 1, & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Representação gráfica da função probabilidade e distribuição da distribuição Uniforme (Contínua)



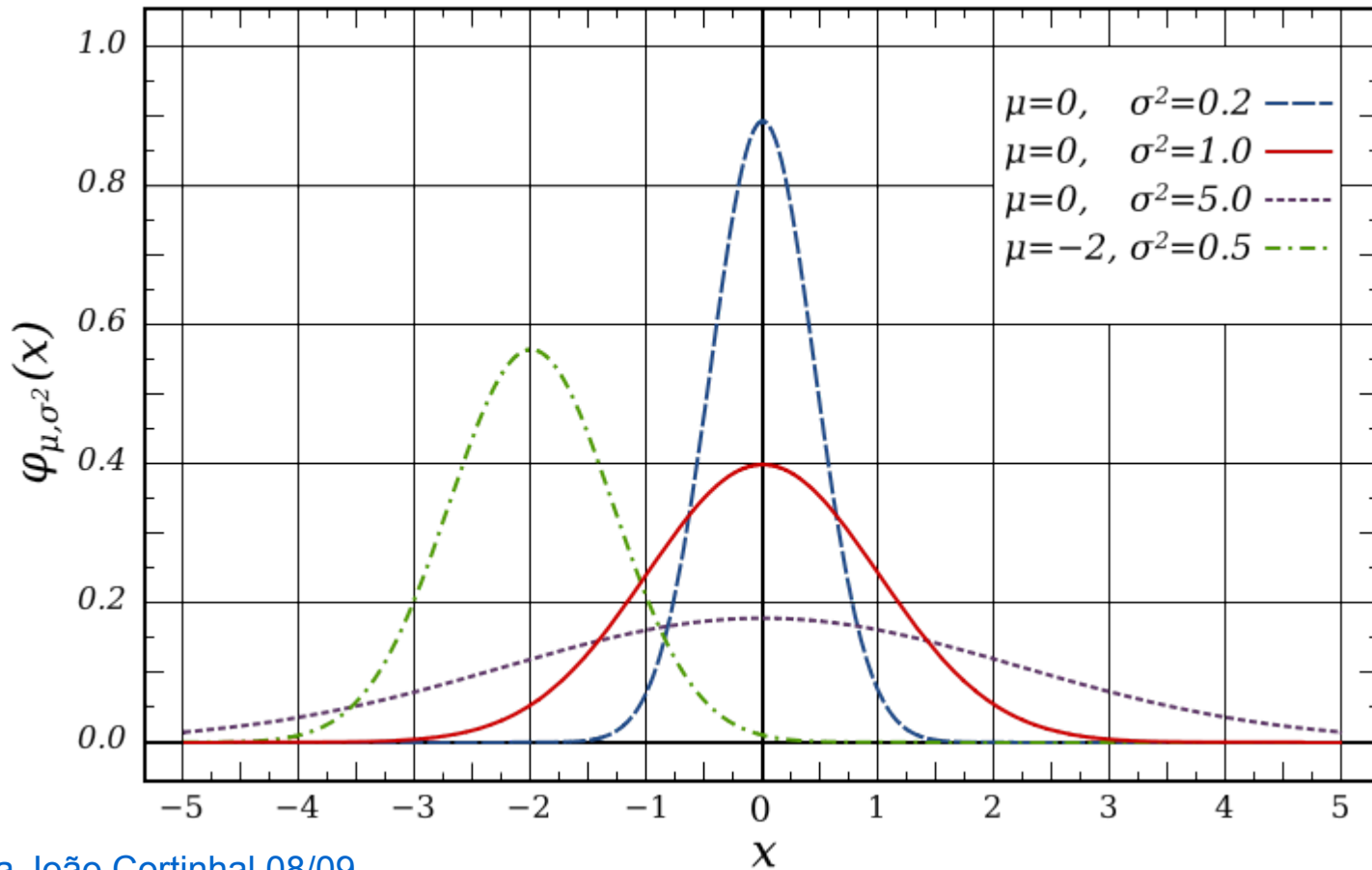
Distribuição Normal

- Das distribuições contínuas é uma das mais utilizadas pois muitas das características, que são alvo de estudos, seguem uma distribuição normal
- **DEF:** A variável aleatória contínua X segue uma distribuição normal e escreve-se $X \cap N(\mu, \sigma)$, se a sua função densidade de probabilidade $f(x)$ é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < +\infty, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$$

- Os parâmetros caracterizadores desta distribuição são μ e σ que representam, respectivamente, a média e o desvio padrão da distribuição, ou seja, se $X \cap N(\mu, \sigma)$ então:
 - $E(X) = \mu$
 - $\text{Var}(X) = \sigma^2$
- Características da distribuição normal:
 - A sua função densidade de probabilidade tem a forma de sino e é simétrica em relação ao eixo $x = \mu$, tendo como pontos inflexão $x = \mu \pm \sigma$
 - Essa curva, em forma de sino, é também designada por curva de Gauss, sendo a distribuição normal também designada por distribuição Gaussiana

Função densidade de probabilidade da Normal



Cálculo de probabilidades da Normal

➤ Notas:

- A distribuição normal define uma família de distribuições que, dado que μ e σ podem assumir qualquer valor real e real não negativo, respectivamente, contém infinitos elementos.
- Sendo assim, seria de todo impraticável a existência de tabelas da função densidade de probabilidade para todos os valores que os parâmetros μ e σ podem assumir. Como solucionar esta questão?

➤ Res:

$$\text{Se } X \cap N(\mu, \sigma) \text{ então } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \cap N(0,1)$$

- A variável Z resultou da variável X pela subtração da média, ou seja, mudança de origem, e divisão pelo desvio padrão, ou seja, mudança de escala. Este processo designa-se por standartização
- A distribuição $N(0,1)$, designa-se por distribuição normal padrão, normal standard ou normal reduzida.

Distribuição Normal Padrão

- **DEF:** A variável aleatória contínua X segue uma distribuição normal padrão e escreve-se $X \cap N(0,1)$, se a sua função densidade de probabilidade $f(x)$ é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \quad -\infty < x < +\infty$$

e a sua função distribuição designa - se por $\Phi(x) = P(X \leq x)$

- **Notas:**

- Dado que a distribuição normal é simétrica, então

$$\Phi(-x) = P[X \leq -x] = P[X \geq x] = 1 - P[X \leq x] = 1 - \Phi(x)$$

- **Exemplo:** Sabendo que $X \cap N(20,3)$ calcule a $P[X < 14]$

- $P[X < 14] = P[(X-20)/3 < (14-20)/3] = P[Z < -6/3]$ com $Z \cap N(0,1)$.

Mas, dada a simetria da distribuição normal, $P[Z < -6/3] = 1 - P[Z < 6/3]$.

Consultando as tabelas da normal padrão, vem que

$$1 - P[Z < 6/3] = 1 - 0,9772 = 0,228$$

Aditividade da Normal

- Teorema da aditividade da Normal: Sejam $X_1, X_2, \dots, X_k$, k variáveis aleatórias independentes com $X_i \cap N(\mu_i, \sigma_i)$ e $a_1, a_2, \dots, a_k$ constantes reais. Então a variável aleatória

$$T = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k \cap N\left(\sum_{i=1}^k a_i \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_i^2}\right)$$

- Corolários:

- Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ forem n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) $N(\mu, \sigma)$ então

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \cap N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \cap N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- Se $X \cap N(\mu_X, \sigma_X)$ e $Y \cap N(\mu_Y, \sigma_Y)$ e X e Y forem independentes então

$$X + Y \cap N(\mu_X + \mu_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2})$$

$$X - Y \cap N(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2})$$

Aproximações da Binomial e da Poisson à Normal

➤ Aproximação da binomial à normal:

Seja $X \sim b(n, p)$, tal que $n \rightarrow +\infty$ (em termos práticos, $n > 20$) e $0.1 < p < 0.9$.

Então $X \overset{\circ}{\sim} N(np, \sqrt{npq})$

➤ Aproximação da Poisson à normal:

Seja $X \sim P(\lambda)$, tal que $\lambda \rightarrow +\infty$ (em termos práticos, $\lambda > 20$) Então $X \overset{\circ}{\sim} N(\lambda, \sqrt{\lambda})$

➤ Como saber se se deve aproximar uma binomial a uma Poisson ou a uma normal?

- Regra nº 1: $n > 20$
- Regra nº 2 : Se p é grande ($0.1 < p < 0.9$) então usar a aproximação à normal
- Regra nº 3: Se p é pequeno ($p \leq 0.05$) então calcular np :
 - Se $np > 20$ usar a aproximação à normal
 - Se $np \leq 20$ usar a aproximação à Poisson

➤ Nota: Quando se usa a aproximação duma discreta a uma contínua deve utilizar-se um factor de correcção: soma-se, por exemplo, 0,5 ao extremo inferior e/ou superior do intervalo em consideração

Teorema do Limite Central

➤ Teorema do Limite Central

- Dada a sucessão de v.a. i.i.d., $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, com média μ e variância σ^2 , então, quando $n \rightarrow \infty$ (na prática quando $n > 30$),

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \overset{\circ}{\cap} N(0;1)$$

- Ou seja,
$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{\circ}{\cap} N(0;1)$$

- À luz do teorema do limite central, é possível justificar *a priori* que certas variáveis se distribuem de acordo com a distribuição normal. Tal sucederá, em particular, quando uma variável possa ser considerada, pelo menos aproximadamente, como uma soma de um conjunto significativo de variáveis independentes e identicamente distribuídas.

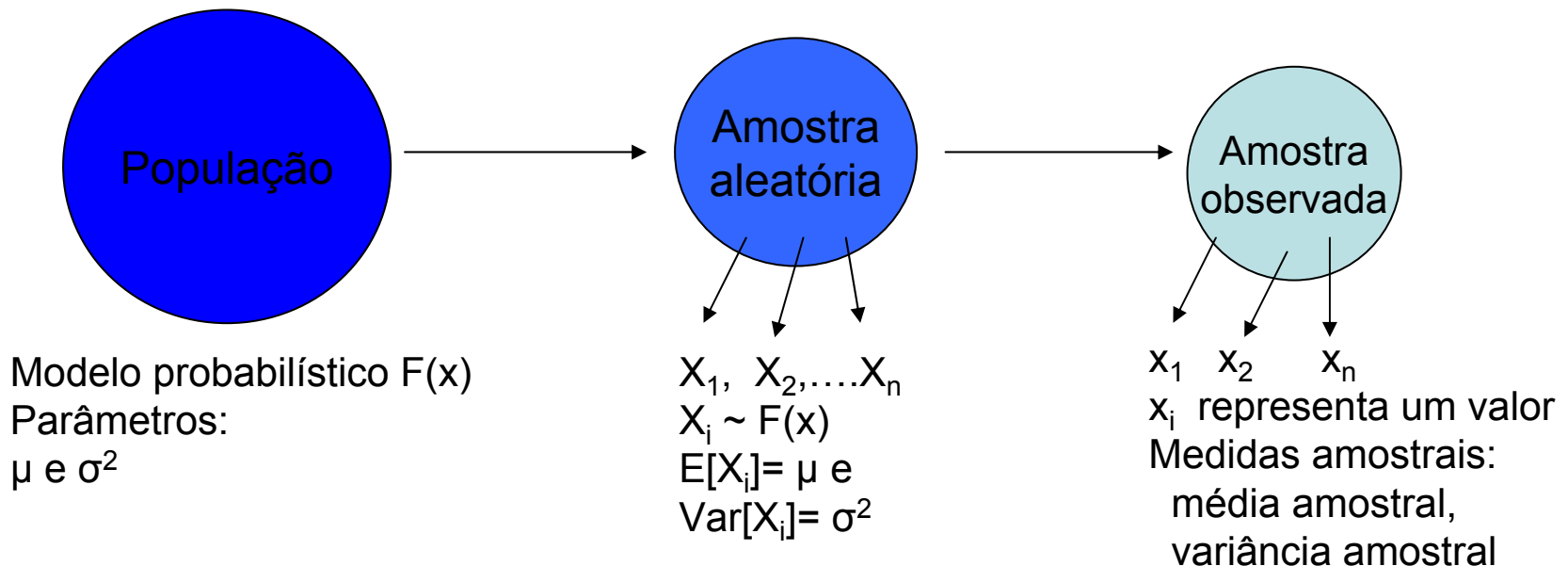
Amostragem

- Em relação às amostras deve assegurar-se a sua representatividade em relação à população de onde foram retiradas
- Dois grandes tipos de amostragem:
 - Aleatória: quando é possível calcular, *a priori*, a probabilidade de observar cada indivíduo da população na amostra
 - Determinística (também designada por dirigida): quando não é possível calcular tal probabilidade
- Tipos de amostragem aleatória:
 - Aleatória simples: Cada elemento da amostra é retirado aleatoriamente de toda a população (com ou sem reposição). Desta forma, cada possível amostra tem a mesma probabilidade de ocorrência. Desta forma, uma amostra aleatória designa um conjunto de variáveis aleatórias independentes e com a mesma distribuição
 - Amostragem por clusters: dividir a população por clusters, seleccionar aleatoriamente alguns desses clusters e depois recolher todos os elementos dos clusters seleccionados
 - Amostragem estratificada: subdividir a população em, pelo menos, dois subgrupos distintos que partilham alguma características, em seguida, escolher aleatoriamente elementos de cada subgrupo (ou estrato)

Amostragem

➤ Objectivos:

- Estimar características desconhecidas de uma população
- Estimar hipóteses sobre parâmetros de uma população



Distribuições de amostragem

- Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ representa uma amostra aleatória com distribuição $F(x)$, qualquer função destas variáveis vai ser uma nova variável aleatória com uma certa distribuição. Chama-se a essa distribuição: distribuição de amostragem
- Por exemplo, já vimos pelo teorema da aditividade da normal que se $X_1, X_2, \dots, X_n$ têm distribuição $N(\mu, \sigma)$ então a média amostral, $\bar{X}$, isto é, a média duma amostra aleatória, tem distribuição $N(n\mu, \sigma/\sqrt{n})$
- E se X , a população, não tiver distribuição normal, qual será a distribuição da média amostral? Neste caso, distinguem-se dois casos:
 - Se a dimensão da amostra é pequena, na prática $n \leq 30$, então é necessário deduzir a distribuição da média amostral
 - Se a dimensão da amostra é grande, na prática $n > 30$, pelo teorema do limite central temos que

$$\bar{X} \overset{\circ}{\sim} N(\mu, \sigma)$$

- Vamos agora estudar outras distribuições de amostragem que surgem associadas a estatísticas calculadas em populações Normais

Distribuição do Qui-Quadrado

- É uma família de distribuições indexada por um parâmetro, n , que representa o número de graus de liberdade. É uma das distribuições teóricas mais utilizadas na Inferência Estatística (testes de Hipóteses e intervalos de confiança).
- Esta distribuição resulta da soma do quadrado de variáveis normais padrão, pelo que o seu valor será sempre maior (ou igual) a 0.
- A sua importância advém do facto de descrever a distribuição da variância de uma amostra recolhida de uma população Normal.
- Uma variável aleatória X segue uma distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade, escreve-se $X \sim \chi^2_{(n)}$, se a sua função densidade de probabilidade é dada por

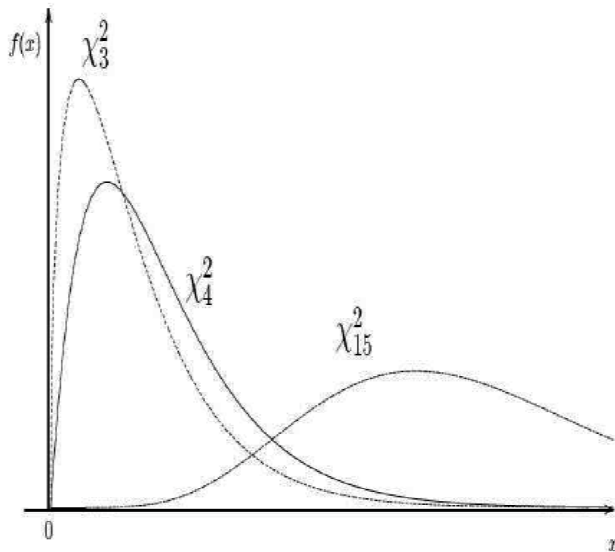
$$f(x) = \frac{e^{\frac{-x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}$$

para $x > 0$ e $n > 0$, onde $\underline{n}$, o nº de graus de liberdade, é o parâmetro caracterizador da distribuição e Γ é a função gama:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$

Distribuição do Qui-Quadrado

- Os parâmetros caracterizadores desta distribuição são n e $2n$ que representam, respectivamente, a média e o desvio padrão da distribuição, ou seja,
 - $E(X) = n$
 - $\text{Var}(X) = n^2$
- A curva da distribuição é assimétrica positiva e varia com o n° de graus de liberdade, que depende, por sua vez, da dimensão da amostra, n .



Quanto maior o n° de graus de liberdade, mais a distribuição do qui-quadrado se aproxima da distribuição normal e portanto maior a tendência para a curva se tornar simétrica.

Distribuição Qui-Quadrado

- Teorema da aditividade da distribuição Qui-Quadrado:

Se $X \sim \chi^2_{(m)}$ e $Y \sim \chi^2_{(n)}$ e, X e Y são variáveis aleatórias independentes, então $X + Y \sim \chi^2_{(m+n)}$.

- Teo 1: Se X_i são n v.a. independentes e normalmente distribuídas com médias μ_i e desvio padrão σ_i , então

$$Z^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

- Teo 2: Se Z tem distribuição normal padrão, então $U = Z^2$ tem distribuição χ^2 com 1 grau de liberdade.
- Teo 3: **Aproximação à distribuição Normal (aplicação do teorema limite central)**
 - Se n é grande (na prática, $n > 30$), a distribuição χ^2 com n graus de liberdade pode ser aproximada à distribuição normal com média n e variância $2n$. Mais precisamente, se X tem distribuição χ^2 com n graus de liberdade, então a distribuição da variável $\frac{X - n}{\sqrt{2n}}$, converge para a distribuição normal padrão quando $n \rightarrow \infty$.
 - Contudo, a convergência é lenta, pelo que é usualmente utilizada a seguinte transformação, que se aproxima à normal mais rapidamente do que X :

$$\sqrt{2X} - \sqrt{2n} \overset{\circ}{\sim} N(0,1)$$

Distribuição t de Student

- É uma família de distribuições indexada por um parâmetro, n , que representa o número de graus de liberdade.
- É frequentemente utilizada em testes de hipóteses e intervalos de confiança quando a variância da população não é conhecida e a dimensão da amostra é pequena ($n < 30$).
- Esta distribuição resulta do quociente entre uma variável normal padrão e a raiz quadrada de uma variável qui-quadrado dividida pelo seu n° de graus de liberdade.
- A distribuição t de Student não é muito diferente da distribuição Normal. Tal como a Normal padrão, a distribuição t de Student é simétrica e tem média 0, contudo o desvio-padrão desta distribuição é maior do que o da normal padrão.

Distribuição t de Student – Definição

- Diz-se que X é uma variável aleatória com distribuição t de Student com n graus de liberdade, e escreve-se $X \sim t_{(n)}$, se a sua função densidade de probabilidade é dada por

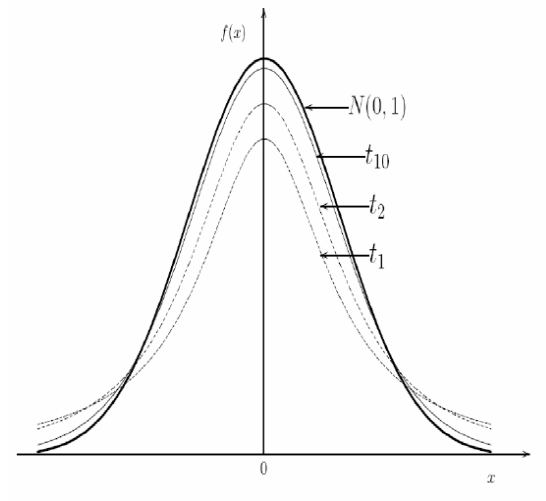
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

em que $-\infty < x < +\infty$ e $n > 0$ e Γ é a função gama.

- Os parâmetros caracterizadores desta distribuição são 0 e $n/(n-2)$ que representam, respectivamente, a média e o desvio padrão da distribuição, ou seja,
- $E(X) = 0$
 - $\text{Var}(X) = n/(n-2)$, para $n > 2$
- **Nota:** A variância é maior que 1, mas tende para 1 quando o nº de graus de liberdade aumenta (a dimensão da amostra aumenta). Logo, a variância desta distribuição aproxima-se da variância da distribuição normal com o aumento da dimensão da amostra ($n \rightarrow \infty$).

Distribuição t de Student

- A distribuição t de Student varia de acordo com a dimensão da amostra que vai determinar o número de graus de liberdade. Quando $n \rightarrow \infty$, a distribuição t de Student tende a ser idêntica à da normal.



Tem a mesma forma em sino da distribuição Normal, mas reflecte a maior variabilidade (mais baixa e com pontas mais altas)

A distribuição t de Student tem valor médio zero (tal como a distribuição Normal standard).

O desvio padrão da distribuição t de Student varia de acordo com o tamanho da amostra e é maior do que 1 (o que não acontece com a distribuição Normal standard, onde $\sigma = 1$).

Distribuição t de Student

➤ Teoremas:

Teo 1: Seja $Z \sim N(0,1)$ e $Y \sim \chi^2_{(n)}$, duas variáveis aleatórias independentes, então

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_{(n)}$$

Teo 2: **Aproximação à distribuição Normal (aplicação do teorema do limite central)**

Se n é grande (na prática, $n > 30$), a distribuição t de Student com n graus de liberdade pode ser aproximada à distribuição normal com média 0 e variância $n/(n-2)$.

Mais precisamente, se X tem distribuição t de Student com n graus de liberdade, então a distribuição da variável

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{n}{n-2}}}$$

converge para a distribuição normal padrão quando $n \rightarrow \infty$.

Distribuição F de Snedecor

- A distribuição de F de Snedecor resulta do quociente entre duas variáveis qui-quadrado
- Como cada qui-quadrado tem associado um certo número de graus de liberdade, a distribuição de F e Snedecor vai ter associados dois números de graus de liberdade.
- É uma das distribuições teóricas usada frequentemente nos testes de variâncias, ou seja quando queremos analisar a razão de duas variâncias.
- Diz-se que X é uma variável aleatória com distribuição F de Snedecor com m e n graus de liberdade, respectivamente, e escreve-se $X \sim F_{(m,n)}$, se a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f_{n,m}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2}) n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{m}{2})} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(m + nx)^{\frac{n+m}{2}}}$$

para $x > 0$ e $m, n > 0$ e Γ é a função gama.

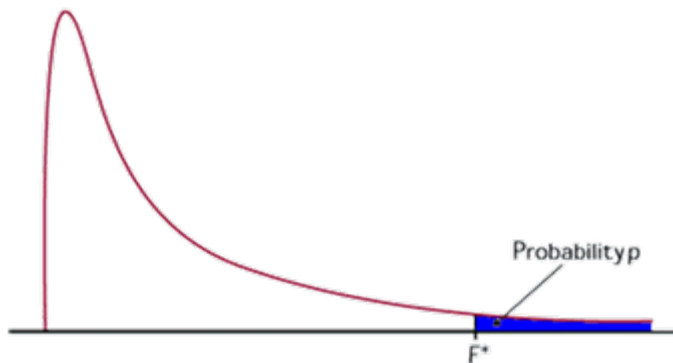
Distribuição F de Snedecor - Definição

- Os parâmetros caracterizadores desta distribuição são

$$E(X) = \frac{n}{n-2} \quad , \text{ para } n > 2$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad , \text{ para } n > 4$$

- A curva da distribuição é assimétrica positiva e depende dos n°s de graus de liberdade, m e n.



Como as variâncias amostrais são não negativas, a estatística F apenas toma valores positivos pelo que a distribuição F não tem probabilidade para valores inferiores a 0. O pico da distribuição é perto de 1.

Distribuição F de Snedecor

➤ Teoremas:

Teo1: Se $X \cap F_{(m,n)}$, então $\frac{1}{X} \cap F_{(n,m)}$

Teo 2: Se $X \cap \chi^2_{(m)}$ e $Y \cap \chi^2_{(n)}$, e X e Y são duas variáveis aleatórias independentes, então

$$F = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}} \cap F_{(m,n)}$$

Teo 3: Se $T \cap t_{(n)}$, então $T^2 \cap F_{(1,n)}$