Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)

- É uma das distribuições teóricas mais utilizadas na Inferência Estatística (Testes de Hipóteses e Intervalos de Confiança).
- Esta distribuição resulta da soma do quadrado de variáveis normais padrão, pelo que o seu valor será sempre maior (ou igual) a 0.
- A sua importância advém do facto de descrever a distribuição da variância de uma amostra recolhida de uma população Normal.

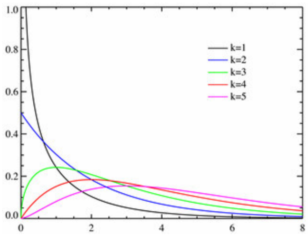
Distribuição χ^2 - Definição

- Seja X uma v.a. com distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade (escreve-se $X \cap \chi^2_{(n)}$).
  A função densidade de probabilidade é dada por $f(x) = \dfrac{e^{\frac{-x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$
  para $x > 0$ e $n > 0$, onde $\boldsymbol{n}$, o nº de graus de liberdade, **é o parâmetro caracterizador da distribuição** e Γ é a função gama.
- A fórmula da função gama é $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$
- O nº de graus de liberdade é o nº de elementos independentes que são usados na estimação de um parâmetro.
- Parâmetros: $E(X) = n$ $\quad$ $\mathrm{Var}(X) = 2n$

Catarina Marques

Distribuição χ^2

- A curva da distribuição é assimétrica positiva e varia com o nº de graus de liberdade, que depende, por sua vez, da dimensão da amostra, n.



Quanto maior o nº de graus de liberdade*, maior a tendência para a curva se tornar simétrica.

- Aditividade da distibuição Qui-Quadrado:
  - Se $X \cap \chi^2_{(m)}$ e $Y \cap \chi^2_{(n)}$ e, X e Y são v.a. independentes, então $X + Y \cap \chi^2_{(m+n)}$.

Catarina Marques

* Neste gráfico o nº de graus de liberdade é denotado por k.

Distribuição χ^2

- **Teoremas:**
- T1: Se X_i são n v.a. independentes e normalmente distribuídas com médias μ_i e desvios-padrão σ_i, então

$$Z^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \cap \chi^2_{(n)}$$

- T2: Em particular, se Z tem distribuição normal padrão, então $U = Z^2$ tem distribuição χ^2 com 1 grau de liberdade.

  T3: **Aproximação à distribuição Normal**
  - Se n é grande (na prática quando $n > 30$), a distribuição χ^2 com n graus de liberdade pode ser aproximada à distribuição normal com média n e variância $2n$. Mais precisamente, se X tem distribuição χ^2 com n graus de liberdade, então a distribuição da variável $\frac{X-n}{\sqrt{2n}}$, converge para a distribuição normal padrão quando n → ∞.
  - Contudo, a convergência é lenta, pelo que é usualmente utilizada a seguinte transformação, que se aproxima à normal mais rapidamente do que X: $\sqrt{2X} - \sqrt{2n} \overset{\circ}{\cap} N(0,1)$

Catarina Marques

Distribuição t de Student

- É frequentemente utilizada em Testes de Hipóteses e Intervalos de Confiança quando a variância da população não é conhecida e a dimensão da amostra é pequena (n<30).
- Esta distribuição resulta do quociente entre uma variável normal padrão e a raiz quadrada de uma variável qui-quadrado dividida pelo seu nº de graus de liberdade.
- A distribuição t de Student não é muito diferente da distribuição Normal. Tal como a Normal padrão, a distribuição t de Student é simétrica e tem média 0, contudo o desvio-padrão desta distribuição é maior do que o da normal padrão.

Distribuição t de Student - Definição

- Seja X uma v.a. com distribuição t de Student com n graus de liberdade (escreve-se $X \cap t_{(n)}$).

  A função densidade de probabilidade é dada por

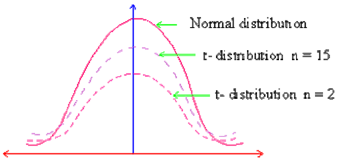
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

  para $-\infty < x < +\infty$ e $n > 0$, onde n, o nº de graus de liberdade, **é o parâmetro caracterizador da distribuição** e Γ é a função gama.

- Parâmetros: $E(X) = 0$ $\quad$ $Var(X) = n / (n-2)$, para $n>2$
  - Nota: A variância é maior que 1, mas tende para 1 quando o nº de graus de liberdade aumenta (a dimensão da amostra aumenta). Logo, a variância desta distribuição aproxima-se da variância da distribuição normal com o aumento da dimensão da amostra (n→∞).

Distribuição t de Student

- A curva da distribuição varia com o nº de graus de liberdade, que depende, por sua vez, da dimensão da amostra, n. Com n → ∞, a distribuição t de Student tende a ser idêntica à da normal.



Note-se que a distribuição t de Student é mais baixa do que a normal na média e mais alta nas caudas.

- **Teoremas:**

T1: Seja Z ∩ N(0,1) e $Y \cap \chi^2_{(n)}$, duas v.a. independentes, então $T = \dfrac{Z}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}} \cap t_{(n)}$

T2: **Aproximação à distribuição Normal**

Se n é grande (na prática, $n > 30$), a distribuição t de Student com n graus de liberdade pode ser aproximada à distribuição normal com média 0 e variância $n/(n-2)$. Mais precisamente, se X tem distribuição t de Student com n graus de liberdade, então a distribuição da variável $\dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{n}{n-2}}}$, converge para a distribuição normal padrão quando n → ∞.

Distribuição F de Snedecor

- É uma das distribuições teóricas usada frequentemente nos testes de variâncias.
- Esta distribuição resulta do quociente entre duas variáveis qui-quadrado, divididas pelos seus respectivos graus de liberdade.

Catarina Marques

Distribuição F de Snedecor - Definição

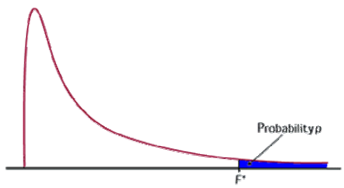
- Seja X uma v.a. com distribuição F de Snedecor com m e n graus de liberdade, respectivamente (escreve-se $X \cap F_{(m,n)}$).
  A função densidade de probabilidade é dada por

$$f_{n,m}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right) n^{n/2}\, m^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \; \frac{x^{n/2-1}}{(m+n\,x)^{(n+m)/2}}$$

  para $x > 0$ e $m,n > 0$, onde ***m, n***, os nºs de graus de liberdade, são **os parâmetros caracterizadores da distribuição** e Γ é a função gama.
- Parâmetros:
  $E(X) = \frac{n}{n-2}$, para $n>2$ Var(X) = $\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$, para $n>4$

Distribuição F de Snedecor

- A curva da distribuição é assimétrica positiva e depende dos nºs de graus de liberdade, m e n.



Como as variâncias amostrais não são negativas, a estatística F toma valores apenas positivos pelo que a distribuição F não tem probabilidade para valores inferiores a 0.
O pico da distribuição é perto de 1.

- **Teoremas:**
  T1: Se $X \cap F_{(m,n)}$, então $\frac{1}{X} \cap F_{(n,m)}$

  T2: Se $X \cap \chi^2_{(m)}$ e $Y \cap \chi^2_{(n)}$, e X e Y são duas v.a. independentes, então $F \equiv \frac{X/m}{Y/n} \cap F_{(m,n)}$

  T3: Se $T \cap t_{(n)}$, então $T^2 \cap F_{(1,m)}$

Exercícios

- 1. Seja $X \cap \chi^2_{(10)}$.
  - a) Determine $p(X \leq 25{,}2)$.
  - b) Determine o valor $\underline{a}$ tal que $p(X \leq a)=0{,}9$.
- 2. Seja $X \cap t_{(12)}$.
  - a) Determine $p(X \leq 2{,}7)$.
  - b) Determine o valor $\underline{a}$ tal que $p(X \geq a)=0{,}05$.
  - c) Qual o valor de $\underline{b}$ tal que $p(X \geq b)=0{,}95$.
- 3. Seja $X \cap F_{(10,5)}$.
  - a) Determine o valor $\underline{a}$ tal que $p(X \leq a)=0{,}95$.
  - b) Determine o valor $\underline{b}$ tal que $p(X \leq b)=0{,}05$.
- 4. Seja $T \cap t_{(15)}$.
  - a) Determine o valor $\underline{a}$ tal que $p(T^2 > a)=0{,}05$.
  - b) Determine o valor $\underline{b}$ tal que $p(T^2 > b)=0{,}99$.

Exercícios

- 5. Seja $X \cap \chi^2_{(15)}$.
  - Determine os valores $\underline{a}$ e $\underline{b}$ tais que $p(a \leq X \leq b)=0{,}95$.
- 6. Para certa v.a. com distribuição χ^2, determinou-se experimentalmente que $p(X \leq 22) \approx 0{,}975$. Quantos graus de liberdade deverá ter a distribuição de X?
- 7. Considere as seguintes v.a. independentes,

  $$X \cap N(0,1),\ Y \cap \chi^2_{(10)},\ W \cap \chi^2_{(5)}.$$

  Determine:
  - a) $p(Y + W > 25)$.
  - b) $p(\frac{X}{\sqrt{Y}} \leq 1{,}41)$.
  - c) $p(Y > 0{,}29\ W)$