Distribuição Exponencial

Exemplos:

1. Quanto tempo irá decorrer até que haja um terramoto numa determinada região?
2. Quanto tempo irá decorrer até que chegue um cliente a uma determinada loja?
3. Quanto tempo irá decorrer até que chegue uma chamada a uma determinada central telefónica?
4. Quanto tempo irá decorrer até que ocorra uma avaria, numa determinada máquina?

Todas as anteriores questões estão relacionadas com o tempo de espera até que ocorra um evento. Mas sendo o tempo de espera uma incógnita então é plausível considerar esse tempo de espera como sendo uma variável aleatória. Mais concretamente, a variável aleatória **X que representa o tempo de espera até que um evento ocorra é uma variável aleatória com distribuição exponencial se a probabilidade que um evento ocorra durante um certo intervalo for proporcional à amplitude desse intervalo, ou seja, no pressuposto que os eventos ocorrem de acordo com um processo de Poisson**.

Desta forma, a distribuição Exponencial está relacionada com a distribuição de Poisson: A distribuição de Poisson é uma distribuição discreta focada na contagem do número de eventos por unidade de tempo. Inversamente, a **distribuição Exponencial é uma distribuição contínua centrada no tempo de espera para que ocorra um determinado evento.**

Exemplo:

Um contraplacado de madeira apresenta uma taxa média de 3 defeitos por m^2.
Então, assumindo que as defeitos se distribuem aleatoriamente pelo contraplacado, a variável aleatória X- o número de defeitos num contraplacado 1 m^2 segue uma distribuição de Poisson , P(λ=3).
Assumindo a mesma taxa média de defeitos por m^2, então Y- a área entre dois defeitos sucessivos será uma variável aleatória contínua e que segue uma distribuição exponencial.
Mas qual o seu parâmetro?
O parâmetro da distribuição será o mesmo da distribuição Poisson, ou seja, λ=3 que é a taxa média de defeitos por m^2.

Definição:

Uma variável aleatória tem distribuição Exponencial de parâmetro λ,

$$Y \cap Exp(\lambda),$$

se a sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(y)= \lambda exp(-\lambda y), \text{ para } y \geq 0.$$

Além disso, a função distribuição é dada por

$$F(y)=1- exp(-\lambda y), \text{ para } y \geq 0.$$

Valor esperado e desvio padrão

Mas qual será o valor esperado de Y, E(Y)?

Voltemos ao exemplo anterior: se o número de defeitos segue uma distribuição de Poisson, com uma taxa média de 3 defeitos por m^2, então irá ocorrer, **em média, um defeito por 1/3 m^2, ou seja, a área entre dois defeitos consecutivos é, em m,édia, de 1/3 m^2, ou seja, $1/\lambda$.**

De facto prova-se que se $Y \cap Exp(\lambda)$ então

$$E(Y)= 1/\lambda.$$

Além disso, $Var(Y)=(1/\lambda)^2$

e $\sigma_Y=1/\lambda$.

Falta de memória:

Note-se que, tal como foi definida, a distribuição exponencial é uma distribuição sem memória: de facto, tendo por base a chegada de eventos num intervalo de tempo que ocorrem segundo um processo de Poisson e, consequentemente, apenas dependentes da amplitude do intervalo e não da sua localização, então o **tempo de espera entre dois eventos consecutivos é independente de ocorrências anteriores**.

Exemplo:

Seja X, a variável aleatória que representa o tempo que medeia entre a chegada de 2 clientes a uma determinada loja. Suponha ainda X segue uma distribuição exponencial e que o tempo médio entre a chegada de 2 clientes é de 1,4 minutos. Qual a probabilidade de chegar um cliente nos 30 segundos que se seguem logo após o início da contagem do tempo?

a) Dado que o tempo médio entre a chegada de 2 clientes é de 1,4 minutos então a taxa média de chegadas por minuto é de 1/1.4, Ou seja, X $\cap$Exp(λ=1/1.4)

O que se pretende saber é a $P(X\leq 0.5)= 1- e^{-0.5/1.4} =0.30$.

b) Suponhamos agora que começamos a contar o tempo e que esperamos 3 minutos sem que nenhum cliente chegue. Qual a probabilidade a probabilidade de nos próximos 30 segundos chegar um cliente?

Neste caso, pretende-se calcular

$P(X\leq 3.5/ x>3) = P(3<X\leq 3.5)/P(X>3)$

$= (F(3.5)-F(3))/(1-F(3)) = 0.0035/0.117 = 0.3$

Concluindo:

Depois de esperar por 3 minutos sem uma chegada, a probabilidade de chegar um cliente nos próximos 30 segundos é a mesma probabilidade de chegar um cliente nos 30 segundos imediatamente após começar a contagem.

Por exemplo, se aplicada a um exemplo respeitante a avarias numa máquina, em termos práticos traduz-se que o tempo de vida da máquina não influencia o tempo que irá decorrer para ocorrer uma avaria.