

Variáveis Aleatórias Discretas Bidimensionais

1. Função de probabilidade conjunta [f(x,y)]

A **função de probabilidade conjunta** para um par de variáveis aleatórias, X e Y, é uma função de probabilidade, f(x,y), que associa a cada elemento de $\mathbb{R}^2$ uma probabilidade.

$$f(x,y) = P[X=x, Y=y]$$

Propriedades

$$\text{i)} \quad 0 \leq f(x,y) \leq 1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ii)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(x_i, y_j) = 1$$

As funções de probabilidade conjuntas para variáveis aleatórias discretas são geralmente apresentadas em tabelas de contingência.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	...	x_n	
y_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_2, y_1)$	...	$f(x_n, y_1)$	
y_2	$f(x_1, y_2)$	$f(x_2, y_2)$	...	$f(x_n, y_2)$	
...	...	...	...	...	
y_k	$f(x_1, y_k)$	$f(x_2, y_k)$	...	$f(x_n, y_k)$	
					$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(x_i, y_j) = 1$

2. Função de probabilidade marginal

Dada uma variável aleatória bidimensional (X,Y) é possível definir duas funções: a **função de probabilidade marginal de X**, $f_X(x)$, e a **função de probabilidade marginal de Y**, $f_Y(y)$, como se segue:

- Função de probabilidade marginal de X, $[f_X(x)]$

$$f_X(x) = P(X = x) = P(X = x, -\infty < Y < +\infty) = \sum_y f(x, y)$$

- Função de probabilidade marginal de Y, $[f_Y(y)]$

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(-\infty < X < +\infty, Y = y) = \sum_x f(x, y)$$

As funções de probabilidade marginais são geralmente apresentadas em tabelas de contingência.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	...	x_n	$f_Y(y_j)$
y_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_2, y_1)$	...	$f(x_n, y_1)$	$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_1)$
y_2	$f(x_1, y_2)$	$f(x_2, y_2)$	...	$f(x_n, y_2)$	$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_2)$
...	...	...	...	...	...
y_k	$f(x_1, y_k)$	$f(x_2, y_k)$		$f(x_n, y_k)$	$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_k)$
$f_X(x_i)$	$\sum_{j=1}^k f(x_1, y_j)$	$\sum_{j=1}^k f(x_2, y_j)$	...	$\sum_{j=1}^k f(x_n, y_j)$	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(x_i, y_j) = 1$

3. Independência

Dado um par de variáveis aleatórias, X e Y, se

$$P(X = x \text{ and } Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

então X e Y são variáveis aleatórias estatisticamente independentes.

Ou seja,

Dada uma variável aleatória bidimensional (X,Y), diz-se que as v. a. unidimensionais que a integram, X e Y, são independentes, se a sua função de probabilidade conjunta, $f(x,y)$, for igual ao produto das funções de probabilidade marginais correspondentes.

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad \forall (x, y)$$

4. Função de distribuição conjunta [F(x,y)]

Dada uma variável aleatória bidimensional (X,Y) discreta, a **função de distribuição conjunta** de (X,Y), $F(x,y)$, será:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

Propriedades

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1$$

$$0 \leq F(x, y) \leq 1, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2), \quad \forall x_2 > x_1, y_2 > y_1$$

5. **Função de distribuição conjunta marginal de X, $[F_X(x)]$**

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{j=1}^k f(x_i, y_j), \quad \forall x \in R$$

6. **Função de distribuição conjunta marginal de Y, $[F_Y(y)]$**

$$F_Y(y) = \sum_{y_j \leq y} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_j), \quad \forall y \in R$$