# Teoria das Probabilidades

## Experiência aleatória

Observação de uma acção cujos resultados não são conhecidos a priori (conhecendo-se no entanto quais as possibilidades)

Características:

- Possibilidade de repetição da experiência em condições similares
- Não se conhece o resultado final, mas conhecem-se quais os resultados possíveis
- Existem regularidades quando a experiência é repetida muitas vezes

# Teoria das Probabilidades

## Espaço de Resultados ($\Omega$)

- É o conjunto de todos os resultados possíveis

  Ex: Quando lançamos um dado, não sabemos que resultado irá sair ao certo, mas sabemos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Se o espaço de resultados for finito ou infinito numerável, diz-se espaço de resultados discreto

  Ex: O caso acima

  Contagem diária do nº de acidentes na A1 → $\Omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ....\}$

- Se o espaço de resultados for infinito não numerável, diz-se espaço de resultados contínuo

  Ex: Num centro telefónico de numa linha de apoio regista-se a hora de chegada das chamadas recebidas. O centro funciona 24h por dia.
  $\Omega = \{X: 0 <= X < 24\}$

# Teoria das Probabilidades

## Acontecimento (A, B, C, …)

- Um acontecimento é um qualquer subconjunto do espaço de resultados ($\Omega$)

  Ex: Lança-se um dado e regista-se o nº saído
  
  Acontecimento:
  - Saída de face par → A={2, 4, 6}
  - Saída de 6 → B = {6} (Acontecimento elementar)
  - Saída de nº inferior a 3 → C={1, 2}
  - Saída de um nº menor ou igual a 6 → D= $\Omega$ (Acontecimento certo)
  - Saída de um 7 → E={}= $\emptyset$ (Acontecimento impossível)

- Só após a realização da experiência poderemos afirmar que certo acontecimento se realizou, ou não. Sendo $\omega$ um resultado, diz-se que A se realizou se $\omega \in A$.

# Teoria das Probabilidades

## Acontecimento

Algo que a experiência aleatória pode produzir, mas não se realiza necessariamente.

Este conceito só tem sentido antes da experiência aleatória se realizar.

## Resultado

Algo que a experiência aleatória produziu.

Este conceito só tem sentido depois de realizada a experiência.

**Nº subconjuntos do Ω:** $2^{\#\,\Omega}$

# Teoria das Probabilidades

## Álgebra de acontecimentos

- União de acontecimentos ($A \cup B$)

  Dados dois acontecimentos A e B, a união dos acontecimentos é ainda um acontecimento, que se realiza sempre que A **ou** B se realizarem (um, outro ou os dois)

- Intersecção de acontecimentos ($A \cap B$)

  Dados dois acontecimentos A e B, a intersecção destes acontecimentos é ainda um acontecimento, que se realiza sempre que A **e** B se realizarem (os dois em simultâneo)

- Diferença de acontecimentos ($A-B$ ou $A \setminus B$)

  Dados dois acontecimentos A e B, a sua diferença $A-B$ é ainda um acontecimento: aquele que se realiza sempre que se realiza A mas não B

# Teoria das Probabilidades

## Álgebra de acontecimentos

- Acontecimento complementar ($A^C$ ou $\overline{A}$ (o contrário de A)

  Dado um acontecimento A, chama-se acontecimento complementar a A ao conjunto de todos os elementos de Ω que não estão em A, pois $A^C = \Omega - A$

- Acontecimentos mutuamente exclusivos

  Os acontecimentos A e B dizem-se mutuamente exclusivos se a realização de um implica a não realização do outro, i.e., a intersecção é um conjunto vazio ($A \cap B = \emptyset$)

- Acontecimentos idênticos (A = B)

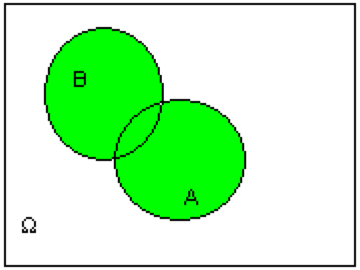
  A e B são acontecimentos idênticos se e só se a realização de um implica a realização do outro

- A é subacontecimento de B (A C B)

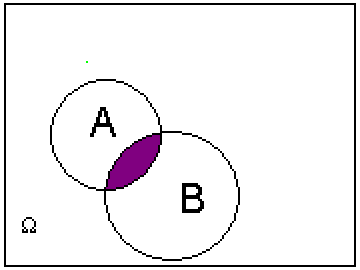
  Diz-se que A é subacontecimento de B se e só se a realização de A implica a realização de B.

# Teoria das Probabilidades

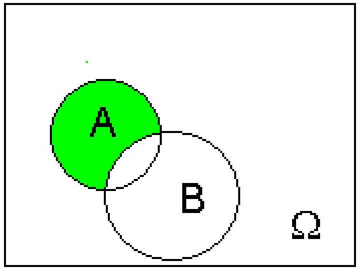
## Álgebra de acontecimentos (em Diagramas de Venn)



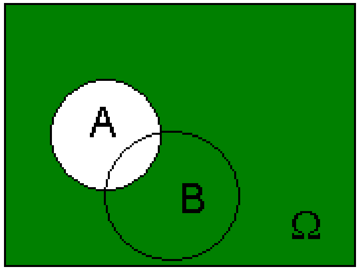

União de
acontecimentos



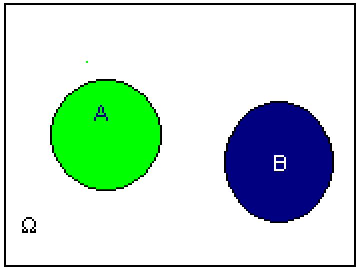

Intersecção de
acontecimentos




Diferença de
acontecimentos




Acontecimento
complementar




Acontecimentos
mutuamente exclusivos

# Teoria das Probabilidades

## Propriedades das operações

- Comutativa

  Sair “2” ou sair “4” é o mesmo que sair “4” ou sair “2”

  $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$

- Associativa

  Sair “2” ou sair (4 ou 6) é o mesmo que sair (2 ou 4) ou sair 6

  $A \cup ( B \cup C ) = ( A \cup B ) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- Distributiva

  Sair 2 e (par ou menor que 4) é o mesmo que sair
  (2 e par) ou (2 e menor que 4)

  $A \cup ( B \cap C ) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

  $A \cap ( B \cup C ) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- Idempotência

  Sair 2 ou 2 é o mesmo que sair 2 $A \cup A = A$

  Sair par e par é o mesmo que sair par $A \cap A = A$

# Teoria das Probabilidades

## Propriedades das operações

- Leis do Complemento

  Sair par ou ímpar é o mesmo que “tudo” $A \cup A^C = \mathbf{\Omega}$

  Sair par e ímpar é o mesmo que “nada” $A \cap A^C = \varnothing$

- Leis de Morgan

  Não sair (2 ou 4) é não sair 2 e não sair 4 $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

  Não sair (2 e 4) é Não sair 2 ou não sair 4 $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

- Elemento neutro

  Sair (2) ou sair (maior que 7) (ou seja, impossível) é sair (2) $A \cup \varnothing = A$

  Sair (2) e sair (menor que 7) (ou seja, certo) é sair (2) $A \cap \mathbf{\Omega} = A$

- Elemento absorvente

  Sair (2) ou sair (menor que 7) (ou seja, certo) é certo $A \cup \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}$

  Sair (2) e sair (maior que 7) (ou seja, impossível) é impossível $A \cap \varnothing = \varnothing$

# Teoria das Probabilidades

## Conceitos de probabilidades

- Conceito clássico de probabilidade (a priori)

  Quociente entre o número de casos favoráveis à realização de certo acontecimento e o número total de casos possíveis, desde que todos os casos sejam igualmente prováveis

- Conceito frequencista de probabilidade (a posterior)

  Se em N realizações de uma experiência, o acontecimento A se realizou n vezes,
  P[A]=fA=n/N

- Conceito subjectivo de probabilidade

  Grau de credibilidade ou de confiança na realização de certo acontecimento expressado pelo agente decisor

# Teoria das Probabilidades

## Axiomas da teoria das probabilidades

1. Para todo o acontecimento A de $\mathbf{\Omega}$, $P[A] \geq 0$

2. Para todo o acontecimento A de $\mathbf{\Omega}$, $P[\mathbf{\Omega}] = 1$

3. Sendo A e B dois acontecimentos tais que $A \cap B = \varnothing$ (e que se designam por mutuamente exclusivos),

$$P[A \cup B] = P[B] + P[A]$$

(geralmente apresentado sob a forma da conjunção de n acontecimentos mutuamente exclusivos)

# Teoria das Probabilidades

## De onde resulta que:

- $P[A^C] = 1 - P[A]$
- $P[\varnothing] = 0$
- $P[A] \leq 1$
- $P[A - B] = P[A] - P[A \cap B]$
- $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

  Este resultado pode ser generalizado para mais acontecimentos.

- Caso particular:

$$
\begin{aligned}
P[A \cup B \cup C] = {} & P[A] + P[B] + P[C] \\
& - P[A \cap B] - P[A \cap C] - P[B \cap C] \\
& + P[A \cap B \cap C]
\end{aligned}
$$

# Teoria das Probabilidades

**Exemplo:**

Numa corrida de cavalos correm 3 cavalos A, B e C, tendo B o dobro da probabilidade de A de ganhar e C o dobro de B. Qual a probabilidade de $B \cup C$?

# Teoria das Probabilidades

## Probabilidades condicionadas ( P[A|B] )

A probabilidade de um acontecimento A condicionada à ocorrência de outro, B (de probabilidade não nula) consiste na restrição do espaço de resultados global, **Ω**, ao sub-espaço B (ou seja, no cálculo da proporção entre a parte de A que é comum a B sobre o total de B). Isto é:

para P[B] > 0

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

# Teoria das Probabilidades

**Axiomas e teoremas (válidos para probabilidades condicionadas)**

Sendo B um acontecimento tal que $P[B] > 0$:

- $P[A|B] \geq 0$
- $P[\Omega|B] = 1$
- $P[(A_1 \cup A_2)|B] = P[A_1|B] + P[A_2|B] - P[A_1 \cap A_2 |B]$

$$P\left[A \cap B \middle| C\right] = \frac{P\left[A \cap B \cap C\right]}{P\left[C\right]}$$

- $P[A \setminus B|C] = P[A|C] - P[A \cap B|C]$
- $P[A \cap B] = P[A] \,.\, P[B|A] = P[B] \,.\, P[A|B]$, com $P[A] > 0$ e $P[B] > 0$

# Teoria das Probabilidades

## Acontecimentos independentes

Dois acontecimentos, A e B, de probabilidade não nula, dizem-se independentes se

$$P[A|B] = P[A] \text{ ou } P[B|A] = P[B]$$

Ou seja, a probabilidade de realização de um não é influenciada pela realização do outro

Como de $P\left[A|B\right] = \dfrac{P\left[A \cap B\right]}{P\left[B\right]}$ se retira que

$$P[A \cap B] = P[A|B] \, . \, P[B]$$

# Teoria das Probabilidades

## Acontecimentos independentes

Então, se A e B forem independentes,

$$P[A \cap B] = P[A] \, . \, P[B]$$

Reciprocamente, se $P[A \cap B] = P[A] \, . \, P[B]$, então os acontecimentos são independentes

Isto significa que, em termos práticos, dois acontecimentos de probabilidade não nula são independentes se e só se a probabilidade da intersecção igualar o produto das respectivas probabilidades.

# Teoria das Probabilidades

## Teoremas (válidos para acontecimentos independentes)

- Se A e B são acontecimentos independentes, então:
  - A e $B^C$ também o são
  - $A^C$ e B também o são
  - $A^C$ e $B^C$ também o são
- Os acontecimentos A, B e C dizem-se independentes se e só se:
  - $P[A \cap B \cap C] = P[A] \cdot P[B] \cdot P[C]$
  - $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$
  - $P[A \cap C] = P[A] \cdot P[C]$
  - $P[B \cap C] = P[B] \cdot P[C]$

# Teoria das Probabilidades

## Acontecimentos independentes vs acontecimentos mutuamente exclusivos

- Sejam A e B dois acontecimentos tais que $P[A] > 0$ e $P[B] > 0$
- Assim, em geral, dois acontecimentos de probabilidade não nula não podem ser simultaneamente independentes e mutuamente exclusivos, já que, sendo independentes,

  $$P[A \cap B] = P[A] \, . \, P[B] > 0$$

  e se fossem mutuamente exclusivos $P[A \cap B] = 0$
- Caso particular: quando um deles for o acontecimento impossível. Este é sempre, por definição, independente e mutuamente exclusivo de todo e qualquer outro acontecimento.

# Teoria das Probabilidades

## Partição em $\Omega$ (Teorema da probabilidade total)

- Definição de partição:

Diz-se que n acontecimentos $A_1, A_2, ..., A_n$ definem uma partição em $\Omega$, quando se verificam em simultâneo as seguintes condições:

i) A união de todos os acontecimentos é o próprio espaço de resultados

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$$

ii) Os acontecimentos são mutuamente exclusivos dois a dois, *i.e.*,

$$Ai \cap Aj = \emptyset \quad , \quad i \neq j, \quad i, j = 1, ..., n$$

iii) Todos os acontecimentos têm probabilidade não nula, *i.e.*,

$$P[Ai] > 0 \text{ , } i = 1, ..., n$$

# Teoria das Probabilidades

## Teorema da probabilidade total

Se $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ definem uma partição sobre Ω, então para qualquer acontecimento B definido nesse espaço tem-se que:

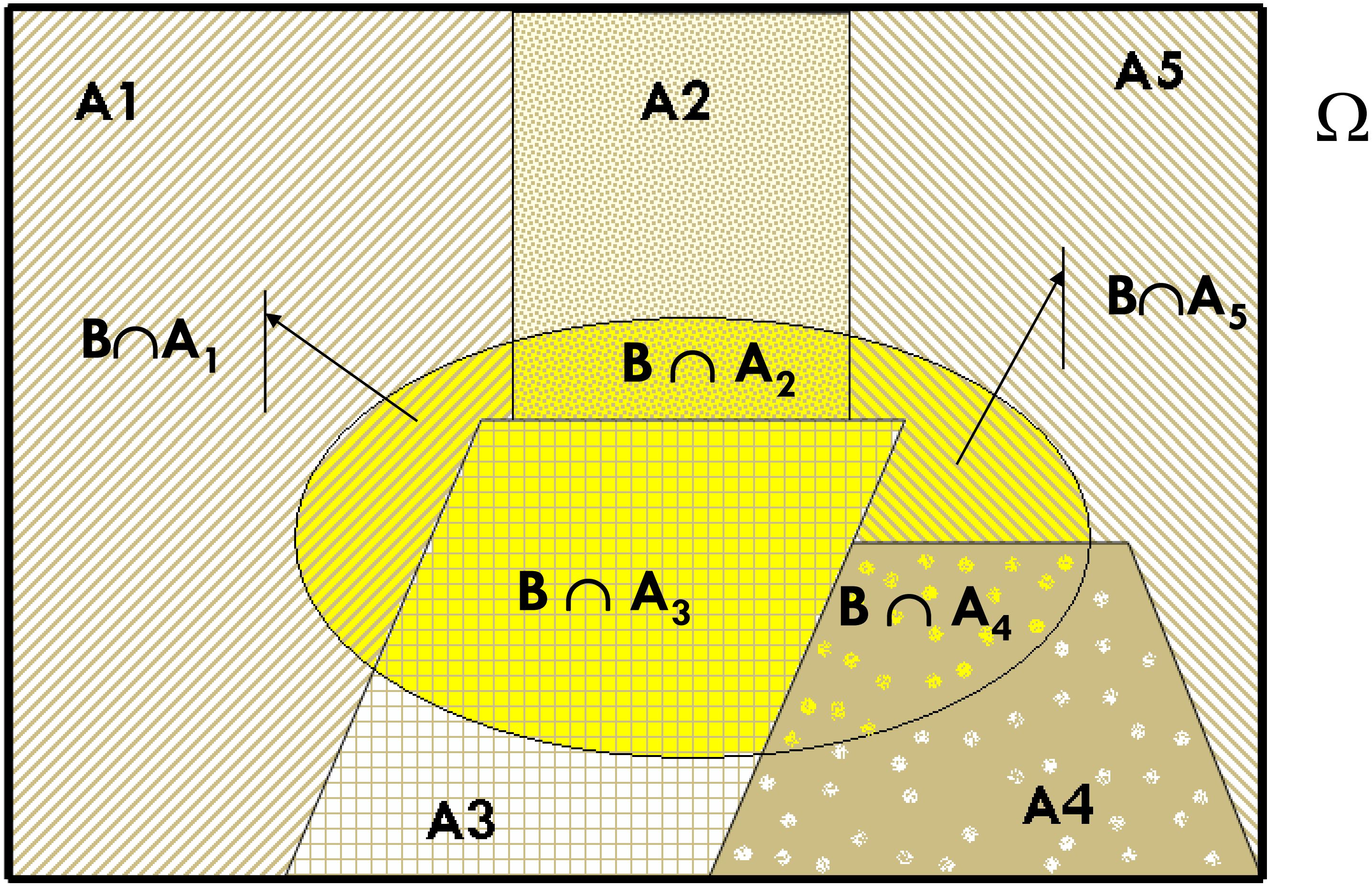
$$P[B] = \sum_{i=1}^{n} P[B|A_i]\ P[A_i]$$

(ou seja,)

$$P[B] = \sum_{i=1}^{n} P[B \cap A_i]$$

# Teoria das Probabilidades

## Teorema da probabilidade total



# Teoria das Probabilidades

## Fórmula de Bayes

Se $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ definem uma partição sobre $\Omega$, então, para qualquer acontecimento B definido nesse espaço, com P[B]>0, tem-se que:

$$P\left[A_j \middle| B\right] = \frac{P\left[A_j\right] P\left[B \middle| A_j\right]}{\sum_{i=1}^{n} P\left[A_i\right] P\left[B \middle| A_i\right]} \quad , \quad \text{para } j = 1, \ldots, n$$