Distribuições Teóricas mais Importantes:

Distribuições Discretas

1. Distribuição Uniforme

Os valores da variável são equiprováveis, ou seja, ocorrem com igual probabilidade.

Ex.: Lançamento de um dado.

A função de probabilidade é: $f(x) = 1/6$ com $x= 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Assim, para qualquer experiência aleatória, $f(x) = 1/ n$, $x= 1, ..., n$

$E[X] = (n + 1)/2$

$Var[X] = (n2 – 1)/12$

Diz-se que X, nestas condições, segue distribuição uniforme discreta em n pontos, e escreve-se $X \sim U(n)$

2. Prova de Bernoulli

Admita-se uma experiência aleatória com apenas dois resultados:

A – sucesso, com $P[A] = p$

$\bar{A}$ – insucesso, com $P[\bar{A}] = 1 – p = q$

A este tipo de experiência aleatória chama--se prova de Bernoulli

3. Sucessão de provas de Bernoulli

Processo caracterizado por repetidas provas nas seguintes condições:

- Em cada prova só existem dois resultados possíveis: sucesso e insucesso
- A probabilidade de sucesso, p, mantém-se constante de prova para prova. A probabilidade de insucesso designa-se por q =1 – p
- As provas são independentes: os resultados obtidos numa certa prova ou sequência de provas não influenciam os resultados das provas subsequentes.

4. Distribuição de Bernoulli

Tem-se uma única prova de Bernoulli e define-se X com apenas dois valores:

0 se insucesso e
1 se sucesso

Tem-se P[X=1] = p e P[X=0] = q = 1 – p, donde a sua função de probabilidade é

$$f(x) = p^x (1 - p)^{1-x} , x = 0, 1$$

Nestas condições, E[X] = p e Var [X] = p (1 – p)

Diz-se então que X tem distribuição de Bernoulli de parâmetro p e escreve-se:

$$X \sim \text{Bern}(p)$$

5. Distribuição Binomial

Utiliza-se para contar, numa sequência de n provas de Bernoulli, o número de sucessos observados.

Definindo o valor 0 se insucesso e 1 quando sucesso.

A função de probabilidade é obtida via a **tabela da distribuição binomial**, sendo n (número de provas a considerar) e p (probabilidade de sucesso) os seus parâmetros caracterizadores.

Na distribuição binomial existem dois parâmetros caracterizadores:

n – número de provas

p – probabilidade de sucesso

Se X tem distribuição binomial, escreve-se $X \sim bi(n,p)$

A distribuição dos sucessos é "em espelho" com a dos insucessos, ou seja,
se $X \sim bi(n,p)$ e $Y \sim bi(n,1-p)$, então: $P[X = x] = P[Y = n-x]$

Valor esperado $E[X] = n\,p$

Variância $Var[X] = n\,p\,q$

A distribuição binomial goza da **propriedade da aditividade**:

Sejam $X_1, X_2, ..., X_k$ k variáveis aleatórias independentes tais que
$Xj \sim bi(nj ; p)$. Então, a sua soma distribui-se binomialmente, sendo

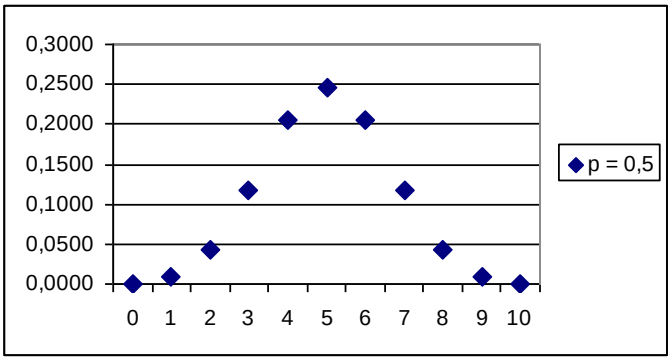
$$\sum_{j=1}^{k} X_j \sim bi\left(n = \sum_{j=1}^{k} n_j ; p\right)$$

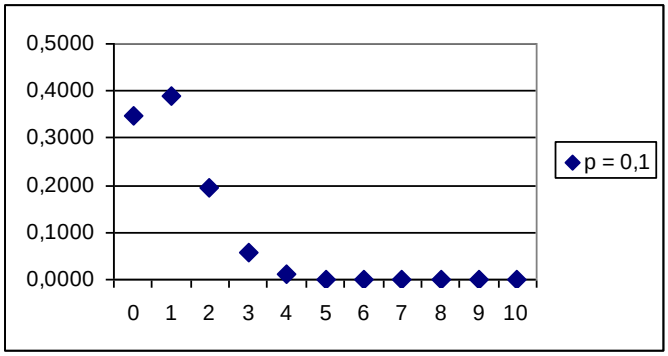
A reter:

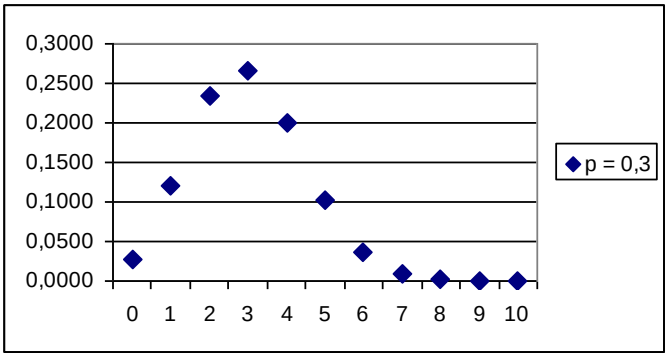
- Quando p=0,5 a distribuição é simétrica
- Quando p < 0,5 a distribuição é assimétrica positiva ou enviesada à esquerda
- Quando p > 0,5 a distribuição é assimétrica negativa ou enviesada à direita
- Para qualquer p, a distribuição tende a se apresentar quase simétrica quando n aumenta

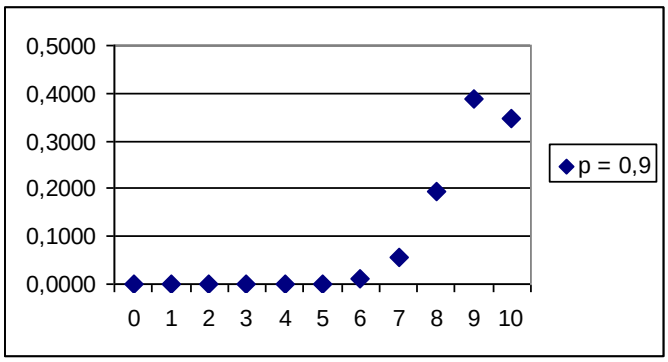
Aspectos da distribuição binomial:

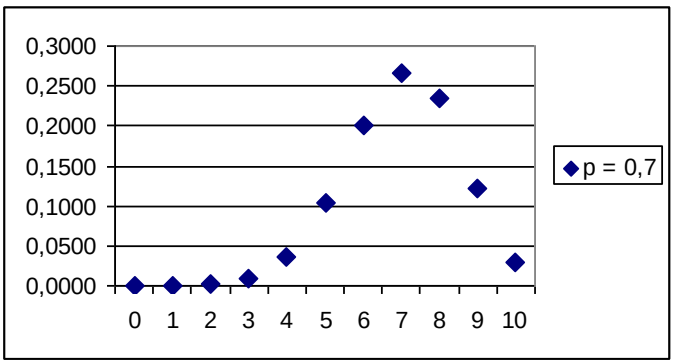
Para diferentes valores de p (sendo n=10)



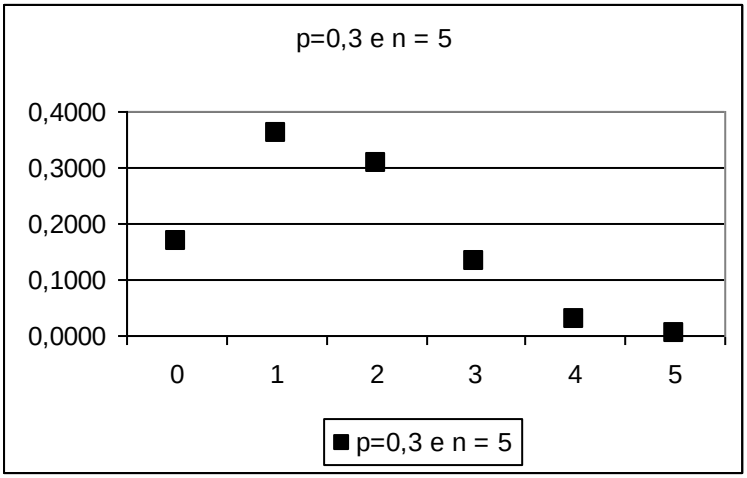


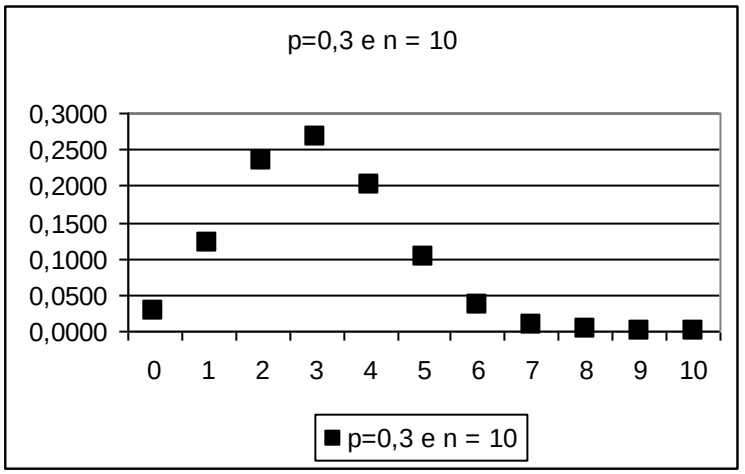


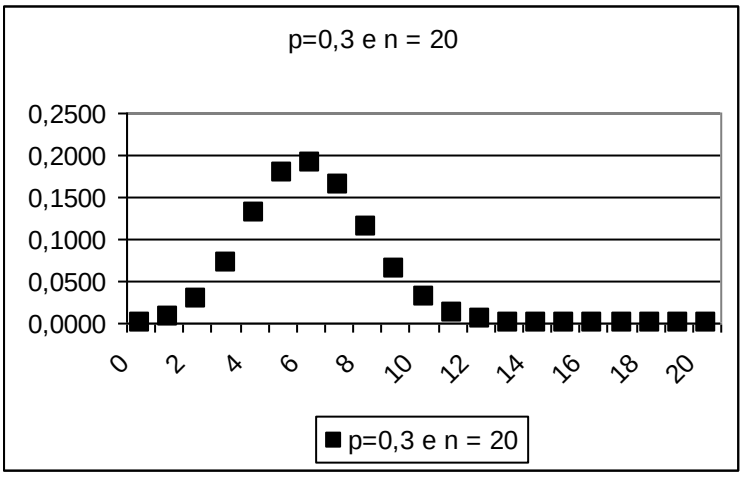


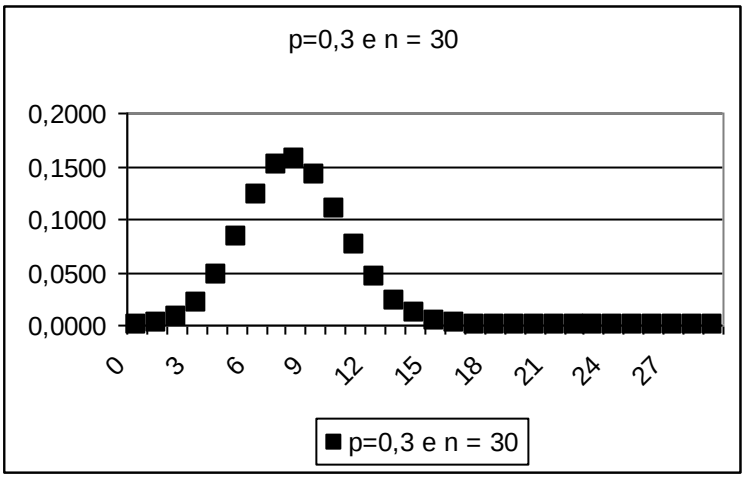


Binomial p=0,3, vários valores de n









6. Distribuição de Poisson

Admita-se a existência de um acontecimento que se observa num certo espaço contínuo (intervalo de tempo, comprimento, área, região, etc) tal que:

- O número de ocorrências em intervalos não sobrepostos são variáveis aleatórias independentes
- A probabilidade de ocorrência depende apenas da dimensão do intervalo
- Quando o intervalo tem amplitude infinitesimal, a probabilidade de duas ou mais ocorrências é negligenciável, quando comparada com a probabilidade de se verificar apenas uma ocorrência

Tal fenómeno pode ser descrito através de uma distribuição de Poisson

Ter-se-á $X \sim P(\lambda)$, onde $\lambda > 0$ é o parâmetro caracterizador da distribuição e x=0, 1, 2, ...

Tem-se:

$E[X] = \lambda$

$Var[X] = \lambda$

A função de probabilidade é obtida via a **tabela da distribuição de Poisson**.

Propriedades:

- Se $X_1, X_2, ..., X_k$ são k variáveis aleatórias Poisson independentes tais que

  $Xi \sim P(\lambda_i)$, então:

$$S = \sum_{i=1}^{k} X_k \sim P\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_k \right)$$

- Se $X_1, X_2, ..., X_k$ são k variáveis aleatórias e $\sum Xi \sim P(\lambda)$, então cada uma das parcelas tem também distribuição de Poisson

- A intervalos proporcionais corresponderão parâmetros igualmente proporcionais.

Aproximação da distribuição Binomial à distribuição de Poisson

- A distribuição binomial converge para a distribuição de Poisson quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, mantendo-se np constante

- Nestas condições, tem-se que,

  se $X \sim bi(n;p)$, então $X \overset{a}{\sim} P(\lambda = np)$