

GRUPO I

- Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo seleciona a **única** opção correta.
- Escreve na tua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** que identifica a única opção escolhida.
- **Não apresentes cálculos nem justificações.**

1. $\lim \left(\frac{n^2 + n + 1}{1 + 2 + 3 + \dots + n} \right)$ é igual a:

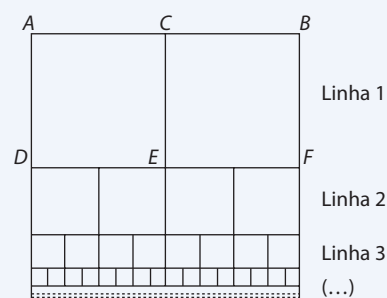
(A) 0

(B) 2

(C) $\frac{1}{2}$ (D) $+\infty$

2. A partir de um segmento de reta $[AB]$, com $\overline{AB} = 10$ cm, constroem-se dois quadrados geometricamente iguais, $[ACED]$ e $[CBFE]$, obtendo-se a linha 1 de quadrados. Repete-se o processo, sucessivamente, de modo a obter novas linhas de quadrados como sugere a figura.

Considera que, de cada linha para a seguinte, o número de quadrados duplica e o comprimento de lado de cada quadrado diminui para metade. Considera também que se podem obter tantas linhas de quadrados quantas se queira. Nestas condições, qual é a área, com aproximação às unidades, ocupada por todos os quadrados das primeiras seis linhas?

(A) 100 cm^2 (B) 98 cm^2 (C) 95 cm^2 (D) 93 cm^2

3. De uma progressão aritmética (a_n) sabe-se que $a_1 = 2$, $a_{2015} - a_{2016} = 3$ e que a soma dos n primeiros termos é $-14\,650$. O valor de n é:

(A) 200

(B) 100

(C) 50

(D) 25

4. Considera uma sucessão (u_n) , monótona crescente, da qual se sabe que $u_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Considera as seguintes afirmações:

I. $\exists m, M \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$

II. Existe um número real a tal que $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon \in \mathbb{N}: n > \varepsilon \Rightarrow |u_n - a| < \delta$

Podemos concluir que:

(A) são ambas verdadeiras.

(B) são ambas falsas.

(C) apenas I. é verdadeira.

(D) apenas II. é verdadeira.

5. O valor de $\lim \left(\frac{5n+2}{5n} \right)^{3n}$ é:

(A) $e^{\frac{1}{5}}$ (B) $e^{\frac{2}{5}}$ (C) $\sqrt[5]{e^3}$ (D) $e^{\sqrt[5]{e}}$

Teste 6

GRUPO II

- Nas respostas aos itens deste grupo apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considera a sucessão (u_n) definida por $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3^n} + u_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$

1.1. Determina os quatro primeiros termos da sucessão (u_n) .

1.2. Estuda a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

1.3. Prova, por indução matemática, que $u_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$.

2. Mostra, utilizando dois processos diferentes, que a soma dos n primeiros números ímpares pode ser dada por n^2 .

Sugestão: Num dos processos podes utilizar o facto de a sucessão dos números ímpares ser uma progressão aritmética e no outro processo utiliza o método de indução matemática.

3. Considera a seguinte figura constituída por uma sequência de semicircunferências.



Sabe-se que a primeira semicircunferência tem 2 m de raio e que o raio de cada uma das seguintes é 3 vezes menor do que o raio da anterior.

Considera que se podem construir tantas semicircunferências quantas se queira nestas condições.

3.1. Determina o perímetro da quinta semicircunferência.

3.2. Mostra que o comprimento da linha assim construída, em função do número n de semicircunferências, pode ser dado, em metros, por P_n , onde $P_n = 3\pi - \frac{\pi}{3^{n-1}}$.

3.3. Determina $\lim P_n$.

4. Prova, pelo método de indução matemática, que:

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

FIM

GRUPO I

- Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleciona a **única** opção correta.
- Escreve, na folha de respostas, o **número** do item e a **letra** que identifica a única opção escolhida.
- **Não apresentes cálculos nem justificações.**

1. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	a	b	b	c

Sabe-se que a, b e c são números reais, $P(X > 2) = \frac{3}{5}$ e que o valor médio da variável aleatória X é 3,65. Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

- (A) $P(X < 3) = P(X > 3)$ (B) $P(X \leq 3) = P(X > 3)$
 (C) $P(X = 2) = P(X = 5)$ (D) $P(X \leq 4) = P(X = 5)$
2. As classificações obtidas a nível nacional no exame de Matemática em 2013, numa escala de 0 a 20, seguem uma distribuição normal de valor médio 12 e desvio-padrão 2. Num curso de uma determinada universidade exige-se a realização do exame de Matemática e a nota mínima de 14 valores. O Pedro realizou exame de Matemática em 2013 e conseguiu ser admitido nesse curso dessa universidade. Qual é a probabilidade, com aproximação às centésimas, de ter obtido uma classificação inferior a 16 valores?

- (A) 0,86 (B) 0,98 (C) 0,16 (D) 0,14

3. ${}^{2009}C_{300} + 3 \times {}^{2009}C_{301} + 3 \times {}^{2009}C_{302} + {}^{2009}C_{303}$ é igual a:

- (A) ${}^{2012}C_{302}$ (B) ${}^{2012}C_{303}$ (C) ${}^{2013}C_{302}$ (D) ${}^{2013}C_{303}$

4. De uma função f sabe-se que a bissetriz dos quadrantes pares é uma assíntota do seu gráfico.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \ln x + f(x)}{x}$?

- (A) 0 (B) $-\infty$ (C) $+\infty$ (D) -1

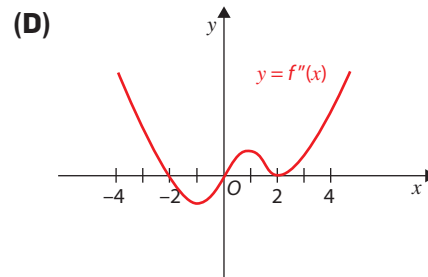
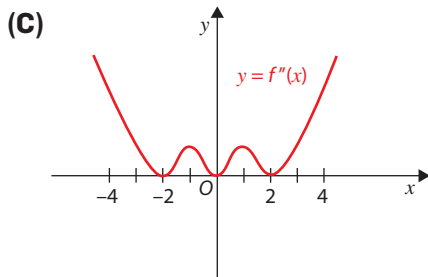
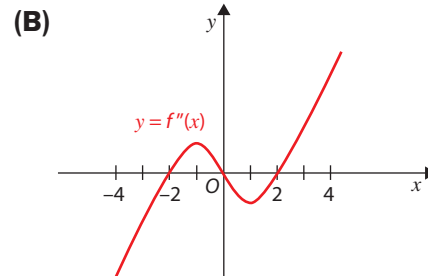
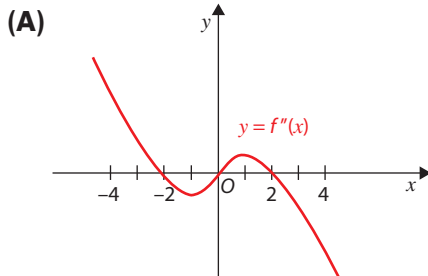
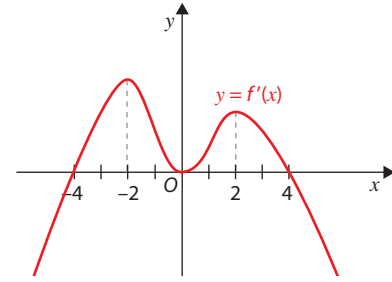
5. Considera a função real de variável real definida por $g(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1} - 1}{2x - 2} & \text{se } x < 1 \\ e^x + \ln x + k & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

Para um certo valor de k , o Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos uma solução da equação $g(x) = 4$ no intervalo $[0, 2]$. Qual é o valor de k ?

- (A) 0 (B) $1 - e$ (C) $\frac{1}{2} - e$ (D) 1

6. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico de f' , primeira derivada de uma função f , de domínio $\mathbb{R}$.

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função f'' , segunda derivada da função f ?



7. Os números complexos $-4i$ e $-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ são duas raízes consecutivas de índice n de um número complexo z . Qual é o valor de n ?

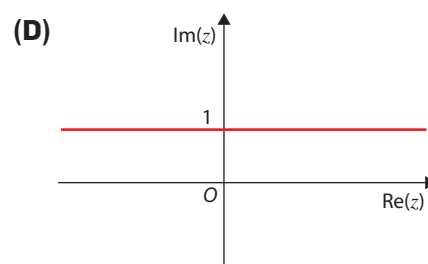
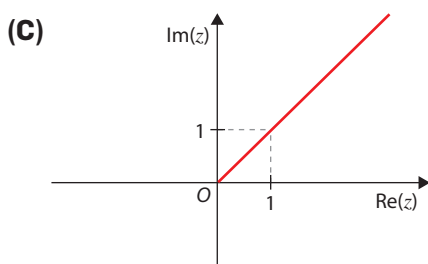
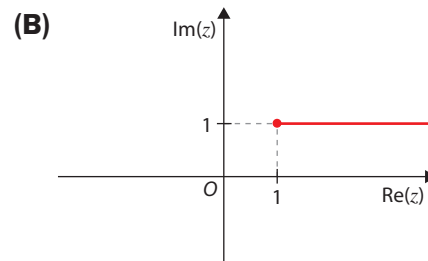
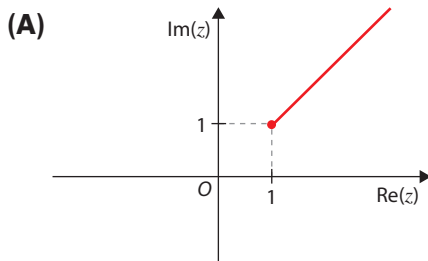
(A) 2

(B) 4

(C) 6

(D) 8

8. Em qual das figuras seguintes está representado o conjunto das imagens geométricas dos números complexos z que satisfazem a condição $2z - 2(\bar{z}) = 4i \wedge 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{4}$?



GRUPO II

- Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado não é pedida a aproximação, apresenta sempre o **valor exato**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

1.1. Considera $z_1 = (1 - i)^3$ e $z_2 = \frac{-1 + i^5 + i^{53} + 3i^{34}}{1 + 2i}$.

Resolve a equação $z^3 - z_2 = -6 + z_1$, sem recorrer à calculadora.

Apresenta as soluções da equação na forma algébrica.

1.2. Prova que se $|z| = |w| = 1$ e $1 + zw \neq 0$, então $\frac{z + w}{1 + zw}$ é real.

2. Considera uma empresa em que:

- 80% dos funcionários fala inglês;
- dos funcionários que falam inglês, 25% fala espanhol;
- 5% dos funcionários não fala inglês nem espanhol.

- 2.1. Escolhe-se, ao acaso, um funcionário que não fala espanhol. Qual é a probabilidade de ele falar inglês?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

- 2.2. Considera agora que essa empresa tem 50 funcionários. Escolhem-se, ao acaso, oito funcionários.

Determina a probabilidade de pelo menos sete desses funcionários falarem inglês.

Apresenta o resultado com arredondamento às centésimas.

3. Prova, pelo método de indução matemática, que:

$$1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n - 1) = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}, \forall n \in \mathbb{N}$$

4. De uma função f sabe-se que é contínua, estritamente decrescente, tem domínio $[-3, 1]$, $f(-3) = 2$ e $f(1) = -5$. Seja g a função definida por $g(x) = \frac{1}{f(x)} + k$, em que k é uma constante. Prova que o gráfico da função g tem uma única assintota.

5. Num determinado instante $t = 0$, um veterinário decide injetar uma substância no sangue de um animal. No instante t , com $t > 0$ em minutos, a concentração C da substância injetada é dada por $C(t) = 10(e^{-t} - e^{-2t})$.

Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, resolve as alíneas seguintes.

- 5.1. Calcula, com aproximação às décimas, os instantes nos quais o valor da concentração é 0,5.

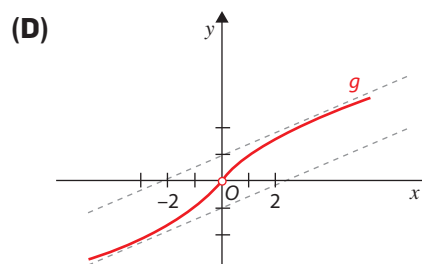
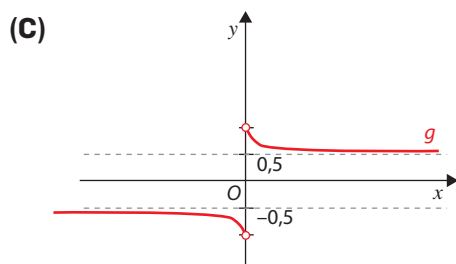
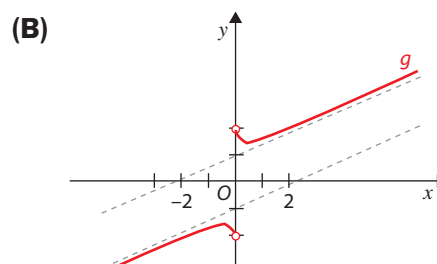
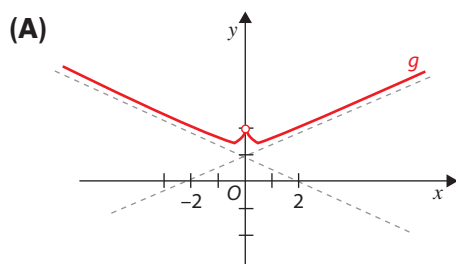
- 5.2. Sabe-se que a administração dessa substância ao animal só trará benefícios se a concentração atingir o seu máximo em menos de 1 minuto.

Averigua se, de acordo com este modelo, tal se verifica e qual é a concentração máxima atingida.

6. Considera, num referencial o.n. xOy , o gráfico de uma função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sabe-se que:

- g é uma função ímpar;
- o gráfico de g tem duas assíntotas não verticais;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$
- a segunda derivada, g'' , da função g é tal que $g''(x) > 0$ para $x > 0$.

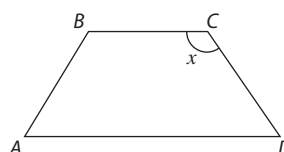
Apenas uma das opções seguintes pode representar uma parte do gráfico da função g .



Elabora uma composição na qual:

- indiques a opção que pode representar g ;
- apresentes três razões para rejeitar as restantes opções, uma por cada opção rejeitada.

7. Uma fábrica produz peças metálicas, com a forma de trapézio, em que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 3$ cm.



Seja x a medida da amplitude (em radianos) do ângulo BCD $\left(x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]\right)$.

- 7.1. Prova que a área $A(x)$ do trapézio é dada, em cm^2 , por:

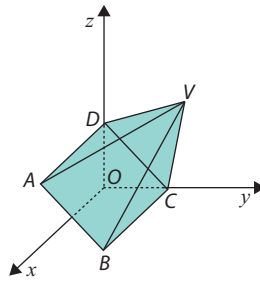
$$A(x) = 9 \sin x - 4,5 \sin(2x)$$

- 7.2. Recorre à calculadora para determinar graficamente a solução da equação que permite resolver o problema seguinte.

Qual terá de ser a amplitude, em radianos, do ângulo BCD , para que a peça tenha 3 cm^2 de área?

Apresenta todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s). Apresenta o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

8. Na figura está representada, em referencial o. n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular de vértice V e base $[ABCD]$. Considera ainda o ponto E como sendo o centro da base da pirâmide.



Sabe-se que as coordenadas dos pontos C e D são $(0, 3, 0)$ e $(0, 0, 3)$, respectivamente, e que a reta BC é paralela ao eixo Ox .

- 8.1.** Determina equações cartesianas da reta AB e uma equação vetorial da reta EV .
- 8.2.** Sabendo que a altura da pirâmide mede $3\sqrt{2}$, escreve uma equação da superfície esférica de centro em V que passa no ponto E .

FIM

Grupo II

1.

1.1. $|z + 2| \leq 3 \wedge \left(0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \vee \frac{5\pi}{6} \leq \arg z \leq \pi \right)$

1.2. $z_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

3.

3.1. $\frac{15}{31}$

3.2. Esta escola tem 150 alunos de 12.º ano, dos quais que 60% são raparigas. Então, existem 90 raparigas das quais se pretende escolher cinco para organizar as atividades no destino de viagem escolhido. Assim, a resposta I é uma resposta correta ao problema pois ${}^{90}C_5$ é o número de maneiras diferentes de constituir o grupo com cinco raparigas, escolhidas de entre as 90 existentes. Existem ${}^{88}C_4$ grupos que não podem ser formados pois têm a Ana e não têm a Bárbara (de acordo com o enunciado, a Ana só aceita fazer parte do grupo se a Bárbara fizer). Então, subtrai-se este número de conjuntos ao número total, obtendo assim o número de grupos que satisfazem as condições pretendidas.

Na resposta II, ${}^{88}C_5$ é o número de grupos que podem ser formados sem a Ana e sem a Bárbara, pois são escolhidas cinco raparigas de entre as 88 que não são a Ana nem a Bárbara. Existem ${}^{88}C_3$ grupos que se podem constituir com a Ana e com a Bárbara pois, além destas raparigas, são escolhidas outras três de entre as restantes 88 para fazer um grupo com um total de cinco.

Finalmente, para satisfazer as condições pretendidas, podem ainda ser formados grupos sem a Ana, mas com a Bárbara. ${}^{88}C_4$ é o número de grupos nessa situação, já que, com a Bárbara no grupo, apenas é necessário escolher outras quatro raparigas, de entre as 88 possíveis, pois como a Bárbara já faz parte e a Ana não pode fazer, os elementos são escolhidos de entre $90 - 2 = 88$ raparigas. Assim, ${}^{88}C_5 + {}^{88}C_3 + {}^{88}C_4$ é o número de grupos que podem ser formados, sabendo que a Ana só aceita fazer parte do grupo se a Bárbara também fizer.

5.

5.1. $x = -3$ e $y = x + 1$

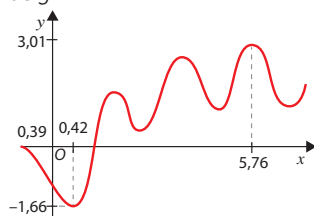
5.2. f é crescente nos intervalos $]-\infty, -3[$ e $]-3, +\infty[$. f não tem extremos.

6. Para ser contínua em todo seu domínio, g tem de ser contínua em $x = 0$. No entanto, verifica-se que, qualquer que seja o número real k , $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \frac{1}{2}$ será sempre diferente de $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$.

7.

7.1. O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[-\frac{5\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}\right]$ e tem concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$. Os pontos de abscissa $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$ são pontos de inflexão do gráfico de g .

7.3.



$$\begin{cases} a \times 3,01 + b = 2 \\ a \times (-1,66) + b = -1 \end{cases}$$

$$a \approx 0,64 \text{ e } b \approx 0,07$$

8. Reta BD: $(x, y, z) = (0, 5, 0) + k(0, 0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$
Plano ABD: $x + 2y - 10 = 0$

Prova-modelo 2 – página 392

Grupo I

1. (D) 2. (A) 3. (B) 4. (C) 5. (C)

6. (A) 7. (D) 8. (B)

Grupo II

1.

1.1. C.S. = $\{1 + \sqrt{3}i, -2, 1 - \sqrt{3}i\}$

2.

2.1. $\frac{12}{13}$

2.2. 0,49

5.

5.1. $t \approx 0,1$ e $t \approx 2,9$

5.2. De acordo com este modelo a concentração máxima é 2,5 e é atingida em, aproximadamente, 42 segundos, ou seja, em menos de um minuto.

6. A opção I não pode representar o gráfico da função g , pois g é uma função ímpar, ou seja, o gráfico de g tem que ser simétrico em relação à origem do referencial. Nesta opção está representada uma função par, isto é, um gráfico simétrico em relação ao eixo Oy .

A opção III também não pode representar o gráfico da função g , pois g tem duas assíntotas não verticais de declive $\frac{1}{2}$ (dado que g é ímpar e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$),

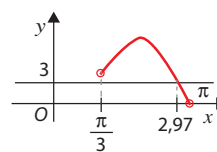
ou seja, as duas assíntotas não verticais têm que ser oblíquas e não horizontais.

A opção IV não pode representar o gráfico da função g pois, nesta opção, para $x > 0$ o gráfico da função apresenta a concavidade voltada para baixo. Como se sabe que $g''(x) > 0$ para $x > 0$, o gráfico de g terá que apresentar a concavidade voltada para cima quando $x > 0$.

Assim, a única opção que pode representar o gráfico da função g é a opção II.

7.

7.2.



$$x \approx 2,97$$

8.

8.1. Reta AB: $x = 3 \wedge \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-3}$

$$\text{Reta EV: } (x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + k(0, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

8.2. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = 18$