Prova-Modelo de Matemática

PROVA 4 | **5 Páginas** | **Ensino Secundário**

DURAÇÃO DA PROVA: 120 minutos | **TOLERÂNCIA:** 30 minutos

Cotações

GRUPO I

1 O quarto número de uma certa linha do triângulo de Pascal é 4060. 5

A soma dos quatro primeiros números dessa linha é 4526.

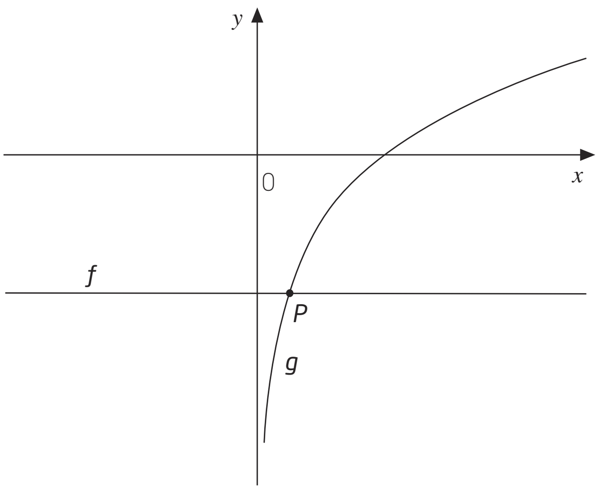
Qual é o maior termo dessa linha?

(A) ${}^{31}C_{15}$ **(B)** ${}^{30}C_{15}$ **(C)** ${}^{30}C_{16}$ **(D)** ${}^{31}C_{16}$

2 Os três primeiros coeficientes do desenvolvimento de $\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^n$ estão em progressão aritmética. O valor de n é: 5

(A) 12 **(B)** 10 **(C)** 8 **(D)** 4

3 Na figura estão representadas graficamente duas funções, f e g, definidas por $f(x) = \log_3\left(\frac{1}{9}\right)$ e $g(x) = \log_2 x$. 5



Os gráficos de f e de g intersetam-se no ponto P. Qual é a abcissa do ponto P?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{2}{9}$ **(C)** ln 3 **(D)** ln 2

4 Considere a função f definida por $f(x) = \text{sen}(x^2) - \cos^3(x)$. 5

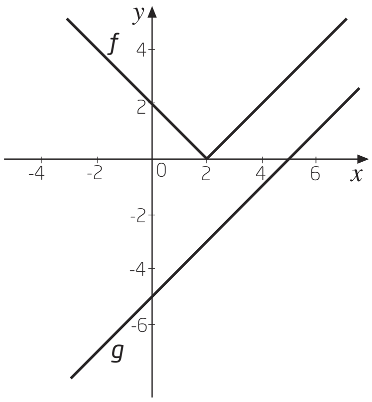
Indique qual das expressões seguintes define f', função derivada de f.

(A) $2x\cos(x^2) + 3x^2\text{sen}^3 x$ **(B)** $2x\cos(x^2) + 3\cos^2 x\ \text{sen} x$

(C) $\cos(x^2) + \text{sen}^3 x$ **(D)** $2\cos(x^2) - 3\cos^2 x$

5 Na figura estão representadas partes dos gráficos de duas funções *f* e *g*, ambas de domínio $\mathbb{R}$, que têm apenas um zero cada, respetivamente 2 e 5. 5

A função *f* está definida pela expressão $f(x) = |h(x)|$ onde *h* é, tal como *g*, uma função afim.

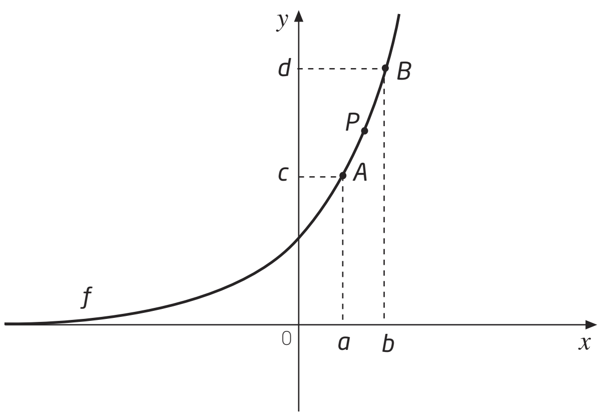


Qual dos seguintes intervalos é um subconjunto de D_{f+g}, tal que a função $f+g$ é uma função injetiva?

(A) $]-3, 1[$ **(B)** $]-3, 3[$ **(C)** $]0, 4[$ **(D)** $]-4, 4[$

6 Seja *a* um número real superior a 1. Na figura está parte do gráfico de uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$. 5

Tal como a figura sugere, os pontos *A* e *B* pertencem ao gráfico de *f*.



Qual é a ordenada do ponto *P*, pertencente ao gráfico de *f*, cuja abcissa é o ponto médio das abcissas de *A* e *B*?

(A) $\sqrt{c+d}$ **(B)** $(cd)^2$ **(C)** $\sqrt{cd}$ **(D)** cd

7 Seja *n* um número natural. 5

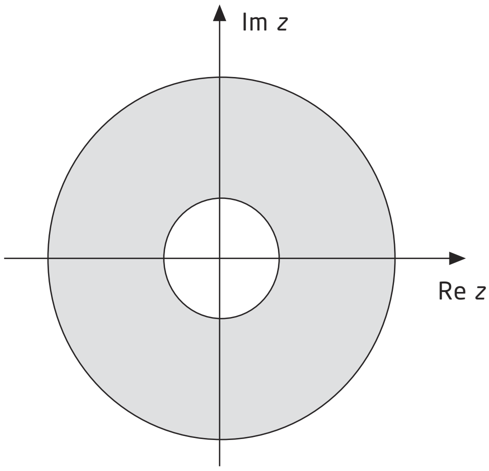
O valor de i^{12n+3}, sendo *i* a unidade imaginária, é:

(A) i **(B)** -1 **(C)** $-i$ **(D)** Depende do valor de *n*

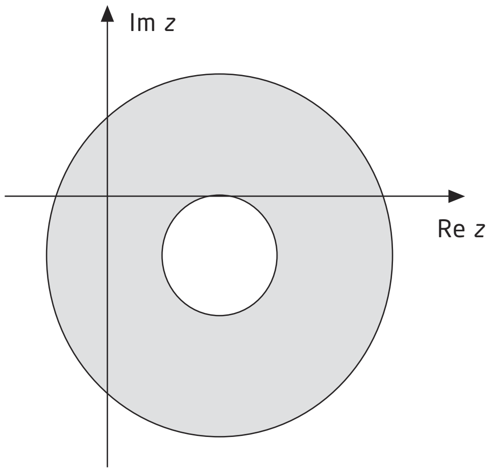
8 Considere a imagem geométrica, no plano complexo, do conjunto $\{z : 1 \leq |z| \leq 3\}$. 5

Qual é a representação geométrica do conjunto $\{w : w = zi + 2 - i\}$?

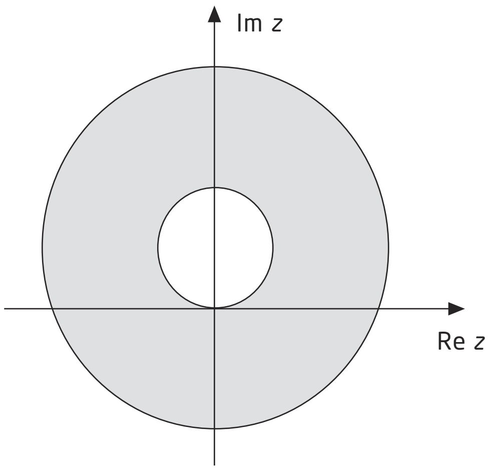
(A)



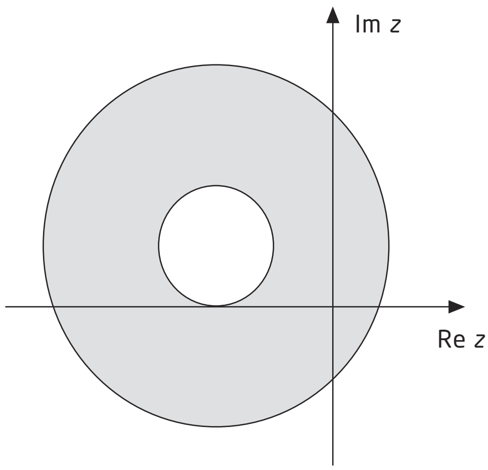
(B)



(C)



(D)



GRUPO II

1 Considere o número complexo: 30

$$z = i^{32} + \frac{\sqrt{3}(1-2i)}{2+i}$$

1.1 Represente z na forma algébrica e na forma trigonométrica. (15)

1.2 Sabendo que z é uma das raízes de índice quatro de um número complexo w, determine, sem calcular w, as restantes raízes de w e represente-as graficamente. (15)

Cotações

2 Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A, B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$, $B \subset S$). 35

2.1 Prove que se $P(B) \neq 0$, então $P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$. (15)

2.2 O João contraiu uma infeção e o médico prescreveu-lhe um fármaco que tinha 60% de probabilidades de o curar em menos de uma semana, caso o João o tomasse durante cinco dias. (20)

No entanto, o João é muito esquecido e tem 20% de probabilidades de não tomar o fármaco em todos os dias recomendados. Se o João não tomar o fármaco nos cinco dias recomendados, a probabilidade de recuperar em menos de uma semana é 10%.

Ao fim de uma semana o João ainda não recuperou. Qual é a probabilidade de o João se ter esquecido de tomar o fármaco em todos os dias recomendados pelo médico?

Nota: Se desejar, utilize a igualdade referida na alínea anterior.

3 A carga de um condensador (dispositivo que possui a capacidade de armazenar cargas elétricas) é dada em função do tempo, t, medido em segundos, pela expressão 28

$$Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

onde τ é uma constante positiva (constante de tempo) e Q_0 é a capacidade máxima da carga.

3.1 Determine o valor de $\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t)$ e interprete o seu significado no contexto do problema. (7)

3.2 Mostre que $t = \ln\left(\dfrac{Q_0}{Q_0 - Q(t)}\right)^{\tau}$. (7)

3.3 Considere a constante de tempo igual a 2 e determine quanto tempo leva o condensador a carregar 50% da sua capacidade máxima. (7)

Apresente o resultado arredondado às décimas.

3.4 Explique a razão pela qual, em termos práticos, se considera que um condensador está carregado quando o tempo de carregamento é igual a cinco vezes a constante de tempo. (7)

4 Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por: 30

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \dfrac{2x}{e^{4x} - 1} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

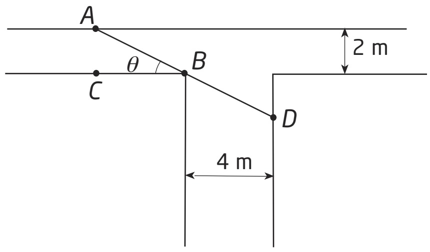
Sem usar a calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

4.1 Estude a função f quanto à sua continuidade. (10)

4.2 Justifique que a função f tem pelo menos um zero no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. (10)

4.3 Calcule o zero cuja existência garantiu na alínea anterior e determine a equação da reta tangente ao gráfico de f nesse ponto. (10)

5 Um corredor com dois metros de largura interseta-se perpendicularmente com outro, de quatro metros de largura, tal como a figura sugere. Pretende-se transportar horizontalmente uma escada, representada na figura pelo segmento de reta *AD*, pelos dois corredores. 20



Qual é o comprimento máximo da escada que se pode transportar?

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Sugestão: comece por mostrar que o comprimento da escada é dado, em função de θ, pela expressão $\frac{2}{\text{sen}\theta}+\frac{4}{\cos\theta}$, sendo θ a amplitude do ângulo *ABC*.

6 Nas figuras que se seguem estão representadas partes dos gráficos de f, f' e f'' de domínio $\mathbb{R}$. 17

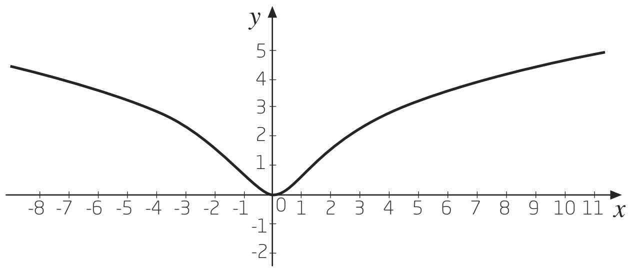


Figura 1

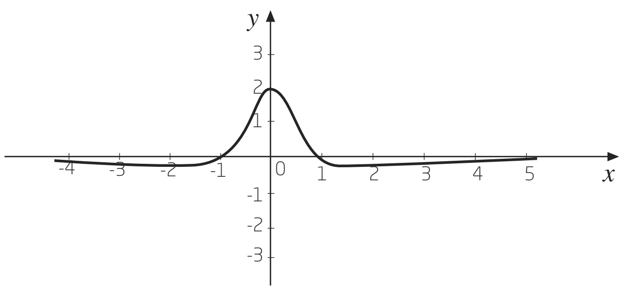


Figura 2

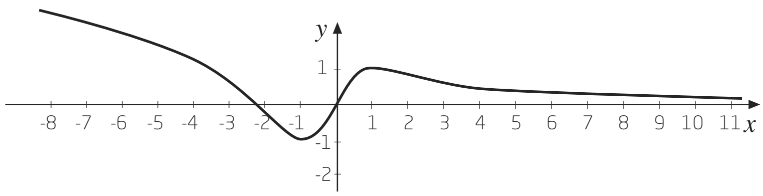


Figura 3

Numa pequena composição, explique em qual das figuras está representado o gráfico de f, de f' (primeira derivada de f) e de f'' (segunda derivada de f). Para além de justificar a sua escolha, explique porque é que o gráfico de f não pode ser nenhum dos outros dois, apresentando, para cada um deles, uma razão para o rejeitar.

PROVA 4 (págs. 21-25)

GRUPO I

1. A soma dos quatro primeiros números da linha n do triângulo de Pascal é dada por ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 = 4526$, mas dado que o quarto número dessa linha é 4060, podemos afirmar que:

$$1+n+\frac{n!}{2!(n-2)!}+4060=4526$$
$$\Leftrightarrow 1+n+\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}+4060=4526$$
$$\Leftrightarrow n^2+n-930=0$$
$$\Leftrightarrow n=-31 \quad \vee \quad n=30$$

Como $n \in \mathbb{N}_0$, $n = 30$.

A linha em causa será ${}^{30}C_0 \;\; {}^{30}C_1 \;\; \dots \;\; {}^{30}C_{29} \;\; {}^{30}C_{30}$, composta por 31 números. Logo, o maior valor desta linha será o que ocupa a posição central, ou seja, ${}^{30}C_{15}$.

Opção correta: (B)

2. Vamos começar por desenvolver a potência do binómio dado, explicitando os três primeiros termos, usando o binómio de Newton.

$$\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^n = {}^nC_0\left(x^2\right)^n\left(\frac{1}{2x}\right)^0 + {}^nC_1\left(x^2\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2x}\right)^1 +$$
$$+{}^nC_2\left(x^2\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2x}\right)^2+\cdots=$$
$$=x^{2n}+nx^{2(n-1)}\frac{1}{2x}+{}^nC_2x^{2(n-2)}\frac{1}{4x^2}+\cdots=$$
$$=x^{2n}+\frac{n}{2}\cdot\frac{x^{2(n-1)}}{x}+\frac{{}^nC_2}{4}\cdot\frac{x^{2(n-2)}}{x^2}+\cdots$$

Assim os coeficientes dos três primeiros termos do desenvolvimento do binómio dado são:

$$1; \quad \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \frac{{}^nC_2}{4}=\frac{n!}{2!(n-2)!\cdot 4}=\frac{n(n-1)}{8}.$$

Como estes coeficientes estão em progressão aritmética e neste tipo de progressões a diferença entre um termo e o termo anterior é constante, podemos escrever que:

$$\frac{n(n-1)}{8}-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}-1$$
$$\Leftrightarrow n^2-n-4n=4n-8$$
$$\Leftrightarrow n^2-9n+8=0$$
$$\Leftrightarrow n=8 \quad \vee \quad n=1$$

Se $n = 1$, então $\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^n=x^2+\frac{1}{2x}$, ou seja, o desenvolvimento do binómio teria apenas dois termos e não três, como é suposto.

Assim, $n = 8$.

Opção correta: (C)

3. Seja $y=\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$. Usando a relação $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, para todo $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$, $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$3^y=\frac{1}{9}$$
$$\Leftrightarrow 3^y=\frac{1}{3^2}$$
$$\Leftrightarrow 3^y=3^{-2}$$
$$\Leftrightarrow y=-2$$

(a função exponencial é uma função injetiva)

Logo, a abcissa de P é a solução da equação $\log_2 x = -2$.

$$\log_2 x=-2$$
$$\Leftrightarrow x=2^{-2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2^2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$

Opção correta: (A)

4. $$f'(x)=\left(\text{sen}\,x^2-\cos^3 x\right)'=\left(\text{sen}\,x^2\right)'-\left(\cos^3 x\right)'=$$
$$=\left(x^2\right)'\cos\left(x^2\right)-\left(3\cos^2 x\left(\cos x\right)'\right)=$$
$$=2x\cos\left(x^2\right)-3\cos^2 x\left(-\text{sen}\,x\right)=$$
$$=2x\cos\left(x^2\right)+3\cos^2 x\,\text{sen}\,x$$

Opção correta: (B)

5. Seja $h(x) = m_1 x + b_1$ e $g(x) = m_2 x + b_2$.

Temos que:

$$f(x)=|m_1x+b_1|=\begin{cases} m_1x+b_1 & \text{se } x\geq 2 \\ -m_1x-b_1 & \text{se } x<2\end{cases}$$

Assim, $$(f+g)(x)=\begin{cases} m_1x+b_1+m_2x+b_2 & \text{se } x\geq 2 \\ -m_1x-b_1+m_2x+b_2 & \text{se } x<2\end{cases}=$$
$$=\begin{cases} (m_1+m_2)x+b_1+b_2 & \text{se } x\geq 2 \\ (m_2-m_1)x+b_2-b_1 & \text{se } x<2\end{cases}$$

Tendo em conta que $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$ e que $f + g$ está definida por duas semirretas, qualquer intervalo contido em $]-\infty, 2]$ ou em $[2, +\infty[$, satisfaz as condições exigidas.

Das hipóteses apresentadas, o intervalo $]-3, 1[$ é o único que está contido num dos intervalos acima referidos, designadamente em $]-\infty, 2[$.

Opção correta: (A)

6. Note-se que $f(a) = a^a = c$ e $f(b) = a^b = d$.

A ordenada de P é igual a $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=a^{\frac{a+b}{2}}=\left(a^{a+b}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a^{a+b}}=\sqrt{a^a\cdot a^b}=$$
$$=\sqrt{f(a)\cdot f(b)}=\sqrt{cd}$$

Opção correta: (C)

7. $i^{12n+3}=i^{12n}\times i^3=$

$=\left(i^{4n}\right)^3\times i^2\times i=$

$=1^3\times(-1)\times i=$

$=-i$

Outro processo:

$i^{12n+3}=i^{12n}\times i^3=$

$=\left(i^{12}\right)^n\times(-i)=$

$=1^n\times(-i)=$

$=-i$

Opção correta: (C)

8. A imagem geométrica do conjunto original é uma coroa circular centrada na origem do plano complexo. O produto de um conjunto por i (unidade imaginária) é uma rotação do conjunto sobre si mesmo (o que neste caso não altera a sua representação geométrica). A soma com 2 – i resulta numa translação, no plano complexo, associada ao vetor (2, –1).

Opção correta: (B)

GRUPO II

1.

1.1 $z=i^{32}+\dfrac{\sqrt{3}(1-2i)}{2+i}=$

$=\left(i^4\right)^8+\dfrac{\sqrt{3}(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=$

$=1^8+\dfrac{\sqrt{3}\left(2-i-4i+2i^2\right)}{4-i^2}=$

$=1+\dfrac{-5\sqrt{3}i}{5}=$

$=1-\sqrt{3}i$

$|z|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$

$$\begin{cases}1=2\cos\theta\\-\sqrt{3}=2\operatorname{sen}\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\\\operatorname{sen}\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow\theta=-\dfrac{\pi}{3}$ porque $\theta\in$ 4.º quadrante.

Assim, na forma trigonométrica, $z=2\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

1.2 As raízes de índice quatro de um número complexo têm todas o mesmo módulo e o argumento pode ser obtido do argumento de outra raiz consecutiva, adicionando ou subtraindo $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$. A imagem geométrica de $z=2\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ pertence ao 4.º quadrante.

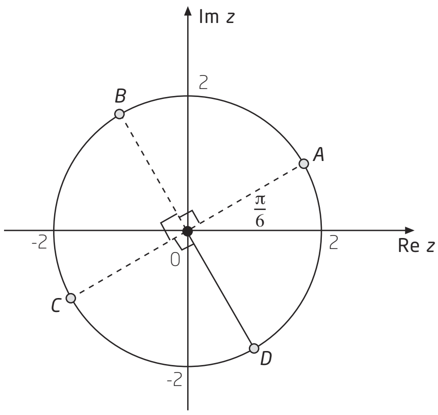
Logo as restantes raízes serão:

$z_1=2\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)=2\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

$z_2=2\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}\right)=2\operatorname{cis}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$z_3=2\operatorname{cis}\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)=2\operatorname{cis}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

A, B, C e D, são, respetivamente, os afixos de z_1, z_2, z_3 e z.



2.

2.1 $P\left(\bar{A}\mid B\right)=\dfrac{P\left(\bar{A}\cap B\right)}{P(B)}=$

$=\dfrac{P(B\setminus(A\cap B))}{P(B)}=$

$=\dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=$

$=\dfrac{P(B)}{P(B)}-\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=$

$=1-P(A\mid B)$

Nota:

$\bar{X}\cap Y=Y\setminus(X\cap Y)$

$P(X\setminus Y)=P(X)-P(X\cap Y)$

2.2 Designemos por R o acontecimento "o João recupera da infeção em menos de uma semana" e por L o acontecimento "o João lembra-se de tomar o fármaco em todos os dias recomendados pelo médico".

O enunciado fornece a seguinte informação:

$P\left(\bar{L}\right)=0{,}2\quad P(R\mid L)=0{,}6\quad P\left(R\mid\bar{L}\right)=0{,}1$

A probabilidade pedida é:

$P\left(\bar{L}\mid\bar{R}\right)=\dfrac{P\left(\bar{L}\cap\bar{R}\right)}{P\left(\bar{R}\right)}=\dfrac{P\left(\overline{R\cup L}\right)}{1-P(R)}=\dfrac{1-P(L\cup R)}{1-P(R)}$

Como $P(R|L)$ = 0,6, então

$\dfrac{P(R\cap L)}{P(L)}=0{,}6$

$\Leftrightarrow\dfrac{P(R\cap L)}{0{,}8}=0{,}6$

$\Leftrightarrow P(R\cap L)=0{,}48$

Por outro lado, $P(R|\bar{L}) = 0{,}1$, ou seja, $\frac{P(R \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = 0{,}1$

$\Leftrightarrow \frac{P(R) - P(R \cap L)}{0{,}2} = 0{,}1$

$\Leftrightarrow P(R) - 0{,}48 = 0{,}02$

$\Leftrightarrow P(R) = 0{,}5$

$P(L \cup R) = P(L) + P(R) - P(L \cap R)$

$P(L \cup R) = 0{,}8 + 0{,}5 - 0{,}48 = 0{,}82$

Assim, $P(\bar{L}|\bar{R}) = \frac{1 - P(L \cup R)}{1 - P(R)} = \frac{1 - 0{,}82}{1 - 0{,}5} = \frac{0{,}18}{0{,}5} = 0{,}36$

Outro processo:

A probabilidade pedida é

$$P\left(\bar{L}|\bar{R}\right) = \frac{P\left(\bar{L} \cap \bar{R}\right)}{P\left(\bar{R}\right)} = \frac{P\left(\bar{R} \cap \bar{L}\right)}{P\left(\bar{R} \cap L\right) + P\left(\bar{R} \cap \bar{L}\right)} =$$

$= \frac{0{,}18}{0{,}32 + 0{,}18} = 0{,}36$, onde:

- $P\left(\bar{R} \cap \bar{L}\right) = P\left(\bar{R}|\bar{L}\right) \cdot P\left(\bar{L}\right) = 0{,}9 \times 0{,}2 = 0{,}18$, porque $P\left(\bar{R}|\bar{L}\right) = 1 - P\left(R|\bar{L}\right) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ (utilizando a alínea a)).
- $P\left(\bar{R} \cap L\right) = P\left(\bar{R}|L\right) \cdot P\left(L\right) = 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}32$ porque $P\left(\bar{R}|L\right) = 1 - P\left(R|L\right) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ (utilizando a alínea a)) e $P\left(L\right) = 1 - P\left(\bar{L}\right) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

3.

3.1 $\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{\infty}{\tau}}\right) = Q_0\left(1 - e^{-\infty}\right) = Q_0\left(1 - 0\right) = Q_0$

O que significa que com o decorrer do tempo a carga do condensador aproxima-se da carga máxima.

3.2 $Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$\Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{Q(t)}{Q_0}$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{Q(t)}{Q_0}$

$\Leftrightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{Q(t)}{Q_0}\right)$

$\Leftrightarrow t = -\tau \ln\left(\frac{Q_0 - Q(t)}{Q_0}\right)$

$\Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{Q_0 - Q(t)}{Q_0}\right)^{-\tau}$

$\Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{Q_0}{Q_0 - Q(t)}\right)^{\tau}$

3.3 Vamos substituir, na expressão obtida na alínea anterior, $Q(t)$ por $0{,}5Q_0$ e τ por 2.

$t = \ln\left(\frac{Q_0}{Q_0 - 0{,}5Q_0}\right)^2 = \ln\left(\frac{Q_0}{0{,}5Q_0}\right)^2 =$

$= \ln 2^2 \approx 1{,}4$ segundos.

3.4 Se $t = 5\tau$, então

$Q(5\tau) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right) = Q_0\left(1 - e^{-5}\right) \approx 0{,}993Q_0$, ou seja,

quando o tempo é igual a cinco vezes a constante de tempo a carga do condensador é igual a aproximadamente 99,3% da sua carga máxima. Note-se que, em termos teóricos, a carga máxima nunca é atingida já que a função Q aproxima-se de Q_0 sem nunca atingir esse valor.

4.

4.1 A função f é contínua no intervalo $]0, +\infty[$ porque está definida por uma composição de duas funções contínuas (a função cosseno e uma função afim) e também é contínua no intervalo $]-\infty, 0[$ porque está definida pelo quociente entre duas funções contínuas (uma função linear e uma diferença entre funções contínuas).

Falta-nos analisar a continuidade de f em $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x}{e^{4x} - 1} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2x}{e^{4x} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0^-} \frac{4x}{e^{4x} - 1}$$

Efetuando a substituição $y = 4x$ no limite anterior, obtemos:

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{y \to 0^-} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}}} = \frac{1}{2}$$

Como $f(0) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, concluímos f é contínua em $x = 0$ porque $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$.

Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

4.2 A função f é contínua em $\mathbb{R}$, por isso é também contínua no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$f(0) = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) =$

$= \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

ou

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{7\pi}{12} \approx -0{,}26$

Como $f(0)\times f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$ então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, garantimos que existe $c\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ tal que $f(c)=0$, mas $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[\subset\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. Logo, existe pelo menos um zero de f em $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

4.3 Seja $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ e $k\in\mathbb{Z}$.

$$f(x)=0$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Dado que $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, conclui-se que $x=\frac{\pi}{6}$.

$$f'(x)=\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]'=-\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=$$
$$=-\text{sen}\,\frac{3\pi}{6}=-\text{sen}\,\frac{\pi}{2}=-1$$

A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ é $y=-x+\frac{\pi}{6}$.

5. O comprimento da escada é igual a $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}$.

$$\text{sen}\theta=\frac{2}{\overline{AB}}\Leftrightarrow \overline{AB}=\frac{2}{\text{sen}\theta}$$
$$\cos\theta=\frac{4}{\overline{BD}}\Leftrightarrow \overline{BD}=\frac{4}{\cos\theta}$$

Logo, $\overline{AD}=\frac{2}{\text{sen}\theta}+\frac{4}{\cos\theta}$, com $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

Vamos designar por f o comprimento da escada em função de θ, isto é, $f(\theta)=\frac{2}{\text{sen}\theta}+\frac{4}{\cos\theta}$ e derivar esta função, com o objetivo de determinar o seu mínimo, no intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

De facto, quando θ tende para 0 ou para $\frac{\pi}{2}$, f tende para infinito. Por isso, o comprimento máximo da escada corresponde ao mínimo de f.

$$f'(\theta)=\left(\frac{2}{\text{sen}\theta}\right)'+\left(\frac{4}{\cos\theta}\right)'=$$
$$=\frac{-2\cos\theta}{\text{sen}^2\theta}+\frac{4\,\text{sen}\theta}{\cos^2\theta}$$

Para localizar um possível minimizante desta função, vamos determinar os zeros da sua derivada.

$$f'(\theta)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-2\cos\theta}{\text{sen}^2\theta}=\frac{-4\,\text{sen}\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\underset{\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow} 2\cos^3\theta=4\,\text{sen}^3\theta$$
$$\Leftrightarrow \text{tg}^3\theta=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \text{tg}\theta=\sqrt[3]{0,5}$$
$$\Leftrightarrow \text{tg}\theta\approx 0,79$$
$$\Rightarrow \theta\approx 0,67\text{ rad}$$

θ	0		0,67		$\frac{\pi}{2}$
f'	ND	–	0	+	ND
f	ND	↘	Min.	↗	ND

O comprimento máximo que a escada pode ter é, aproximadamente, $f(0,67)=\frac{2}{\text{sen}0,67}+\frac{4}{\cos 0,67}\approx 8,32$ metros.

6. O gráfico da figura 1 corresponde ao gráfico de f. Sendo esta uma função decrescente no intervalo $]-\infty,0]$ e crescente no intervalo $]0,+\infty]$, a função f' é negativa no intervalo $]-\infty,0[$ e positiva no intervalo $]0,+\infty[$, o que acontece no gráfico da figura 3.

Por exclusão de partes, na figura 2 está o gráfico de f'', que é uma função negativa no intervalo $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$, que corresponde ao intervalo onde f tem a concavidade voltada para baixo, e é uma função positiva no intervalo $]-1,1[$, que corresponde ao intervalo onde f tem a concavidade voltada para cima.

Se o gráfico de f fosse o da figura 2, nenhuma das outras figuras representaria o gráfico de f', já que o gráfico da figura 2 tem três extremos relativos e nenhuma das outras funções tem três zeros.

Se o gráfico de f fosse o da figura 3, nenhuma das outras figuras representaria o gráfico de f'', já que o gráfico da figura 3 tem três pontos de inflexão e nenhuma das outras funções tem três zeros.

PROVA 5 (págs. 26-30)

GRUPO I

1. Falta sombrear um canto e temos duas maneiras de o fazer (sombrear o canto superior direito ou o canto inferior esquerdo). Para cada uma destas possibilidades, temos de sombrear ainda mais três quadrículas num total de 10 disponíveis, ou seja, temos ${}^{10}C_3$ maneiras diferentes de sombrear as restantes quadrículas.