|

Proposta de teste de avaliação

Matemática A

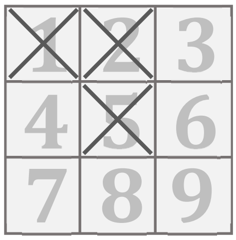
12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere um tabuleiro quadrado, dividido em 3×3 casas quadradas iguais. Selecionam-se, ao acaso, três das nove casas do tabuleiro. Nas casas escolhidas é colocada uma cruz formada pelas diagonais dessa casa.
Qual é a probabilidade de pelo menos duas das cruzes ficarem na mesma linha ou na mesma coluna?

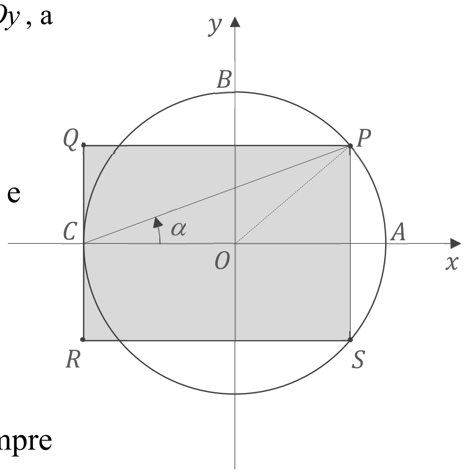


(A) $\frac{13}{14}$ **(B)** $\frac{6}{7}$ **(C)** $\frac{41}{42}$ **(D)** $\frac{3}{7}$

2. Na figura, estão representados, em referencial ortonormado xOy, a circunferência trigonométrica e o retângulo $[PQRS]$.

Sabe-se que:

- os pontos A, B e C têm coordenadas $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$, respetivamente;
- o ponto P move-se sobre o arco AB;
- os pontos Q, R e S acompanham o movimento do ponto P de tal forma que os pontos Q e R têm sempre abcissa igual a -1 e o eixo Ox é sempre um eixo de simetria do retângulo $[PQRS]$.



Para cada posição do ponto P, seja α a amplitude, em radianos, do ângulo ACP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$.

2.1. Justifique que a amplitude, em radianos, do ângulo AOP é 2α.

2.2. Mostre que a área do retângulo $[PQRS]$, em função de α, é dada por:

$$A(\alpha) = 2\sin(2\alpha) + \sin(4\alpha)$$

2.3. Determine o valor de α para o qual a área do retângulo $[PQRS]$ é máxima.

3. A temperatura no interior de um frigorífico é constante.

Uma garrafa de bebida com temperatura de $20\ ^{\circ}\mathrm{C}$ é colocada nesse frigorífico. Ao fim de 15 minutos, a temperatura da bebida é $18\ ^{\circ}\mathrm{C}$.

Para determinados números reais A e k, a temperatura dessa bebida, t minutos após ter sido colocada no frigorífico, pode ser modelada pela função $T(t) = 4 + A\,\mathrm{e}^{kt}$.

3.1. Mostre que $A = 16$.

3.2. Mostre que, com arredondamento às milésimas, $k = -0{,}009$.

3.3. Na resolução das questões que se seguem, considere $A = 16$ e $k = -0{,}009$.

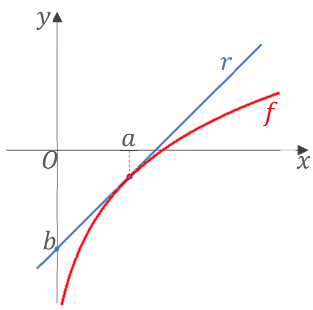
a) Quanto tempo terá de decorrer para que a temperatura da bebida seja inferior a $10\ ^{\circ}\mathrm{C}$? Apresente o resultado em horas e minutos com os minutos arredondados às unidades.

b) Se a bebida permanecer no frigorífico, com o decorrer do tempo, a sua temperatura tenderá para a temperatura a que se encontra o interior do frigorífico. Determine o valor dessa temperatura.

c) Verifique que $T'(t) = 0{,}009\left[T(t) - 4\right]$ em que T' é a função **derivada** de T **.**

d) Determine $T'(60)$. Apresente o resultado arredondado às décimas e interprete-o no contexto da situação apresentada.

4. Na figura, está representada parte do gráfico da função f de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 6\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1$.



Está igualmente representada a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a e definida, para determinado número real b, pela equação $y = 3x + b$.

Em qual das seguintes opções se encontram os valores de a e b?

(A) $a = 2\mathrm{e}\ ;\ b = -1$ **(B)** $a = 2\ ;\ b = -1$

(C) $a = 2\ ;\ b = -7$ **(D)** $a = 2\mathrm{e}\ ;\ b = -7$

5. Escolhe-se, ao acaso, um dos termos do desenvolvimento de $(1+x)^{20}$.

Qual é a probabilidade de o coeficiente desse termo ser maior do que 200?

(A) $\dfrac{7}{10}$ **(B)** $\dfrac{5}{7}$ **(C)** $\dfrac{6}{7}$ **(D)** $\dfrac{17}{20}$

6. Considere a função f , de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln(x-1)$.

6.1. O valor de $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)}{x^2 - 4}$ é.

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{4}$

6.2. Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim f(x_n) = -\infty$.

Qual das seguintes expressões pode ser o termo geral da sucessão (x_n)?

(A) $\frac{n-1}{n}$ **(B)** $\frac{n+1}{n}$ **(C)** $n + \frac{1}{n}$ **(D)** $n - \frac{1}{n}$

7. Para um certo número real k não nulo, a função f , de domínio $\mathbb{R}$, é definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x - 2x}{kx} & \text{se } x < 0 \\ x - 2 - x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

7.1. Determine o valor de k , sabendo que a função f é contínua.

7.2. Estude a função f quanto à existência de assíntota quando $x \to +\infty$

8. De uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua derivada é dada por $f'(x) = x + \ln(x^2 + 1)$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa nula é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

(B) O ponto do gráfico de f com abcissa -1 é um ponto de inflexão.

(C) O gráfico de f não tem pontos de inflexão.

(D) $f'(0) > f''(0)$

FIM

Cotações:

Item																		
Cotação (em pontos)																		
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.a)**	**3.3.b).**	**3.3.c)**	**3.3.d)**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1**	**7.2.**	**8.**	
8	7	15	15	10	15	15	15	15	15	8	8	8	8	15	15	8	**200**

Anexo

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Proposta de resolução

1. Número de casos possíveis: ${}^{9}C_3 = 84$

Número de casos favoráveis:

O número de maneiras de colocar as três cruzes de forma a não ficarem duas cruzes na mesma linha nem na mesma coluna é dado por:

$3 \times 2 \times 1 = 6$

Número de maneiras de escolher a casa na 3.ª linha

Número de maneiras de escolher a casa na 2.ª linha

Número de maneiras de escolher a casa na 1.ª linha

O número de casos favoráveis é dado por $84 - 6 = 78$.

A probabilidade pedida é:

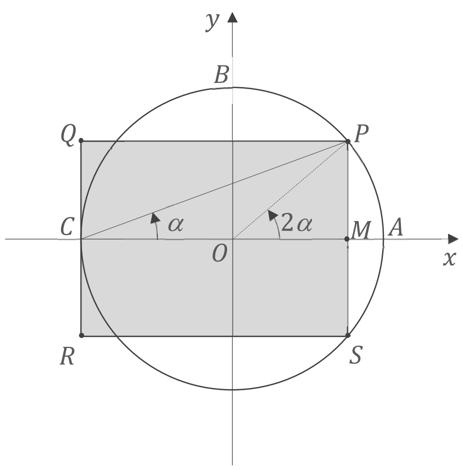
$P = \frac{78}{84} = \frac{13}{14}$ ou, pelo acontecimento contrário $P = 1 - \frac{6}{84} = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$

Resposta (A)

2.

2.1. O ângulo ACP é um ângulo inscrito na circunferência. Como a amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é igual a metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente, temos que a amplitude do ângulo ACP é igual a metade da amplitude do ângulo AOP. Logo, se a amplitude do ângulo ACP é α, a amplitude do ângulo AOP é 2α.

2.2. Seja M o ponto médio de $[PS]$ (M pertence ao eixo Ox).



$\overline{OP} = \overline{OC} = 1$

$\overline{PM} = \sin(2\alpha)$; $\overline{OM} = \cos(2\alpha)$

$\overline{PS} = 2\overline{PM} = 2\sin(2\alpha)$

$\overline{RS} = \overline{OC} + \overline{OM} = 1 + \cos(2\alpha)$

$\text{Área}_{[PQRS]} = \overline{RS} \times \overline{PS}$

$$A(\alpha) = \left(1 + \cos(2\alpha)\right) \times 2\sin(2\alpha) =$$

$$= 2\sin(2\alpha) + 2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha) =$$

$$= 2\sin(2\alpha) + \sin(2 \times 2\alpha) =$$

$$= 2\sin(2\alpha) + \sin(4\alpha)$$

2.3. $$A'(\alpha) = \left[2\sin(2\alpha) + \sin(4\alpha)\right]' =$$

$$= 2(2\alpha)'\cos(2\alpha) + (4\alpha)'\cos(4\alpha) =$$

$$= 2 \times 2\cos(2\alpha) + 4\cos(4\alpha) =$$

$$= 4\cos(2\alpha) + 4\cos(4\alpha)$$

$$A'(\alpha)=0 \Leftrightarrow 4\cos(2\alpha)+4\cos(4\alpha)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(4\alpha)=-\cos(2\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(4\alpha)=\cos(\pi-2\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha=\pi-2\alpha+2k\pi \vee 4\alpha=-\pi+2\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\alpha=\pi+2k\pi \vee 2\alpha=-\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \vee \alpha=-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in \left]0\,,\frac{\pi}{4}\right[$, vem: $A'(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}$

	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
A'		$+$	0	$-$	$-$
A		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	2

A área do retângulo $[PQRS]$ é máxima para $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

3. $T(t)=4+A\,e^{kt}$

3.1. $T(0)=20 \Leftrightarrow 4+A\,e^{k\times 0}=20 \Leftrightarrow 4+A\,e^{0}=20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4+A=20 \Leftrightarrow A=16$

3.2. $T(t)=4+16\,e^{kt}$

$T(15)=18 \Leftrightarrow 4+16\,e^{k\times 15}=18 \Leftrightarrow 16\,e^{15k}=14 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{15k}=\frac{14}{16} \Leftrightarrow 15k=\ln\left(\frac{7}{8}\right) \Leftrightarrow k=\frac{1}{15}\ln\left(\frac{7}{8}\right)$$

$$k=\frac{1}{15}\ln\left(\frac{7}{8}\right)\approx -0{,}009$$

3.3. $T(t)=4+16\,e^{-0{,}009t}$

a) $T(t)<10 \Leftrightarrow 4+16\,e^{-0{,}009t}<10 \Leftrightarrow 16\,e^{-0{,}009t}<6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}009t}<\frac{6}{16} \Leftrightarrow -0{,}009t<\ln\left(\frac{3}{8}\right) \Leftrightarrow t>\frac{\ln(0{,}375)}{-0{,}009}$$

$$\frac{\ln(0{,}375)}{-0{,}009}\text{ min}\approx 108{,}98\text{ min}\approx 109\text{ min}=1\text{ h }49\text{ min}$$

A temperatura da bebida é inferior a $10\ ^{\circ}\mathrm{C}$ decorridos cerca de 1 h 49 min.

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(4+16\,e^{-0{,}009t}\right)=4+16\times 0=4$ $\quad\mid\ e^{-\infty}=0$

A temperatura no interior do frigorífico é igual a $4\ ^{\circ}\mathrm{C}$.

c) $T'(t)=\left(4+16\,\mathrm{e}^{-0,009t}\right)'=0+16\times\left(-0,009t\right)'\,\mathrm{e}^{-0,009t}=$

$=-0,009\times16\,\mathrm{e}^{-0,009t}=$ $\quad\mid T(t)-4=4+16\,\mathrm{e}^{-0,009t}-4=16\,\mathrm{e}^{-0,009t}$

$=-0,009\times\left[T(t)-4\right]$

d) $T'(60)=-0,009\times16\,\mathrm{e}^{-0,009\times60}\approx-0,1$

A temperatura da bebida, uma hora após ter sido colocada no frigorífico, diminui a uma taxa de cerca de $0,1\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{C/min}$.

4. A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a tem declive igual a 3. Logo, $f'(a)=3$.

$$f'(x)=\left[6\ln\left(\frac{x}{2}\right)-1\right]'=6\times\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\frac{x}{2}}+0=6\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}x}=\frac{6}{x}$$

$$f'(a)=3\Leftrightarrow\frac{6}{a}=3\Leftrightarrow a=2$$

O ponto de tangência tem abcissa 2 e ordenada $f(2)$.

Como $f(2)=6\ln\left(\frac{2}{2}\right)-1=6\ln1-1=6\times0-1=-1$, o ponto de tangência tem coordenadas $(2,\,-1)$.

Dado que este ponto também pertence à reta r de equação $y=3x+b$, vem:

$-1=3\times2+b\Leftrightarrow b=-1-6\Leftrightarrow b=-7$

Portanto, $a=2$ e $b=-7$.

Resposta: (C)

5. $(1+x)^{20}=\sum_{p=0}^{20}{}^{20}C_p\times1^{20-p}\times x^p=\sum_{p=0}^{20}{}^{20}C_p x^p$

Os coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(1+x)^{20}$ são os elementos da linha do triângulo de Pascal da forma da forma ${}^{20}C_p$.

Número de casos possíveis:

A linha do Triângulo de Pascal formada pelos números da forma ${}^{20}C_p$ tem 21 elementos.

Portanto, o número de casos possíveis é 21.

Número de casos favoráveis:

Os três primeiros elementos desta linha são ${}^{20}C_0=1$, ${}^{20}C_1=20$ e ${}^{20}C_2=190$.

Os últimos três elementos da linha são iguais aos três primeiros.

Estes seis elementos são os únicos inferiores a 200.

O número de casos favoráveis é, assim, igual a $21-6=15$

A probabilidade pedida é: $\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$

Resposta: (B)

6. $f(x)=\ln(x-1)$

6.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{x^2-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{(x-2)(x+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}\times\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}=$

$y=\ln(x-1)\Leftrightarrow \mathrm{e}^y=x-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^y+1$

Se $x\to 2$, $y\to 0$

$=\dfrac{1}{4}\times\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\mathrm{e}^y+1-2}=$

$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^y-1}{y}}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{4}$

Resposta: (D)

6.2. $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(x-1)=-\infty$ porque se $x\to 1^+$, $x-1\to 0^+$

Tem-se que $\lim\dfrac{n+1}{n}=\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1^+$

Portanto, se $x_n=\dfrac{n+1}{n}$, $\lim f(x_n)=-\infty$

Resposta: (B)

7.

7.1. Se f é contínua em $\mathbb{R}$ então f é contínua em $x=0$.

f é contínua em $x=0$ se existir $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x-2x}{kx}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\dfrac{1}{k}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1-\cos x}{x}-\dfrac{2x}{x}\right)=$

$=\dfrac{1}{k}\left(\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x}{x}-2\right)=\dfrac{1}{k}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}-\dfrac{2}{k}=$

$=\dfrac{1}{k}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos^2 x}{x}\times\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+\cos x}-\dfrac{2}{k}=\dfrac{1}{k}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin^2 x}{x}\times\dfrac{1}{1+1}-\dfrac{2}{k}=$

$=\dfrac{1}{k}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}\times\lim\limits_{x\to 0^-}\sin x\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{k}=\dfrac{1}{k}\times 1\times 0\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{k}=-\dfrac{2}{k}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-2-x\,\mathrm{e}^{-x}\right)=0-2-0\times 0\times\mathrm{e}^0=-2=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$:

$-\dfrac{2}{k}=-2\overset{k\neq 0}{\Leftrightarrow}k=1$

Logo, se a função f é contínua, então $k=1$.

7.2. Seja $y = mx + b$ a assíntota ao gráfico de f em $+\infty$, caso exista.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 2 - x\,\mathrm{e}^{-x}}{x} \overset{\left(\frac{\infty-\infty\times 0}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x} - \frac{2}{x} - \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) =$$

$$= 1 - \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} - \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x} = 1 - 0 - 0 = 1 \qquad \left|\ \mathrm{e}^{-\infty} = 0\right.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 2 - x\,\mathrm{e}^{-x} - x\right) =$$

$$= -2 - \lim_{x\to+\infty}\left(x\,\mathrm{e}^{-x}\right) \overset{(\infty\times 0)}{=} -2 - \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{x}} =$$

$$= -2 - \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}} = -2 - \frac{1}{+\infty} = -2 - 0 = -2$$

Logo, a reta de equação $y = x - 2$ é uma assíntota ao gráfico de f, quando $x \to +\infty$.

8. $f'(x) = x + \ln\left(x^2 + 1\right)$

- $f'(0) = 0 + \ln\left(0^2 + 1\right) = 0 + \ln 1 = 0 + 0 = 0$

  A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa nula tem declive igual a 0.

  Uma reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares $(y = x)$ tem declive igual a 1.

  Logo, (A) é falsa.

- $$f''(x) = \left[x + \ln\left(x^2+1\right)\right]' = 1 + \frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1} =$$

  $$= \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

  $f''(-1) = 0$ e $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

  Portanto, o gráfico de f não tem pontos de inflexão e $f''(0) > f'(0)$.

Resposta: (C)