Proposta de Resolução

GRUPO I

1. Seja $\Omega = \{a, b, c, d\}$ o espaço de resultados de uma experiência aleatória.

$P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c\})$ e $P(\{c, d\}) = 0,6$.

$P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c\}) = x$

$P(\{c, d\}) = P(\{c\}) + P(\{d\}) = x + P(\{d\})$

$x + P(\{d\}) = 0,6 \Leftrightarrow P(\{d\}) = 0,6 - x$

$P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) = 1 \Leftrightarrow x + x + x + 0,6 - x = 1 \Leftrightarrow x = 0,2$

Então, $P(\{b, c\}) = P(\{b\}) + P(\{c\}) = 0,2 + 0,2 = 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Resposta: (A)

2. Pretende-se determinar a probabilidade de a 2.ª bola extraída ser branca, sabendo que na 1.ª extração saiu bola branca.

Seja *x*, o número inicial de bolas brancas. Então a probabilidade pedida é dada por $\frac{x-1}{14}$.

Mas, $\frac{x-1}{14} = \frac{4}{7} \Leftrightarrow x = 9$. Se no início havia 9 bolas brancas então o número de bolas azuis é dado por $15 - 9 = 6$.

Resposta: (C)

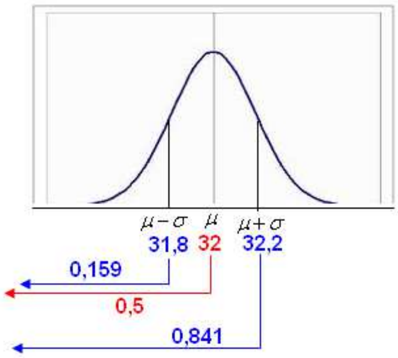
3. Considera os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8\}$.

Há 4 possibilidades para a imagem de 2 e 4 possibilidades para a imagem de 3.
No total há $4 \times 4 = 16$ possibilidades de definir as funções nas condições dadas.

Resposta: (A)

4. Sabe-se que: $P\left(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma\right) \approx 0,6827$

Então, tem-se:



Das opções apresentadas a que é verdadeira é a (B): $32 < x < 32,2$.

Resposta: (B)

5. Seja x o número de rapazes.

$P\left(X=0\right)=\dfrac{21}{38}$. Significa que a probabilidade de os dois alunos serem rapazes, ou seja,

$\dfrac{^{x}C_2}{^{20}C_2}$ é igual a $\dfrac{21}{38}$.

$$\frac{^{x}C_2}{^{20}C_2}=\frac{21}{38} \Leftrightarrow \frac{x!}{\left(x-2\right)!2!}=\frac{21}{38}\times 190 \Leftrightarrow \frac{x\left(x-1\right)}{2}=105$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-210=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+840}}{2} \Leftrightarrow x=15 \vee x=-14$$

Há 15 rapazes e 5 raparigas na turma.

Assim, $P\left(X=1\right)=\dfrac{^{5}C_1\times {^{15}C_1}}{^{20}C_2}=\dfrac{5\times 15}{190}=\dfrac{15}{38}$

Então, $a=\dfrac{15}{38}$

Resposta: (A)

GRUPO II

1.

1.1.

$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0,74 \Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=0,74 \Leftrightarrow 1-P\left(A\cap B\right)=0,74 \Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=0,26$ **(1)**

$P\left(A\right)\times P\left(B\right)=0,65\times 0,4=0,26$ **(2)**

De **(1)** e **(2)** resulta que $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\times P\left(B\right)$.

Daqui resulta que os acontecimentos A e B são independentes.

1.2. $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(A\cup B\right)=1-\left(P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\right)$

$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=1-\left(0,65+0,4-0,26\right)=0,21$

$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\frac{21}{100}$.

2.

2.1. Pretende-se que pelo menos uma das duas questões seja de desporto.
Pode acontecer que apenas uma só seja de desporto (a primeira ou a segunda) ou duas de desporto.

Número de casos favoráveis:
. A 1.ª ser de desporto e a 2.ª não ser de desporto: 26×54
. A 1.ª não ser de desporto e a 2.ª ser de desporto: 54×26
. A 1.ª ser de desporto e a 2.ª ser de desporto: 26×25

Número de casos favoráveis é dado por $2\times\left(26\times 54\right)+26\times 25=3458$.

Número de casos possíveis:

${}^{80}A_2=80\times 79=6320$

A: "pelo menos uma das questões é de desporto"

$P\left(A\right)=\frac{3458}{6320}\approx 0,547$

Nota: Sugere-se a resolução do exercício recorrendo ao acontecimento contrário de A.

$P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{{}^{54}A_2}{{}^{80}A_2}\approx 0,547$

2.2. Número de questões relacionadas com cinema: $80-\left(26+30\right)=24$

C: "sair questão sobre cinema"
D: "sair questão sobre desporto"
M: "sair questão sobre música"
E: "errar a resposta"

Pretende-se determinar $P\left(C\middle|E\right)$.

$$P\left(C|E\right)=\frac{P\left(C\cap E\right)}{P\left(E\right)}$$

$$P\left(C\cap E\right)=P\left(C\right)\times P\left(E|C\right)=\frac{24}{80}\times 0,1=\frac{24}{800}=0,03$$

$$P\left(D\cap E\right)=P\left(D\right)\times P\left(E|D\right)=\frac{26}{80}\times 0,6=\frac{156}{800}=0,195$$

$$P\left(M\cap E\right)=P\left(M\right)\times P\left(E|M\right)=\frac{30}{80}\times 0,25=0,09375$$

$$P\left(C|E\right)=\frac{P\left(C\cap E\right)}{P\left(E\right)}=\frac{P\left(C\cap E\right)}{P\left(C\cap E\right)+P\left(D\cap E\right)+P\left(M\cap E\right)}=\frac{0,03}{0,03+0,195+0,09375}$$

$$P\left(C\cap E\right)=\frac{0,03}{0,03+0,195+0,09375}=\frac{0,03}{0,31875}\approx 0,0941$$

$$P\left(C\cap E\right)\approx 9\%$$

3.
Há duas prateleiras.
As latas de cor azul e de cor verde podem ficar na 1.ª ou na 2.ª prateira.
Estas duas latas, escolhida a prateleira, têm ${}^{3}A_2=3\times 2=6$ lugares que podem ocupar.
As restantes quatro latas podem permutar entre si nos quatro lugares que vão ocupar de $4!$ maneiras.
Assim, o número de diferentes maneiras, de modo que as latas de cor azul e de cor verde fiquem na mesma prateleira, é dado por: $2\times {}^{3}A_2\times 4!=2\times 6\times 24=288$

4.
${}^{n}C_0 \quad {}^{n}C_1 \quad \cdots \quad {}^{n}C_7 \quad {}^{n}C_8 \quad \cdots \quad {}^{n}C_n$
Neste caso, a linha do Triângulo de Pascal, é constituída por 16 elementos, sendo $n=15$

4.1. Os números são diferentes nas seguintes situações:
- ambos são escolhidos entre os oito primeiros elementos;
- ambos são escolhidos entre os oito últimos elementos;
- um é escolhido entre os oito primeiros elementos e o outro é escolhido entre os sete elementos distintos do que foi escolhido mas que fazem parte dos oito últimos elementos.

Seja *p* a probabilidade pedida.

$$p=\frac{2\times {}^{8}C_2+{}^{8}C_1\times {}^{7}C_1}{{}^{16}C_2}=\frac{2\times 28+8\times 7}{{}^{16}C_2}=\frac{112}{120}=0,9(3).$$

Nota: Como alternativa recorrer ao acontecimento contrário.
A: "os números escolhidos são diferentes"
$\overline{A}$: "os números escolhidos são iguais"

Repara que há 8 pares de números iguais.

$$P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{8}{{}^{16}C_2}=1-\frac{8}{120}=\frac{112}{120}=0,9(3)$$

4.2. Seja X : "número de cartões retirados com o número 1"
Há 2 cartões com o número 1 e 14 cartões com números diferentes de 1.

Os valores que a variável aleatória toma são: 0, 1 e 2.
Tabela de distribuição de probabilidades:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{^{14}C_3}{^{16}C_3}$	$\frac{^{2}C_1 \times {}^{14}C_2}{^{16}C_3}$	$\frac{^{2}C_2 \times {}^{14}C_1}{^{16}C_3}$

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,65	0,325	0,025

5.
A : "o número registado é múltiplo de 3"
B : "o número registado é uma capicua"
C : "o número registado é múltiplo de 5"

Determinar o valor de $P\left(A \middle| \left(B \cap C\right)\right)$ corresponde a determinar a probabilidade de sair um número múltiplo de 3, sabendo que esse número é múltiplo de 5 e uma capicua.

Número de casos possíveis:
Se é múltiplo de 5 o algarismo das unidades é 5. Como é uma capicua, o algarismo dos milhares também é 5. Quanto aos algarismos das dezenas e das centenas são iguais.
Assim, tem-se:

5115, 5225, 5335, 5445, 5555, 5665, 5775, 5885 e 5995.

Há nove casos possíveis.
Dos casos possíveis são favoráveis os que forem múltiplos de 3 (a soma dos algarismos é múltiplo de 3)
Assim, os casos favoráveis são: 5115, 5445 e 5775
Há três casos favoráveis e nove casos possíveis.

Daqui resulta, por aplicação da regra de Laplace, que $P\left(A \middle| \left(B \cap C\right)\right) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.