TESTE GLOBAL – PROBABILIDADES – 12.º ANO

NOME: ____ **N.º:** ___ **TURMA:** ___ **ANO LETIVO:** _____/_____

DATA: _____/_____/_____

DURAÇÃO DO TESTE: 90 MINUTOS

VERSÃO 1

Na tua folha de respostas, indica de forma legível a versão do teste.

FORMULÁRIO

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve, na tua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionares para responder a esse item.
- Não apresentes cálculos, nem justificações.
- Se apresentares mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Seja Ω o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$.

Sabe-se que $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0,8$, $P(A) = 0,4$ e $P\left(\overline{B}\right) = 0,5$.

Qual é o valor de $P\left(\overline{A \cup B}\right)$?

(A) 0,7 **(B)** 0,4 **(C)** 0,3 **(D)** 0,2

2. Considera a linha do triângulo de Pascal cujo penúltimo elemento é 420. Escolhido, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ser superior a 87990?

(A) $\frac{6}{421}$ **(B)** $\frac{415}{421}$ **(C)** $\frac{1}{70}$ **(D)** $\frac{83}{84}$

3. Do desenvolvimento de $\left(x + \frac{2}{x}\right)^{10}$ resulta um polinómio reduzido.

Qual é o coeficiente do termo independente desse polinómio?

(A) ${}^{10}C_5$ **(B)** $2\ {}^{10}C_5$ **(C)** $10\ {}^{10}C_5$ **(D)** $32\ {}^{10}C_5$

4. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 15.

Sabe-se que $P(X \geq 19) = 0,15$.

Qual dos números seguintes pode ser o valor de $P(11 \leq X \leq 15)$?

(A) 0,30 **(B)** 0,35 **(C)** 0,68 **(D)** 0,75

5. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória Y é a seguinte:

y_i	0	1	2	3
$P(Y=y_i)$	$2a$	a	$2b$	b

Sabe-se que a e b são números reais e que $P(Y<2)=P(Y>1)$.

Qual é o valor médio da variável aleatória Y ?

(A) $a+b$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{4}{3}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, apresenta sempre o **valor exato**.

1. Um baralho de cartas é constituído por cinquenta e duas cartas em que:

- existem quatro naipes: copas, ouros, espadas e paus;
- cada naipe tem treze cartas, das quais uma é um ás e uma é um rei;
- as cartas de copas e as cartas de ouros são encarnadas;
- as cartas de espadas e as cartas de paus são pretas.

1.1 Tiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, três cartas do baralho.

Determina a probabilidade de serem tirados dois reis e o ás de copas.

1.2 Escolhem-se, ao acaso, simultaneamente, três cartas do baralho.

Seja X a variável aleatória «número de cartas encarnadas escolhidas».

Apresenta a tabela de distribuição de probabilidades de X .

Apresenta as probabilidades na forma de fração irredutível.

1.3 Usam-se quaisquer cinco cartas do baralho para se disporem sequencialmente.

Quantas sequências diferentes podemos formar que tenham pelo menos dois reis?

Apresenta uma expressão matemática que seja resposta ao problema. Não calcules o seu valor.

2. Dos alunos de uma turma, sabe-se que:

- 60% frequenta a disciplina de Física;
- dos que frequentam a disciplina de Física, 70% frequentam a disciplina de Química;
- dos que não frequentam a disciplina de Física, 20% frequentam a disciplina de Química.

Determina a probabilidade de um aluno da turma, escolhido ao acaso, frequentar a disciplina de Física, sabendo que não frequenta a disciplina de Química.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

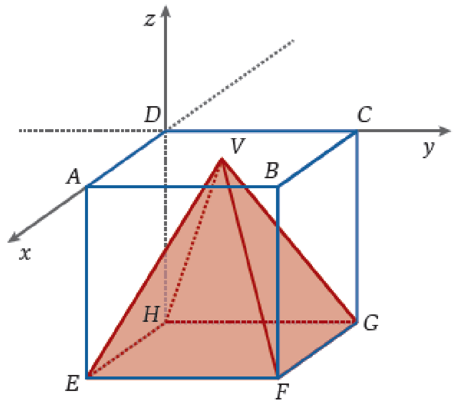
3. Seja Ω o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$ dois acontecimentos independentes, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.

Mostra que, para qualquer acontecimento C $(C \subset \Omega)$ se verifica a seguinte igualdade:

$$P(C \mid A) = P(B) \times P(C \mid (A \cap B)) + P(\overline{B}) \times P\left(C \mid \left(A \cap \overline{B}\right)\right)$$

4. Na figura ao lado representa-se:

- um referencial o.n. do espaço, com origem em D ;
- o cubo $[ABCDEFGH]$, com 2 unidades de aresta e com uma face contida no plano xOy;
- a pirâmide $[EFGHV]$, em que a base é uma face do cubo e o vértice V é o centro de outra face do cubo.



Admite que se escolhem, ao acaso, três dos pontos identificados na figura.

4.1 Determina a probabilidade de se escolherem três pontos que definam uma face lateral da pirâmide.

4.2 Sejam X e Y os acontecimento definidos como se segue:

X: «Os pontos escolhidos definem um plano»

Y: «Os pontos escolhidos estão contidos no plano de equação $z = 0$»

Determina o valor de $P(X \mid Y)$, sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada.

A tua resposta deve incluir o significado de $P(X \mid Y)$ no contexto da situação, a apresentação dos casos possíveis que consideraste, a apresentação dos casos favoráveis e o valor da probabilidade pedida.

5. Na figura ao lado está representado um tabuleiro quadrado, com as casas numeradas de 1 a 16.

Dispomos de oito peças, quatro das quais são brancas e indistinguíveis umas das outras, enquanto as restantes quatro peças têm cores diferentes (amarela, vermelha, azul e preta), sendo, portanto, distinguíveis.

Considera a experiência aleatória que consiste em colocar, ao acaso, as oito peças sobre o tabuleiro, de modo a que cada peça ocupe apenas uma casa.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Considera a seguinte questão:

«Qual é a probabilidade de as peças brancas ficarem todas nas casas com números pares?»

Uma resposta correta a esta questão é:

$$\frac{{}^{8}C_4 \times {}^{12}A_4}{{}^{16}A_4 \times {}^{12}C_4}$$

Numa pequena composição, explica as razões que tornam correta a resposta indicada, fazendo referência:

- à lei de Laplace;
- ao número de casos possíveis;
- ao número de casos favoráveis.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I	GRUPO II								TOTAL
	1.1	1.2	1.3	2	3	4.1	4.2	5	
5 × 10 = 50	15	20	20	20	20	15	20	20	200

Proposta de resolução

GRUPO I

1.

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0{,}8\Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=0{,}8\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}2$$

$$P\left(\overline{B}\right)=0{,}5\Leftrightarrow P(B)=0{,}5$$

$$P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-\left(P\left(A\right)+P\left(B\right)-P(A\cap B)\right)=1-\left(0{,}4+0{,}5-0{,}2\right)=0{,}3$$

Opção C

2. Se o penúltimo elemento da linha é 420 , o segundo elemento também; portanto, estamos na linha 420 , que tem 421 elementos. Ora, ${}^{420}C_2=87990$, pelo que apenas os três primeiros e os três últimos elementos da linha não são superiores a 87990.

A probabilidade pedida é, portanto, $\dfrac{421-6}{421}=\dfrac{415}{421}$.

Opção B

3. Os termos do desenvolvimento são da forma ${}^{10}C_p x^{10-p}\left(\dfrac{2}{x}\right)^p={}^{10}C_p 2^p\dfrac{x^{10-p}}{x^p}={}^{10}C_p 2^p x^{10-2p}$.

Determinemos o valor de p correspondente ao termo independente: $10-2p=0\Leftrightarrow p=5$.

O coeficiente do termo independente é, portanto: ${}^{10}C_5\times 2^5=32\,{}^{10}C_5$.

Opção D

4.

$$P(X\geq 19)=0{,}15\Leftrightarrow P(X\leq 11)=0{,}15$$

$$P(11\leq X\leq 15)=\frac{1-\left[P(X\geq 19)+P(X\leq 11)\right]}{2}=\frac{1-2\times 0{,}15}{2}=0{,}35$$

Opção B

5.

$$P(Y<2)=P(Y>1)\Leftrightarrow P(Y=0)+P(Y=1)=P(Y=2)+P(Y=3)\Leftrightarrow 2a+a=2b+b\Leftrightarrow a=b$$

Por outro lado, $2a+a+2b+b=1\Leftrightarrow 3a+3b=1$. Como $a=b$, $3a+3a=1$, donde resulta $a=b=\dfrac{1}{6}$.

Então, a tabela de distribuição de Y é:

y_i	0	1	2	3
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

A média pedida é $0\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{3}$.

Opção C

GRUPO II

1.1 Casos possíveis: $^{52}A_3 = 132600$; casos favoráveis: $^{4}A_2 \times 1 \times 3 = 36$.

Probabilidade: $\dfrac{36}{132600} = \dfrac{9}{33150}$

1.2 Escolhendo ao acaso, simultaneamente, três cartas do baralho, podem ser escolhidas 0 cartas encarnadas (e 3 pretas), 1 carta encarnada (e 2 pretas), 2 cartas encarnadas (e 1 preta) ou 3 cartas encarnadas (0 pretas). Portanto, a variável aleatória X pode tomar os valores 0, 1, 2 ou 3.

$$P(X=0) = P(X=3) = \frac{^{26}C_3}{^{52}C_3} = \frac{2}{17} \quad ; \quad P(X=1) = P(X=2) = \frac{^{26}C_1 \times {}^{26}C_2}{^{52}C_3} = \frac{13}{34}$$

A tabela de distribuição de X é, portanto:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{17}$	$\frac{13}{34}$	$\frac{13}{34}$	$\frac{2}{17}$

1.3 O número de sequências com pelo menos dois reis é igual número total de sequências subtraído do número de sequências com um rei ou sem reis.

Número total de sequências: $^{52}A_5$

Número de sequências com apenas um rei ou sem reis: $4 \times 5 \times {}^{48}A_4 + {}^{48}A_5$

Portanto, uma resposta ao problema é: $^{52}A_5 - \left(4 \times 5 \times {}^{48}A_4 + {}^{48}A_5\right)$

2. Sejam F o acontecimento «o aluno escolhido frequenta Física» e Q o acontecimento «o aluno escolhido frequenta Química». Sabemos que:

- $P(F) = 0,6$
- $P(Q \mid F) = 0,7$
- $P\left(Q \mid \overline{F}\right) = 0,2$

Temos que:

- Se $P(F) = 0,6$, então $P\left(\overline{F}\right) = 0,4$
- Se $P(Q \mid F) = 0,7$, então $P\left(\overline{Q} \mid F\right) = 0,3$ e, assim:

  $$P\left(F \cap \overline{Q}\right) = P(F) \times P\left(\overline{Q} \mid F\right) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

- Se $P\left(Q \mid \overline{F}\right) = 0,2$, então $P\left(\overline{Q} \mid \overline{F}\right) = 0,8$ e, assim:

  $$P\left(\overline{F} \cap \overline{Q}\right) = P\left(\overline{F}\right) \times P\left(\overline{Q} \mid \overline{F}\right) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$$

- $P\left(\overline{Q}\right)= P\left(F\cap\overline{Q}\right)+P\left(\overline{F}\cap\overline{Q}\right)=0{,}18+0{,}32=0{,}5$

- Finalmente, $P\left(F\,|\,\overline{Q}\right)=\dfrac{P\left(F\cap\overline{Q}\right)}{P\left(\overline{Q}\right)}=\dfrac{0{,}18}{0{,}5}=\dfrac{9}{25}$

Portanto, a probabilidade de um aluno da turma, escolhido ao acaso, frequentar a disciplina de Física, sabendo que não frequenta a disciplina de Química, é $\dfrac{9}{25}$.

3. Sendo A e B independentes, com $P(A)>0$ e $P(B)>0$ temos:

$$P(C\,|\,A)=P(B)\times P\left(C\,|\,(A\cap B)\right)+P\left(\overline{B}\right)\times P\left(C\,|\left(A\cap\overline{B}\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=P(B)\times\frac{P\left(C\cap(A\cap B)\right)}{P(A\cap B)}+P\left(\overline{B}\right)\times\frac{P\left(C\cap\left(A\cap\overline{B}\right)\right)}{P\left(A\cap\overline{B}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\cancel{P(B)}\times\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A)\times\cancel{P(B)}}+\cancel{P\left(\overline{B}\right)}\times\frac{P\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)}{P(A)\times\cancel{P\left(\overline{B}\right)}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A)}+\frac{P\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)}{P(A)}$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap C)=P\left((A\cap C)\cap B\right)+P\left((A\cap C)\cap\overline{B}\right)$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap C)=P(A\cap C)\ \text{(c.q.d.)}$$

4.1 Casos possíveis: ${}^{9}C_3$; casos favoráveis: 4 (das escolhas possíveis, há 4 que definem faces laterais da pirâmide.)

Probabilidade: $\dfrac{4}{{}^{9}C_3}=\dfrac{1}{21}$

4.2 Queremos determinar $P(X\,|\,Y)$, ou seja, a probabilidade de escolhermos três pontos que definam um plano, sabendo que os pontos escolhidos estão contidos no plano de equação $z=0$.Trata-se dos pontos *A*, *B*, *C*, *D* ou *V*. Temos, assim, ${}^{5}C_3$ casos possíveis. Destes, apenas dois **não** determinam um plano (*AVC* e *DVB*). Temos, portanto, ${}^{5}C_3-2$ casos favoráveis.

Probabilidade: $\dfrac{{}^{5}C_3-2}{{}^{5}C_3}=\dfrac{4}{5}$

5. Relativamente aos casos favoráveis, começamos por escolher 4 casas com o número par para colocar as fichas brancas; como há 8 casas com um número par, temos ${}^{8}C_4$ maneiras de o fazer (uma vez que as peças são iguais e as permutações são indistinguíveis). Por cada uma destas maneiras, sobram 12 casas, das quais escolhemos 4 para colocar as peças de outras cores, que ainda podem permutar; temos ${}^{12}A_4$ maneiras de o fazer. Portanto, o número de casos favoráveis é ${}^{8}C_4 \times {}^{12}A_4$.

Relativamente aos casos possíveis, podemos começar por escolher 4 casas para colocar as peças não brancas, cujas permutações se distinguem; temos ${}^{16}A_4$ maneiras de o fazer. Por cada uma destas maneiras, sobram 12 casas, das quais escolhemos 4 casas para colocar as peças brancas, cujas permutações são indistinguíveis; temos ${}^{12}C_4$ maneiras de o fazer. Portanto, o número de casos possíveis é ${}^{16}A_4 \times {}^{12}C_4$.

Pela lei de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis da experiência aleatória, com casos elementares equiprováveis, como nesta experiência.

Logo, a probabilidade é dada pelo quociente $\dfrac{{}^{8}C_4 \times {}^{12}A_4}{{}^{16}A_4 \times {}^{12}C_4}$.

Critérios específicos de classificação

GRUPO I

1. a **5.** .... (5 × 10 pontos) .... **50 pontos**

As respostas corretas são as seguintes:

Itens	1	2	3	4	5
Respostas	C	B	D	B	C

GRUPO II

1.1 .... **15 pontos**

Indicar o número de casos possíveis .... 5 pontos

Indicar o número de casos favoráveis .... 6 pontos

Indicar o valor da probabilidade pedida .... 4 pontos

1.2 .... **20 pontos**

Indicar os valores que a variável X pode tomar .... 4 pontos

Determinar cada uma das probabilidades ....12 pontos

Apresentar a tabela .... 4 pontos

1.3 .... **20 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo:

Escrever uma expressão que dê o número total de sequências .... 6 pontos

Escrever uma expressão que dê o número de sequências com um rei
ou sem reis .... 10 pontos

Escrever uma expressão que dê o número de sequências com pelo menos
dois reis .... 4 pontos

2.º Processo:

Escrever uma expressão que dê o número de sequências com exatamente
dois reis .... 4 pontos

Escrever uma expressão que dê o número de sequências com exatamente
três reis .... 4 pontos

Escrever uma expressão que dê o número de sequências com exatamente
quatro reis .... 4 pontos

Escrever uma expressão que dê o número de sequências com exatamente cinco reis .... 4 pontos

Escrever uma expressão que dê o número de sequências com pelo menos dois reis .... 4 pontos

2. .... **20 pontos**

Indicar $P\left(\overline{F}\right)$ .... 1 ponto

Indicar $P\left(\overline{Q} \mid F\right)$ .... 2 pontos

Calcular $P\left(F \cap \overline{Q}\right)$ .... 3 pontos

Indicar $P\left(\overline{Q} \mid \overline{F}\right)$ .... 2 pontos

Calcular $P\left(\overline{F} \cap \overline{Q}\right)$ .... 3 pontos

Calcular $P\left(\overline{Q}\right)$ .... 3 pontos

Reconhecer que $P\left(F \mid \overline{Q}\right) = \dfrac{P\left(F \cap \overline{Q}\right)}{P\left(\overline{Q}\right)}$ .... 3 pontos

Apresentar o valor da probabilidade pedida .... 3 pontos

3. .... **20 pontos**

Aplicar a *fórmula* da probabilidade condicionada .... 4 pontos

Reconhecer que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ e que $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A)P\left(\overline{B}\right)$ .... 4 pontos

Simplificar a expressão obtida .... 1 ponto

Escrever uma expressão equivalente, sem denominadores .... 1 ponto

Aplicar a *propriedade associativa da interseção* .... 4 pontos

Aplicar o *teorema da probabilidade total*… .... 4 pontos

Concluir o que é pedido .... 2 pontos

4.1 .... **15 pontos**

Indicar o número de casos possíveis .... 5 pontos

Indicar o número de casos favoráveis .... 6 pontos

Indicar o valor da probabilidade pedida .... 4 pontos

4.2 .... **20 pontos**

Apresentar o significado de $P(X|Y)$, no contexto da situação descrita .... 5 pontos

Indicar o número de casos possíveis .... 5 pontos

Indicar o número de casos favoráveis .... 6 pontos

Indicar o valor da probabilidade pedida .... 4 pontos

5. .... **20 pontos**

Tópicos de resposta:

- explicar o número de casos favoráveis;
- explicar o número de casos possíveis;
- explicar a aplicação da regra de Laplace.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são apresentados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	20
5	Na resposta, são apresentados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	17
4	Na resposta, apenas são apresentados dois dos três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	14
3	Na resposta, apenas são apresentados dois dos três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	11
2	Na resposta, apenas é apresentado um dos três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	7
1	Na resposta, apenas é apresentado um dos três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	5