Proposta de Resolução

GRUPO I

1. O número máximo de códigos é dado por:
$^{3}A_{2} \times 10^{3} = 3 \times 2 \times 10^{3} = 6000$

Resposta: (C)

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\ln(\sin(x)) - \ln(2x) \right] = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[\ln\left(\frac{\sin(x)}{2x} \right) \right] = \ln\left(\frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \right) = \ln\left(\frac{1}{2} \right) = -\ln(2)$

Resposta: (C)

3. Inclinação da reta *t*: $\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

Declive da reta *t*: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \sqrt{3}$

Resposta: (A)

4. $z_2 = a$, $a \in \mathbb{R}^-$ e $z_1 = bi$, $b \in \mathbb{R}^+$
$z_1 + z_2 = bi + a = a + bi$; $a \in \mathbb{R}^-$ e $b \in \mathbb{R}^+$
$\frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$. A imagem geométrica é um ponto do 3.º quadrante, atendendo a que $\frac{a}{a^2 + b^2} < 0 \land -\frac{b}{a^2 + b^2} < 0$.

Resposta: (A)

5. Se a reta $x = 1$ é assíntota vertical do gráfico de *f*, então $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$).

Então, $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{f(x)} = 0$. Daqui resulta que $a = 0$.
Se a reta $y = -2x + 3$ é assíntota vertical do gráfico de *f* quando $x \to +\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (-2x + 3) \right) = 0$, ou seja, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) + 2x \right) = 3$. Daqui resulta que $b = 3$.
Assim, $a + b = 3$.

Resposta: (B)

6. $(g \circ f)'(-1) = f'(-1) \times g'(f(-1))$

A abcissa do ponto do gráfico de *f* que tem ordenada 3 coincide com a abcissa do ponto da reta *r* que tem ordenada 3. Assim, tem-se:

$3 = -5x - 2 \Leftrightarrow x = -1$

$A(-1, 3)$, sendo $f(-1) = 3$ e $f'(-1) = -5$.

$g(x) = \ln(x^2 + 1)$

$$g'(x) = \left(\ln(x^2+1)\right)' = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$g'(3) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$(g \circ f)'(-1) = f'(-1) \times g'(f(-1)) = -5 \times \frac{3}{5} = -3$$

Resposta: (A)

7. $u_n = 2 \times 2^{-n} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo igual a 1.

$$S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - 2^{-n}\right)$$

$$\lim\left(f(S_n)\right) = \lim \log_2\left(2\left(1 - 2^{-n}\right)\right) = \log_2\left(2(1-0)\right) = 1$$

Resposta: (A)

8. $|z_A| = |2\text{i}| = 2$ e $|z_B| = |-1 + \text{i}| = \sqrt{2}$

Um número complexo *z* tem imagem geométrica pertencente à coroa circular se e só se $\sqrt{2} \le |z| \le 2$.

$$\left|-\sqrt{2} - \text{i}\right| = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

Resposta: (D)

GRUPO II

1.1. Quaisquer três pontos dos seis pontos dados são não colineares, podendo ser os vértices de um triângulo.

Assim, o número total de triângulos é dado por: ${}^{6}C_3 = 20$

Para a reta *r* intersetar o triângulo este deve ter vértices em ambos os semiplanos definidos pela reta *r*.

O número de triângulos nestas condições é dado por: ${}^{2}C_1 \times {}^{4}C_2 + {}^{2}C_2 \times {}^{4}C_1 = 2\times 6 + 1\times 4 = 16$

Assim, a probabilidade pedida é dada por: $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

Resposta: $\frac{4}{5}$

1.2. Se a reta *r* não interseta o triângulo, então os três vértices fazem parte do conjunto $\{B, C, D, E\}$.

Número de casos possíveis: ${}^{4}C_3 = 4$

Se *B* é um dos vértices, então os outros dois são escolhidos entre os elementos do conjunto $\{C, D, E\}$.

Número de casos favoráveis: ${}^{3}C_2 = 3$

Probabilidade pedida: $\frac{3}{4}$

Resposta: $\frac{3}{4}$

2. $z^2 + 4z + 16 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-4 \pm \sqrt{16-64}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-4 \pm \sqrt{48\mathrm{i}^2}}{2}$

$z = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} \Leftrightarrow z = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} \quad \vee \quad z = -2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Se $z = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$\overline{z}^2 + 4\overline{z} = \left(-2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^2 + 4\left(-2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right) = 4 + 8\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 12 - 8 - 8\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -16$

Se $z = -2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$\overline{z}^2 + 4\overline{z} = \left(-2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^2 + 4\left(-2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right) = 4 - 8\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 12 - 8 + 8\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -16$

Daqui resulta que: $\overline{z}^2 + 4\overline{z} = -16$

3.1. $f(x)=\sqrt{1+\sin x}-1$

$$f'(x)=\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)'=\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}} \text{ e } x\neq\frac{3\pi}{2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \wedge x\in[0,2\pi]\backslash\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	+	+	0	–		+	+
f	0	↗	$\sqrt{2}-1$	↘	-1	↗	0

A função *f* é estritamente crescente em: $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$; $\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$

A função *f* é estritamente decrescente em: $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

Extremos:

- mínimos: 0 e –1 (–1 é mínimo absoluto)
- máximos: 0 e $\sqrt{2}-1$ ($\sqrt{2}-1$ é máximo absoluto)

3.2. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}+1}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$$

4.1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(\sin^2x-\cos(2x)\right)=1-(-1)=2$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{e^{2x-\pi}-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{e^{2x-\pi}-1}{\frac{1}{2}(2x-\pi)}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{e^{2x-\pi}-1}{(2x-\pi)}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

Fazendo $2x-\pi=y$ Se $x\to\frac{\pi}{2}^-$, então $y\to0^-$.

Assim,

$$2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{e^{2x-\pi}-1}{(2x-\pi)}=2\lim_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}=2\times 1=2$$

Atendendo a que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ conclui-se que a função f é contínua para $x=\frac{\pi}{2}$.

4.2. $g(x)=\sin^2 x-\cos(2x)\ \wedge\ x\in\left]\frac{\pi}{2},2\pi\right[$

$g'(x)=\left(\sin^2 x-\cos(2x)\right)'=2\sin x.\cos(x)+2\sin(2x)=\sin(2x)+2\sin(2x)=3\sin(2x)$

$g''(x)=\left(3\sin(2x)\right)'=6\cos(2x)$

$g''(x)=0\ \wedge\ x\in\left]\frac{\pi}{2},2\pi\right[\Leftrightarrow\cos(2x)=0\ \wedge\ x\in\left]\frac{\pi}{2},2\pi\right[$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\quad\wedge\quad x\in\left]\frac{\pi}{2},2\pi\right[$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\quad\wedge\quad x\in\left]\frac{\pi}{2},2\pi\right[$

$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}\ \vee\ x=\frac{5\pi}{4}\ \vee\ x=\frac{7\pi}{4}$

	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f''(x)$		–	0	+	0	–	0	+	
f		$\frown$	$\frac{1}{2}$	$\smile$	$\frac{1}{2}$	$\frown$	$\frac{1}{2}$	$\smile$	

Coordenadas dos pontos de inflexão: $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{7\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$

5.1. $\cos\alpha=\frac{\overline{OB}}{6}\Leftrightarrow\overline{OB}=6\cos\alpha$; $\sin\alpha=\frac{\overline{OV}}{6}\Leftrightarrow\overline{OV}=6\sin\alpha$ e $\overline{OA}=12\cos\alpha$

Se $\alpha=\frac{\pi}{4}$, então $\overline{OB}=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$; $\overline{OV}=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$ e $\overline{OA}=12\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$

Volume da pirâmide é dado por: $\frac{1}{3}\times\frac{\overline{OB}\times\overline{OA}}{2}\times\overline{OV}=\frac{1}{6}\left(3\sqrt{2}\times 6\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}\right)=18\sqrt{2}$

Volume da pirâmide [*OABV*] é igual a $18\sqrt{2}$.

5.2. Equação do plano *ABV*: $2x+4y+\sqrt{2}z=8$

Coordenadas do ponto *B* (interseção do plano *ABV* com *Oy*)

$B(0,y,0)$

$0+4y+0=8 \Leftrightarrow y=2$

$B(0,2,0)$

Coordenadas do ponto *V* (interseção do plano *ABV* com *Oz*)

$V(0,0,z)$

$0+0+\sqrt{2}z=8 \Leftrightarrow z=4\sqrt{2}$

$V\left(0,0,4\sqrt{2}\right)$

Neste caso, tem-se: $\overline{OB}=2$; $\overline{OV}=4\sqrt{2}$ e $\overline{BV}=6$

Assim, $\cos\alpha=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ e $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Como $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, tem-se:

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{9}-\frac{8}{9}=-\frac{7}{9}$$

Resposta: $\cos(2\alpha)=-\frac{7}{9}$

5.3. Volume da pirâmide é dado por:

$$\frac{1}{3}\times\frac{\overline{OB}\times\overline{OA}}{2}\times\overline{OV}=\frac{1}{3}\left(\frac{6\cos\alpha\times12\cos\alpha}{2}\times6\sin\alpha\right)=36\times\cos\alpha\times(2\sin\alpha\cos\alpha)=36\cos\alpha\sin(2\alpha)$$

Assim, $f(\alpha)=36\cos\alpha\sin(2\alpha)$.

6.1. As coordenadas do ponto *P*, em função de θ, são $(\cos\theta,\sin\theta)$.

O ponto *A* tem abcissa igual à de *P* e pertence ao gráfico da função *f*.

Então, as coordenadas de *A* são $(\cos\theta, f(\cos\theta))$.

$$f(\cos\theta)=2-\ln(\cos\theta+1)=\ln e^2-\ln(\cos\theta+1)=\ln\left(\frac{e^2}{\cos\theta+1}\right)$$

Se $\theta=\frac{\pi}{3}$ tem-se: $\left(\cos\frac{\pi}{3},\ln\left(\frac{e^2}{\cos\frac{\pi}{3}+1}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\ln\left(\frac{e^2}{\frac{3}{2}}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\ln\left(\frac{2e^2}{3}\right)\right)$

Coordenadas do ponto *A*: $\left(\frac{1}{2},\ln\left(\frac{2e^2}{3}\right)\right)$

6.2. O ponto *B* tem a mesma ordenada de *P* e pertence ao gráfico de *f*.

$B(x,\sin\theta)$ e $f(x)=\sin\theta$

$2-\ln(x+1)=\sin\theta \Leftrightarrow \ln(x+1)=2-\sin\theta \Leftrightarrow x+1=e^{2-\sin\theta} \Leftrightarrow x=e^{2-\sin\theta}-1$

Coordenadas do ponto *B*, em função de θ: $B\left(e^{2-\sin\theta}-1,\sin\theta\right)$

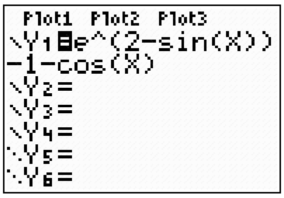
$\overline{PB}=e^{2-\sin\theta}-1-\cos\theta$

A distância de *P* a *B* é dada, em função de θ, por:

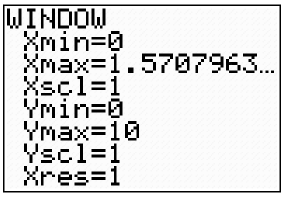
$d(\theta)=e^{2-\sin\theta}-1-\cos\theta$ e $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Recorrendo à calculadora gráfica tem-se:

1. Expressão analítica da função *d*:



2. Definição da janela de visualização: $x:\left[0\times\frac{\pi}{2}\right]$ e $y:[0\times10]$



3. Representação gráfica, assinalando-se o ponto de abcissa 1,24 (arredondada às décimas) ao qual corresponde a distância mínima de *P* a *B* (aproximadamente, 1,545).