Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

O teste é constituído por dois grupos, I e II.

O Grupo I inclui cinco questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui sete questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas.

Grupo I

● Os **cinco** itens deste grupo são de escolha múltipla.

● Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.

● Escreva, na sua folha de respostas, **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.

● **Não apresente cálculos nem justificações**.

● Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado *xOy*, 12 pontos dos quais quatro são colineares.

Quantos triângulos distintos podem ser definidos com estes 12 pontos?

(A) 56 **(B)** 216 **(C)** 220 **(D)** 104

2. Seja *g* uma função, de domínio *D*, definida por $g(x)=\ln\left(3^x+3^{1-x}-4\right)$.

Qual das seguintes opções pode ser o conjunto *D*?

(A) $[1,3[$ **(B)** $]0,1[$ **(C)** $]-\infty, 0[\cup]1,+\infty[$ **(D)** $]-\infty, 1[\cup]3,+\infty[$

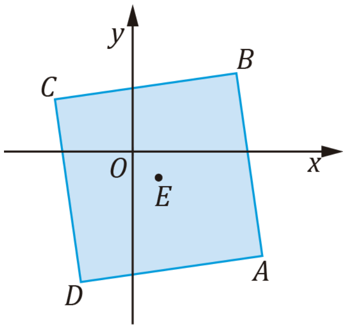
3. Na figura está representado, num plano munido de um referencial ortonormado *xOy*, um quadrado [*ABCD*].

Sabe-se que $E(1,-1)$ é o centro do quadrado e $B(4,3)$ é um dos seus vértices.

Quais são as coordenadas do vértice *A*?

(A) $(6,-2)$ **(B)** $(6,-3)$

(C) $(4,-5)$ **(D)** $(5,-4)$



4. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=a^x-b^x$, com $a>1$ e $a<b$.

Qual é o valor de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?

(A) $-\infty$ **(B)** 0

(C) $+\infty$ **(D)** 1

5. Considere a função *f*, definida em $]4-\ln 2\,,\,+\infty[$, por $f(x)=\dfrac{\ln\left(2e^{x}-e^{4}\right)}{x}$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** e^{4} **(D)** $+\infty$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** que entender necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre **o valor exato**.

1. Considere um prisma hexagonal regular.

1.1. Quantas retas distintas passam por dois vértices do prisma que não contêm qualquer aresta?

1.2. Pretende-se pintar as faces do prisma do modo seguinte:

- uma das bases é pintada de preto e a outra é pintada de branco;
- para pintar as faces laterais existem seis cores disponíveis (amarelo, verde, azul, vermelho, castanho e magenta);
- todas as faces são pintadas e duas faces com arestas comuns não podem ter a mesma cor;
- uma, e uma só, das faces é pintada de vermelho.

Nestas condições, de quantas maneiras diferentes é possível pintar o prisma?

1.3. Admita que o prisma está representado num referencial ortonormado *Oxyz*, de tal forma que uma das suas bases está contida no plano de equação $y=3$.

Escolhendo, ao acaso, dois vértices do prisma, qual é a probabilidade de definirem uma reta paralela ao eixo *Oy*? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2. Considere a função *f*, real de variável real, definida em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x+1}-1}{x^{2}-1} & \text{se } x<-1\\[2mm] 2 & \text{se } x=-1\\[2mm] \dfrac{2x+2}{8\sqrt{x^{2}+3}-16} & \text{se } x>-1\wedge x\neq 1\end{cases}$$

Mostre que $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\dfrac{1}{2}$.

3. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{12}\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{2i-1}=\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{3}+\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{5}+\ldots+\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{23}.$$

Prove que $\forall x\in\mathbb{R}^+, f(x)=-144\ln x$.

4. Determine o número natural *k* de modo que $\lim\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{n+1}=\frac{1}{\sqrt[k]{e^4}}$.

5. Considere a função *g*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{5x}{6\sqrt{2x^2+7}} & \text{se } x\leq 3\\[2ex] \dfrac{\ln(2x-5)}{x^2-2x-3} & \text{se } x>3\end{cases}$$

5.1. Estude a função *g* quanto à continuidade.

5.2. O gráfico da restrição da função *g* ao intervalo $]-\infty,3]$ tem uma assíntota horizontal.

Determine uma equação dessa assíntota.

6. Considere a função *h*, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$h(x)=\begin{cases}x\ln x & \text{se } 0<x\leq 2\\ e^x+2-e^{2x} & \text{se } x>2\end{cases}$$

6.1. Determine $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)$ e verifique se a reta de equação $x=0$ é uma assíntota ao gráfico de *h*.

6.2. Mostre que o gráfico de *h* não tem assíntotas horizontais.

6.3. Mostre que a função *h* tem pelo menos um zero no intervalo $\left]\frac{1}{e},\frac{e}{2}\right[$.

7. Seja *f* a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=e^{x+2}$.

Determine $f'(-1)$ usando a definição de derivada de uma função num ponto.

Cotações

Grupo I				
1	**2**	**3**	**4**	**5**
8	8	8	8	8

Grupo II												**Total**
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**2**	**3**	**4**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**7**	**200**
13	13	13	15	13	10	15	13	13	12	15	15	

PROPOSTA DE RESOLUÇÕES

Grupo I

1. Três pontos não colineares definem um triângulo.

Assim, temos:

- Nenhum dos quatro pontos colineares é vértice do triângulo.

  Número de triângulos distintos: ${}^{8}C_3 = 56$

- O triângulo tem um e um só vértice num dos quatro pontos colineares.

  Número de triângulos distintos: ${}^{4}C_1 \times {}^{8}C_2 = 112$

- O triângulo tem exatamente dois vértices entre os quatro pontos colineares.

  Número de triângulos distintos: ${}^{4}C_2 \times {}^{8}C_1 = 48$

Portanto, o número total de triângulos distintos é igual a $56 + 112 + 48 = 216$.

Resposta: (B)

2. $D = \left\{ x \in \mathbb{R} : 3^x + 3^{1-x} - 4 > 0 \right\}$

$$3^x + 3^{1-x} - 4 > 0 \Leftrightarrow 3^x + \frac{3}{3^x} - 4 > 0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 4 \times 3^x + 3 > 0$$

Cálculos auxiliares: $\left(3^x\right)^2 - 4 \times 3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3 \vee 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 0$$

Logo, $\left(3^x\right)^2 - 4 \times 3^x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1$

Portanto, D terá de estar contido em $]-\infty\, , 0[\cup]1\, , +\infty[$.

Resposta: (C)

3. Comecemos por determinar o vetor $\overrightarrow{EB}$.

$\overrightarrow{EB} = B - E = (4\, , 3) - (1\, , -1) = (3\, , 4)$

Os vetores $\vec{u}(4\, , -3)$ e $\vec{v}(-4\, , 3)$ são os vetores normais a $\overrightarrow{EB}$, com a mesma norma.

Assim, os vértices A e C do quadrado obtêm-se calculando $E + \vec{u} = (1,-1) + (4,-3) = (5,-4)$ e

$E + \vec{v} = (1,-1) + (-4,3) = (-3,2)$

Como o vértice A se situa no quarto quadrante, as coordenadas de A são $(5\, , -4)$.

Resposta: (D)

4. Como $1<a<b$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^x=0$ pois $\frac{a}{b}<1$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a^x-b^x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left[b^x\left(\frac{a^x}{b^x}-1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[b^x\left(\left(\frac{a}{b}\right)^x-1\right)\right]=+\infty\times(0-1)=-\infty$$

Resposta: (A)

5. $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^4\right)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[\mathrm{e}^x\left(2-\frac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^x}\right)\right]}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\mathrm{e}^x+\ln\left(2-\frac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln\left(2-\frac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^x}\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2-\frac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^x}\right)}{x}=1+\frac{\ln 2}{+\infty}=1+0=1$$

Resposta: (B)

Grupo II

1.1. Sabe-se que dois pontos definem uma reta.

No caso de se ter:

- retas definidas por dois vértices do prisma, um de cada base, e que não contenham qualquer aresta do prisma, o número de retas é igual a $6\times5=30$ (para cada vértice de uma base podem-se escolher cinco vértices da outra base);
- retas definidas por dois vértices do prisma, ambos da mesma base, e que não contenham qualquer aresta do prisma, o número de retas é igual a $\left({}^6C_2-6\right)\times2=18$ (para cada base do prisma, ao número total de retas que se podem definir com os seis vértices $\left({}^6C_2\right)$ retiram-se as seis arestas).

Portanto, há 48 retas nas condições exigidas no enunciado.

Em alternativa:

${}^{12}C_2-18=66-18=48$ (total de retas definidas pelos 12 vértices – número de arestas)

1.2. A primeira face é pintada de vermelho (há, portanto, apenas uma possibilidade).

Para a segunda face há cinco possibilidades (qualquer cor exceto vermelho).

Para a terceira face há quatro possibilidades (qualquer cor exceto vermelho e a da segunda face).

Para a quarta face há quatro possibilidades (qualquer cor exceto vermelho e a da terceira face).

Para a quinta face há quatro possibilidades (qualquer cor exceto vermelho e a da quarta face).

Para a sexta face há quatro possibilidades (qualquer cor exceto vermelho e a da quinta face).

Portanto, há $1\times5\times4^4=1280$ maneiras diferentes de pintar o prisma.

1.3. Número de casos possíveis: ${}^{12}C_2=66$ (existem 12 vértices num prisma hexagonal, dos quais se escolhem dois).

Número de casos favoráveis: 6 (para que os vértices escolhidos definam uma reta paralela ao eixo Oy, têm de pertencer à mesma aresta lateral. Como existem seis arestas laterais, existem seis casos favoráveis).

Atendendo à regra de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{6}{{}^{12}C_2}=\frac{1}{11}$.

2.

- $$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{e^{x+1}}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to-1^-}\frac{e^{x+1}-1}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to-1^{-1}}\frac{e^{x+1}-1}{x+1}\times\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to-1^-}\frac{e^{x+1}-1}{x+1}\times\left(\frac{1}{-2}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1^{-1}}\frac{e^{x+1}-1}{x+1}$$

Fazendo a mudança de variável $y=x+1\,;x\to-1^-\Rightarrow y\to0^-$:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\frac{1}{2}\lim_{y\to0^-}\frac{e^y-1}{y}=-\frac{1}{2}\times1=-\frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{2x+2}{8\sqrt{x^2+3}-16}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\frac{1}{8}\lim_{x\to-1^+}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+3}-2}=$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{x\to-1^+}\frac{(2x+2)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\frac{1}{8}\lim_{x\to-1^+}\frac{2(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-2^2}=$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{x\to-1^+}\frac{2(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2+3-4}=\frac{1}{4}\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2-1}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to-1^+}\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x-1}=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{4}+2}{-2}=-\frac{1}{2}$$

Como $\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x)$, então existe $\lim_{x\to-1} f(x)$ e é igual a $-\frac{1}{2}$.

3. $f(x)=\sum_{i=1}^{12}\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{2i-1}=$

$$=\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{1}+\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{3}+\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{5}+\ldots+\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{23}=$$

$$=\ln\left(\frac{1}{x}\right)+3\ln\left(\frac{1}{x}\right)+5\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ldots+23\ln\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$\ln x^{p}=p\ln x,\forall x\in\mathbb{R}^{+}$

$$=(1+3+5+\ldots+23)\times\ln\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\frac{1+23}{2}\times 12\times\ln x^{-1}=$$

Soma de 12 termos consecutivos de uma progressão aritmética (a_n)

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\times n$

$$=144\times(-\ln x)=$$

$$=-144\ln x$$

4. $\lim\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{n+1}=\frac{1}{\sqrt[k]{e^{4}}}$

Usando o algoritmo da divisão inteira de polinómios:

$$\begin{array}{r|l} 2n+1 & 2n+2 \\ \cline{2-2} -2n-2 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

Assim:

$$\lim\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{n+1}=\frac{1}{\sqrt[k]{e^{4}}}\Leftrightarrow\lim\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)^{n+1}=\frac{1}{e^{\frac{4}{k}}}\Leftrightarrow\lim\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{n+1}\right)^{n+1}=e^{-\frac{4}{k}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{4}{k}}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}=-\frac{4}{k}\Leftrightarrow k=8$$

Portanto, $k=8$.

5.1.

- No intervalo $]-\infty,3[$, a função g é contínua, pois é o quociente de duas funções contínuas: uma que é uma função polinomial $(x\rightarrow 5x)$ e outra que é o produto de uma função constante $(x\rightarrow 2)$ pela raiz quadrada de uma função polinomial $\left(x\rightarrow\sqrt{2x^{2}+7}\right)$.
- No intervalo $]3,+\infty[$, a função g é contínua, pois é o quociente de duas funções contínuas: uma que é a composta da função logarítmica com uma função polinomial $(x\rightarrow\ln(2x-5))$ e outra que é uma função polinomial $(x\rightarrow x^{2}-2x-3)$.

- Continuidade em $x=3$:

  - $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{5x}{2\sqrt{2x^2+7}}=\dfrac{5\times 3}{6\sqrt{2\times 3^2+7}}=\dfrac{1}{2}$

  - $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\ln(2x-5)}{x^2-2x-3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\ln(2x-5)}{(x-3)(x+1)}=$

	1	−2	−3
3		3	3
	1	1	0

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\ln(2x-5)}{x-3}\times\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x+1}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\ln(2x-5)}{x-3}\times\frac{1}{4}=$$

Fazendo a mudança de variável $y=x-3$, vem $x=y+3$ e

$x\to 3^+ \Rightarrow y\to 0^+$:

$$\lim_{x\to 3^+} g(x)=\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln\left[2(y+3)-5\right]}{y}\times\frac{1}{4}=2\lim_{2y\to 0^+}\frac{\ln(2y+1)}{2y}\times\frac{1}{4}=2\times 1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

- $g(3)=\dfrac{1}{2}$

Como $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=g(3)$, a função é contínua em $x=3$.

Portanto, a função *g* é contínua em $\mathbb{R}$.

5.2. $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x}{\sqrt{2x^2+7}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x}{\sqrt{x^2\left(2+\frac{7}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x}{|x|\sqrt{2+\frac{7}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x}{-x\sqrt{2+\frac{7}{x^2}}}=$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{5}{-\sqrt{2+\frac{7}{x^2}}}=\frac{5}{-\sqrt{2+0}}=-\frac{5}{\sqrt{2}}=-\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $y=-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ é a equação reduzida da assíntota horizontal do gráfico da restrição da função *f* ao intervalo $]-\infty, 3]$.

6.1. $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)\overset{(0\times\infty)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

Fazendo a mudança de variável $y=\dfrac{1}{x}$, $x=\dfrac{1}{y}$ e $x\to 0^+\Rightarrow y\to +\infty$.

Assim:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x)=\lim_{y\to +\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y}=\lim_{y\to +\infty}\frac{\ln\left(y^{-1}\right)}{y}=\lim_{y\to +\infty}\frac{-\ln y}{y}=-\lim_{y\to +\infty}\frac{\ln y}{y}=0$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ é um número real e $D_h = \mathbb{R}^+$, podemos concluir que a reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de h.

6.2. Como $D_h = \mathbb{R}^+$ é minorado mas não é majorado vamos calcular $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$.

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(e^x + 2 - e^{2x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to +\infty} \left[e^{2x}\left(\frac{1}{e^x} + \frac{2}{e^{2x}} - 1\right)\right] = +\infty \times (0+0-1) = -\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$ não é um número real podemos concluir que o gráfico de h não tem assíntotas horizontais.

6.3. A função h é contínua no intervalo $]0,2]$ pois é definida pelo produto de duas funções contínuas: uma função afim e uma função logarítmica.

Como $\left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right] \subset]0,2]$, então, a função h também é contínua no intervalo $\left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right]$.

Por outro lado, temos que: $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,37$ e $h\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{e}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right) \approx 0,42$

Como $h\left(\frac{1}{e}\right) \times h\left(\frac{e}{2}\right) < 0$ e a função h é contínua no intervalo $\left[\frac{1}{e}, \frac{e}{2}\right]$, pelo corolário do Teorema de Bolzano podemos garantir que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $\left]\frac{1}{e}, \frac{e}{2}\right[$.

7.

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1+h+2} - e^1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h+1} - e}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e\left(e^h - 1\right)}{h} = e \times \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e \times 1 = e$$

Portanto, $f'(-1) = e$.