Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

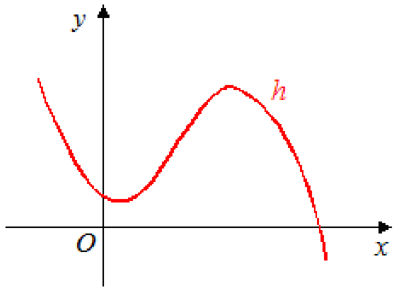
Duração: 90 minutos **| Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

1. Na figura encontra-se parte do gráfico de uma função *h*, de domínio $\mathbb{R}$.

Sejam h' e h'' a primeira e a segunda derivadas de *h*, respetivamente.



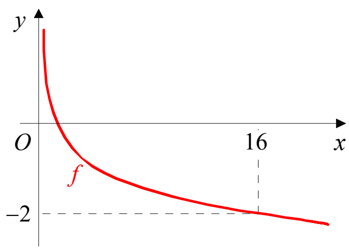
Admita que estas duas funções também têm domínio $\mathbb{R}$.

Qual das expressões seguintes designa um número negativo?

(A) $h(0)-h'(0)$ **(B)** $h'(0)\times h''(0)$

(C) $h(0)+h''(0)$ **(D)** $h(0)\times h''(0)$

2. Na figura está parte da representação gráfica da função f definida, para um certo valor de $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, por $f(x)=-\log_a x$.



O valor de $f(128)$ é:

(A) -7 **(B)** $-\frac{7}{2}$ **(C)** -3 **(D)** $-\frac{5}{2}$

3. Sabe-se que f é uma função de domínio $\mathbb{R}$, que admite primeira e segunda derivadas, f' e f'', em todos os pontos do domínio e que:

- $f'(0)=0$
- f' é estritamente crescente.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) f tem um máximo relativo para $x=0$.

(B) O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo.

(C) O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0,+\infty[$.

(D) O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

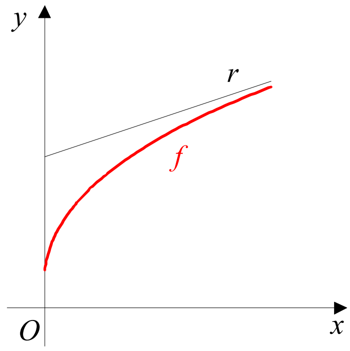
4. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \frac{n}{2}$.

O valor de $\lim\left(1+\frac{\sqrt{2}}{u_n}\right)^{2u_{n+1}}$ é igual a:

(A) $e^{\sqrt{2}}$ **(B)** $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **(C)** $e^{2\sqrt{2}}$ **(D)** $e^{-\sqrt{2}}$

5. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $[0, +\infty[$.

A reta r, de equação $y = \frac{1}{3}x + 2$, é assíntota ao gráfico de f.



Seja h a função definida em $[0, +\infty[$ por $h(x) = \frac{x}{f(x)}$.

O gráfico de h tem uma assíntota horizontal.

Qual é a equação que define essa assíntota?

(A) $y = \frac{1}{3}$ **(B)** $y = \frac{1}{2}$

(C) $y = 2$ **(D)** $y = 3$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)+2x}{3x} & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à continuidade no ponto 0.

(No caso de f não ser contínua no ponto 0, deve indicar, justificando, se é contínua à esquerda ou à direita, nesse ponto.)

2. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)$.

2.1. Mostre que f é uma função par.

2.2. Mostre que o gráfico de f tem uma assíntota para $x \to +\infty$.

2.3. Estude a função *f* quanto à monotonia e à existência de extremos.

2.4. Determine os valores de *k* sabendo que a equação $f(x)=k$ é impossível em $\mathbb{R}$.

3. Seja a função real de variável real, *h*, definida por $h(x)=e^{2x}-3e^{x}+2$.

3.1. Calcule os zeros da função h.

3.2. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de *h* no ponto de abcissa 0.

3.3. Prove que *h* tem um ponto de inflexão e determine as suas coordenadas.

3.4. Mostre que existe, no intervalo $\left]\frac{1}{2},1\right[$, um e um só ponto do gráfico de *h* cuja abcissa é igual à ordenada. Recorrendo à calculadora gráfica, determine as coordenadas desse ponto.

Na sua resposta deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos visualizados, devidamente identificados;
- indicar as coordenadas do ponto com arredondamento às centésimas.

4.

4.1. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória e *A* e *B* dois acontecimentos $(A \subset S \text{ e } B \subset S)$.

Prove que $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)-P(A)+P\left(\overline{A} \cap B\right)=1-2P(A \cap B)$.

4.2. Num saco estão apenas bolas azuis e bolas vermelhas.

Todas as bolas estão numeradas: algumas com o número 1, outras com o número 2 e as restantes com o número 3.

Extrai-se, ao acaso, uma bola do saco e observa-se a cor e o número.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: "A bola extraída é azul." B: "A bola extraída tem um número primo."

Sabe-se que $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)-P(A)+P\left(\overline{A} \cap B\right)=\frac{1}{2}$ e $P(B \mid A)=\frac{3}{5}$.

Determine a probabilidade de sair uma bola azul com o número 1.

Sugestão: Tenha em consideração **4.1.**

FIM

Cotações

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
8	8	8	8	8	**40**

Grupo II

1.	2.1.	2.2.	2.3.	2.4.	3.1.	3.2.	3.3.	3.4.	4.1.	4.2.	Total
16	12	16	16	12	12	12	16	16	16	16	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1. Por observação do gráfico verifica-se que:

- $h(0) > 0$
- $h'(0) < 0$ (f é estritamente decrescente numa vizinhança de 0)
- $h''(0) > 0$ (a concavidade do gráfico de f é voltada para cima numa vizinhança de 0)

Logo:

$h(0) - h'(0) > 0$ ($h(0)$ e $-h'(0)$ são positivos)

$h'(0) \times h''(0) < 0$

$h(0) + h''(0) > 0$ ($h(0)$ e $h''(0)$ são positivos)

$h(0) \times h''(0) > 0$

Resposta: (B)

2. $f(x) = -\log_a x$

$f(16) = -2 \Leftrightarrow -\log_a 16 = -2 \Leftrightarrow \log_a 16 = 2 \Leftrightarrow 16 = a^2 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 4$

$f(x) = -\log_4 x$

$f(128) = -\log_4 128 = -\log_4\left(2^7\right) = -\log_4\left(4^{\frac{7}{2}}\right) = -\frac{7}{2}$

Resposta: (B)

3. Se $f'(0) = 0$ e f' é estritamente crescente, então:

$f'(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 0[$ e $f'(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

A opção **(A)** é falsa

Se f' é estritamente crescente, então $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, o gráfico f tem a concavidade voltada para cima.

Resposta: (D)

4. $$\lim\left(1+\frac{\sqrt{2}}{u_n}\right)^{2u_{n+1}} = \lim\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\frac{n}{2}}\right)^{2\frac{n+1}{2}} = \lim\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{n}\right)^{n} \times \lim\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{n}\right)^{1} = e^{2\sqrt{2}} \times 1 = e^{2\sqrt{2}}$$

Resposta: (C)

5. Se a reta de equação $y=\frac{1}{3}x+2$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{3}$.

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{f(x)}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

Se $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=3$, então a reta de equação $y=3$ é uma assíntota ao gráfico da função h.

Resposta: (D)

Grupo II

1. $$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)+2x}{3x}=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln(x+1)}{3x}+\frac{2}{3}\right]=\frac{1}{3}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times1+\frac{2}{3}=1$$

$f(0)=2$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2\right)=$$

$$=2\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=2\lim_{y\to0^-}\frac{e^{y}-1}{y}=2\times1=2 \qquad \left|\begin{array}{l}y=2x\\ x\to0^-\Rightarrow y\to0^-\end{array}\right.$$

Como $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, então f não é contínua em $x=0$.

No entanto, como $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$, f é contínua à esquerda no ponto 0.

2. $f(x)=\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)$, $D_f=\mathbb{R}$

2.1. $\forall x\in D_f\,,-x\in D_f$

$$f(-x)=\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)=\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Logo, f é uma função par.

2.2. Seja $y=mx+b$ a assíntota em $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[e^{x}\left(e^{-2x}+1\right)\right]}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{x}+\ln\left(e^{-2x}+1\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln\left(e^{-2x}+1\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{-2x}+1\right)}{x}=1+\frac{\ln(0+1)}{+\infty}=1+0=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{x}\left(e^{-2x}+1\right)\right)-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln e^{x}+\ln\left(e^{-2x}+1\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\ln\left(e^{-2x}+1\right)-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^{-2x}+1\right)=\ln(0+1)=0$$

A reta de equação $y=x$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

2.3. $$f'(x)=\frac{\left(e^{-x}+e^{x}\right)'}{e^{-x}+e^{x}}=\frac{-e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=0\Leftrightarrow-e^{-x}+e^{x}=0\Leftrightarrow e^{x}=e^{-x}\Leftrightarrow x=-x\Leftrightarrow2x=0\Leftrightarrow x=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	ln2 Mín.	$\nearrow$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

$f(0) = \ln 2$ é o mínimo absoluto de *f*.

2.4. Atendendo a **2.1.** e a **2.3.** e ao facto de *f* ser contínua, $D'_f = [\ln 2, +\infty[$.

Logo, a equação $f(x) = k$ é impossível se e só se $k \in]-\infty, \ln 2[$.

3.1. $h(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow e^x = 2 \vee e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = 0$$

Zeros de *h*: $\{0, \ln 2\}$

3.2. Seja $t:\ y = mx + b$ uma equação da reta tangente ao gráfico de *h* no ponto de abcissa 0.

$m = h'(0)$

$h'(x) = 2e^{2x} - 3e^x$

$h'(0) = 2e^0 - 3e^0 = 2 - 3 = -1$

$m = -1$

$y = -x + b$

$h(0) = e^0 - 3e^0 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

$y = -x$ é uma equação da reta *t*.

3.3. $h''(x) = 4e^{2x} - 3e^x$

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^{2x} - 3e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(4e^x - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x = 0 \vee 4e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \ln\frac{3}{4}$$

x	$-\infty$	$\ln\frac{3}{4}$	$+\infty$
h''	$-$	0	$+$
h	$\cap$	. P.I.	$\cup$

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, \ln\frac{3}{4}\right[$ e voltada para cima em $\left]\ln\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

$$h\left[\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right] = e^{2\ln\left(\frac{3}{4}\right)} - 3e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} + 2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{16}$$

$\left(\ln\frac{3}{4}, \frac{5}{16}\right)$ é o único ponto de inflexão do gráfico da função h.

3.4. Pretende-se provar que $\exists x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[: h(x) = x$

Seja *f* a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = h(x) - x$.

f é contínua em $\mathbb{R}$ (é a diferença de funções contínuas) e, portanto, é contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

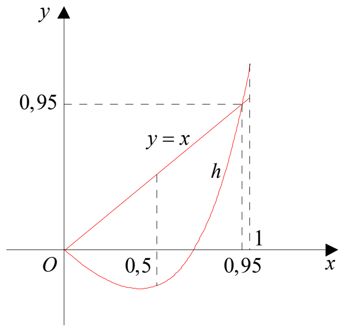
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = h\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = e^1 - 3e^{\frac{1}{2}} + 2 - \frac{1}{2} = e - 3\sqrt{e} + \frac{3}{2} \approx -0,7$$

$$f(1) = h(1) - 1 = e^2 - 3e^1 + 2 - 1 = e^2 - 3e + 1 \approx 0,2$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$

Portanto, o corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy garante que $\exists x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[: f(x) = 0$, ou seja,

$\exists x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[: h(x) = x$.



Recorrendo à calculadora determinou-se, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$,

as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos das funções $Y_1 = h(x)$ e $Y_2 = x$.

O resultado obtido, com aproximação às centésimas, foi

$(0{,}95\,;\,0{,}95)$.

4.1. $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) - P(A) + P\left(A \cap \overline{B}\right) =$

$= P\left(\overline{A \cap B}\right) - P(A) + P(A) - P(A \cap B) =$

$= 1 - P(A \cap B) - P(A \cap B) =$

$= 1 - 2P(A \cap B)$

4.2. $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) - P(A) + P\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 2P(A \cap B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2P(A \cap B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = P(A) \times \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(A) = \frac{5}{12}$

Os números das bolas são 1, 2 ou 3, sendo que 2 e 3 são primos. Logo, pretende-se a probabilidade de sair bola azul e não sair 2 nem 3, ou seja,

$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$