Novo Espaço – Matemática A 12.º ano

Proposta de teste de avaliação final [maio 2016]

Porto Editora

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- Para cada resposta, identifica o grupo e o item.
- Apresenta as tuas respostas de forma legível.
- Apresenta apenas uma resposta para cada item.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, seleciona a opção correta. Escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Numa turma há 24 alunos, 10 rapazes e 14 raparigas. A Sofia e o Rui fazem parte da turma. É formado um grupo de trabalho com cinco elementos selecionados ao acaso.

O número de maneiras de formar o grupo com três raparigas e dois rapazes de modo que a Sofia faça parte e o Rui não é:

(A) ${}^{10}C_2 \times {}^{14}C_3 - 1$ **(B)** ${}^{9}C_2 \times {}^{14}C_3$ **(C)** ${}^{10}C_2 \times {}^{13}C_3$ **(D)** ${}^{9}C_2 \times {}^{13}C_2$

2. Em relação a um triângulo equilátero $[ABC]$ sabe-se que –4 é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

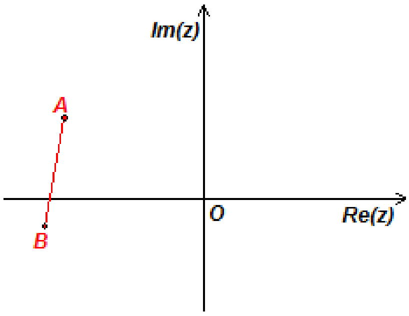
Pode concluir-se que o perímetro do triângulo $[ABC]$ é:

(A) $2\sqrt{6}$ **(B)** 12 **(C)** $6\sqrt{2}$ **(D)** $3\sqrt{2}$

3. Para qualquer número real k, a expressão $\log_2\left(\sqrt{\frac{1}{4^{1-k}}}\right)$ é igual a:

(A) $k-1$ **(B)** $(1-k)^2$ **(C)** $2-2k$ **(D)** 2^{1-k}

4. Na figura está representado, no plano complexo, o lado $[AB]$ de um eneágono regular de centro na origem O do referencial.



Sabe-se que o vértice B é a imagem geométrica do número complexo $z_B = 2cis\left(\frac{19\pi}{18}\right)$.

Nota: Um **eneágono** é um polígono com nove lados.

Pode concluir-se que o vértice A é a imagem geométrica do número complexo:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ **(B)** $-1+\sqrt{3}\,i$ **(C)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ **(D)** $-\sqrt{3}+i$

5. Sejam f e g funções reais de variável real, de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}$
- $g(x)=\mathrm{e}^{2x}-\ln\left(x^2+1\right)$

O valor de $(f\circ g)'(0)$ é:

(A) $\frac{5}{2}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 0

6. Considere-se a função f, real de variável real, definida por $f(x)=\log_2 x$.

Em relação a um referencial ortonormado Oxy, existe um ponto P do gráfico de f que satisfaz as seguintes condições:

- tem abcissa maior que 1;
- a distância de P à origem é 3.

Recorrendo à calculadora gráfica pode concluir-se que a abcissa do ponto P, arredondada às centésimas, é:

(A) $0,13$ **(B)** $2,65$ **(C)** $2,47$ **(D)** $2,52$

7. Seja (u_n) uma progressão geométrica.

Sabe-se que:

- $u_1 = 4$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2} u_n$

O termo geral u_n é igual a:

(A) 2^{3-n} **(B)** $6-2n$ **(C)** 2^{2n} **(D)** $\frac{1}{2^{n+1}}$

8. Num serviço de atendimento a doentes é feito o registo da duração de cada consulta.

Seja X a variável aleatória: "Duração da consulta em minutos".

A variável aleatória X segue, aproximadamente, uma distribuição normal de valor médio 25 minutos.

Sabe-se que $P(20 < X < 30) = 0{,}56$.

Escolhe-se, ao acaso, o registo de uma das consultas efetuadas. A probabilidade de a consulta ter uma duração superior a 30 minutos é:

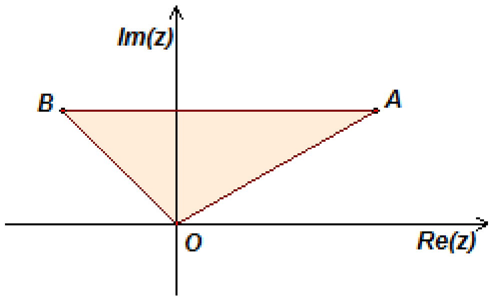
(A) 72% **(B)** 44% **(C)** 28% **(D)** 22%

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, as imagens geométricas dos números complexos z que satisfazem a condição $|z-\overline{z}|\leq 4 \wedge \frac{\pi}{6}\leq \arg(z)\leq \frac{3\pi}{4}$, no plano complexo, correspondem ao triângulo [*OAB*] representado na figura.



1.1. Sejam z_A e z_B os números complexos cujas imagens geométricas são, respetivamente, os pontos *A* e *B*.

a) Representa z_A na forma algébrica.

b) Representa z_B na forma trigonométrica.

1.2. Considera em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a equação $z^2=\overline{z}$.

Resolve a equação e representa, na forma algébrica, a solução cuja imagem geométrica não pertence ao triângulo [*OAB*].

2. Considera a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

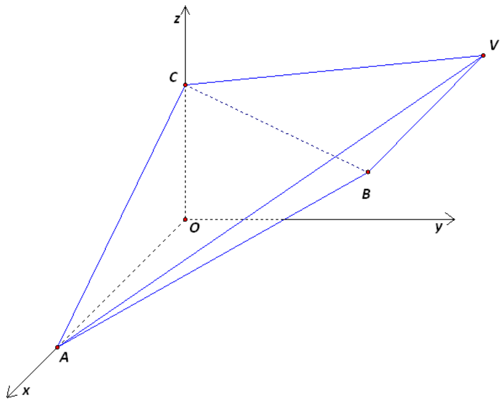
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{1-e^{2x}} & \text{se } x<0\\ -\dfrac{1}{2} & \text{se } x=0\\ \dfrac{\sin(\pi+x)}{2x} & \text{se } x>0\end{cases}$$

2.1. Estuda a continuidade da função *f* em $x=0$.

2.2. Mostra que a reta de equação $y=0$ é assíntota do gráfico de *f* quando *x* tende para $-\infty$ e quando *x* tende para $+\infty$.

3. Na figura está representada, em referencial ortonormado *Oxyz*, uma pirâmide [*ABCV*].

Sabe-se que:



- o plano *ABC* é definido pela equação $2x+5y+4z-16=0$;
- o vértice *A* pertence a *Ox*;
- o vértice *C* pertence a *Oz*;
- o vértice *B* tem coordenadas $(-2,\ 4,\ 0)$;
- o vértice *V* tem coordenadas $(7,\ 12,\ 8)$.

3.1. Mostra que [*ABC*] é um triângulo retângulo em *C*.

3.2. Seja *r* a reta que passa em *V* e é perpendicular ao plano *ABC*.

A reta *r* interseta o plano *ABC* no ponto *T*.

Determina as coordenadas de *T*.

4. Considera nove bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9.

As bolas com número ímpar são vermelhas e as bolas com número par são azuis.

4.1. As cinco bolas vermelhas são dispostas, ao acaso, lado a lado.

Determina a probabilidade de as bolas com os números 1 e 9 ficarem nos extremos.

Apresenta a resposta na forma de percentagem.

4.2. As nove bolas foram introduzidas num saco. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso duas bolas, uma após a outra, sem reposição, e observar a cor e o número.

a) Seja *X* a variável aleatória: “Número de bolas vermelhas retiradas”.

Constrói a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória *X*, apresentando as probabilidades na forma de fração irredutível.

b) Considera os acontecimentos:

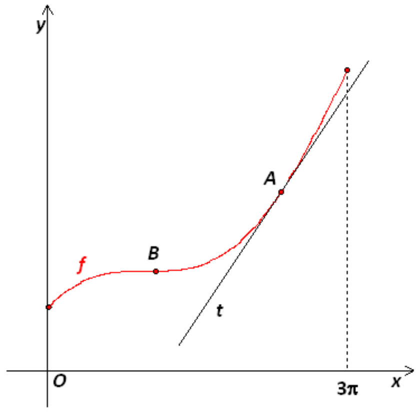
A: “A primeira bola retirada é vermelha.”

B: “A soma dos números das bolas retiradas é um número par.”

Determina a probabilidade condicionada $P\left(A|B\right)$.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

5. Na figura está representada a função f, de domínio $[0, 3\pi]$, definida por $f(x) = x + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.



Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico de f;
- a reta t é tangente ao gráfico de f no ponto A e é paralela à reta definida pela equação $-3x + 2y + 1 = 0$;
- B é um ponto de inflexão do gráfico de f.

5.1. Determina:

a) a abcissa do ponto A;

b) as coordenadas do ponto B.

5.2. Mostra, sem recorrer à calculadora, que existe um ponto P do gráfico de f em que o valor da ordenada é o triplo do da abcissa, sendo a abcissa $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

6. Considera a função h definida por:

$$h(x) = 3x - 2\ln x$$

Sejam A e B pontos do gráfico de h.
Sabe-se que:

- a abcissa de A é solução da equação $h(x) = 3x - 4$;
- a ordenada de B é o quadrado da abcissa.

Determina as coordenadas de M, ponto médio de $[AB]$, percorrendo as seguinte etapas:

- obter as coordenadas do ponto A, **sem recorrer à calculadora**;
- obter as coordenadas do ponto B, **recorrendo à calculadora** e apresentando os valores arredondados às milésimas;
- obter as coordenadas do ponto M, **recorrendo à calculadora** para efetuar os cálculos necessários, apresentado os valores arredondados às décimas.

FIM

Cotações															**Totais**
Grupo I	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**							
	5	5	5	5	5	5	5	5							**40**
Grupo II	**1.1. a)**	**1.1. b)**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2. a)**	**4.2. b)**	**5.1. a)**	**5.1. b)**	**5.2.**	**6.**	
	8	5	10	15	10	12	15	8	10	8	12	12	15	20	**160**
															200

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência:
αr
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;
r : raio)

Área de um polígono regular:
Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:
$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;
r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(r : raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$