Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo 1

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na sua folha de respostas, o número de cada item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}$.

Com elementos do conjunto *A*, quantos números de três algarismos é possível formar de modo que o produto dos algarismos seja um número par?

(A) 343 **(B)** 279 **(C)** 186 **(D)** 30

2. Seja *f* uma função derivável em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que a bissetriz dos quadrantes pares é tangente ao gráfico de *f* na origem do referencial.

Indique o valor de $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h^2 + 2h}$.

(A) 0 **(B)** -1 **(C)** $-\dfrac{1}{2}$ **(D)** $\dfrac{1}{2}$

3. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\left(\ln(x+4) - \ln x\right) \right]$?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** 4

4. Seja *f* uma função de domínio $\mathbb{R}^-$.

Se a reta de equação $y = -\dfrac{x}{2}$ é assíntota ao gráfico de *f*, então:

(A) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - \dfrac{x}{2} \right] = 0$ **(B)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(C) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ **(D)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$

5. Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \cos^2(2a)\sin(4a) - \sin^2(2a)\sin(4a)$$

Qual das expressões seguintes também define a função *g*?

(A) $\dfrac{\sin(8a)}{2}$ **(B)** $\cos(2a)\sin(4a)$

(C) $\cos(4a)$ **(D)** $\sin(4a)$

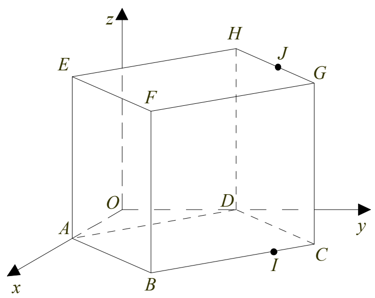
Grupo 2

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Resolva, em $\mathbb{N}$, a equação:

$$^{2n+1}C_3 = {}^{2n+2}C_n - {}^{2n+1}C_4$$

2. Na figura está representado, num referencial ortonormado *Oxyz*, um cubo [*ABCDEFGH*], cuja base [*ABCD*] está contida no plano *xOy* e a cota de qualquer vértice é não negativa.



Admita que:

- o vértice A pertence ao semieixo positivo Ox ;
- o vértice D pertence ao semieixo positivo Oy ;
- $\overline{OA} = \overline{OD}$;
- o ponto B tem coordenadas $(2,\ 1,\ 0)$;
- o ponto I pertence à aresta [BC] e é diferente de B e de C ;
- o ponto J pertence à aresta [HG] e é diferente de H e de G .

2.1. Considere os pontos B, C, G, H, I e J.
Escolhendo três destes pontos ao acaso, qual é a probabilidade de definirem um plano?
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Mostre que F e G têm coordenadas $\left(2,\ 1,\ \sqrt{2}\right)$ e $\left(1,\ 2,\ \sqrt{2}\right)$, respetivamente.

2.3. Seja M o ponto médio da aresta [FG].
Determine uma condição cartesiana que defina a reta BM.

3. Seja *f* a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}1+2xe^{3x} & \text{se } x\leq 2\\ \ln(x-2)-\ln x & \text{se } x>2\end{cases}$$

3.1. Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico.

3.2. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa 3.

4. Considere a função *g*, real de variável real, definida em $]-1,+\infty[$ por:

$$g(x)=\frac{1+\ln(x+1)}{x+1}$$

4.1. Prove que $\exists c\in\,]0,1[\,:\ g(c)=2c$.

4.2. Considere, num referencial ortonormado *xOy*, a representação gráfica da função *g* no intervalo $[0,\ 5]$.

Sabe-se que existe um ponto *A* do gráfico de *g* que pertence à circunferência de centro na origem e raio igual a 2.

Determine a abcissa do ponto *A* recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- indicar o valor pedido com aproximação às centésimas.

5. Considere a função *h*, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, definida por:

$$h(x)=\ln(\sin(x)+2)$$

5.1. Estude a função *h* quanto à monotonia e determine o seu contradomínio.

5.2. Estude a função *h* quanto ao sentido de concavidade do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Fim

Cotações

Grupo 1	Grupo 2										Total
	1.	2.1.	2.2.	2.3.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	
$5\times 8=40$	15	10	15	15	20	15	15	20	15	20	200

Proposta de resolução

Grupo 1

1. $^{7}A'_{3} - {}^{4}A'_{3} = 279$

$^{4}A'_{3}$: Números de três algarismos ímpares (o produto é ímpar)

$^{7}A'_{3}$: Todos os números de três algarismos que é possível formar

Resposta: (B)

2. A reta de equação $y = -x$ é tangente ao gráfico de f em (0 , 0).

$f(0) = 0$ e $f'(0) = -1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h^2 + 2h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 0}{h(h+2)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} \times \lim_{h \to 0} \frac{1}{h+2} =$$

$$= f'(0) \times \frac{1}{2} = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Resposta: (C)

3. $$\lim_{x \to +\infty} \left[x\left(\ln(x+4) - \ln x\right) \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x \ln\left(\frac{x+4}{x}\right) \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{4}{x}\right) \right] \quad (\infty \times 0)$$

Fazendo $y = \frac{4}{x}$ temos $x = \frac{4}{y}$ e, se $x \to +\infty$, então $y \to 0$, dado que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$.

Efetuando a mudança de variável:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{4}{x}\right) \right] = \lim_{y \to 0} \left[\frac{4}{y} \ln(1+y) \right] = 4 \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 4 \times 1 = 4$$

Resposta: (D)

4. Se a reta de equação $y = -\frac{x}{2}$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \to -\infty$, então:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{x}{2} \right) = -(-\infty) = +\infty$$

Resposta: (C)

5. $g(x) = \cos^2(2a)\sin(4a) - \sin^2(2a)\sin(4a) =$

$$= \sin(4a)\left[\cos^2(2a) - \sin^2(2a)\right] = \sin(4a)\cos(4a) =$$

$$\frac{1}{2} \times 2\sin(4a)\cos(4a) = \frac{1}{2} \times \sin(8a) = \frac{\sin(8a)}{2}$$

Resposta: (**A**)

Grupo 2

1. ${}^{2n+1}C_3 = {}^{2n+2}C_n - {}^{2n+1}C_4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow {}^{2n+1}C_3 + {}^{2n+1}C_4 = {}^{2n+2}C_n \Leftrightarrow$ ${}^{n}C_p + {}^{n}C_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$

$\Leftrightarrow {}^{2n+2}C_4 = {}^{2n+2}C_n \Leftrightarrow$ ${}^{n}C_p = {}^{n}C_{n-p}$

$\Leftrightarrow (4 = n \vee 4 = 2n + 2 - n) \wedge (n \in \mathbb{N} \wedge 2n + 2 \geq 4 \wedge 2n + 2 \geq n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n = 4 \vee n = 2) \wedge (n \in \mathbb{N} \wedge 2n \geq 2 \wedge n \geq -2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 4 \vee n = 2$

2.1. Número de casos possíveis: ${}^6C_3 = 20$

Número de casos favoráveis: ${}^3C_1 \times {}^3C_2 + {}^3C_2 \times {}^3C_1 = 18$ (três pontos não colineares definem um plano)

O número de casos favoráveis também é dado por $20 - 2 = 18$ dado que, entre os casos possíveis apenas existem dois em que os três pontos escolhidos são colineares (*B*, *I*, *C* e *G*, *J*, *H*).

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{18}{20} = \frac{9}{10}$.

2.2. $A(k,\ 0,\ 0)$, $k > 0$ (A pertence a Ox)

$D(0,\ k,\ 0)$, $k > 0$ (D pertence a Oy e tem ordenada igual à abcissa de A dado que $\overline{OA} = \overline{OD}$)

$B(2,\ 1,\ 0)$

$\overrightarrow{AB}(2-k,\ 1,\ 0)$

$\overrightarrow{AD}(-k,\ k,\ 0)$

Como $[ABCD]$ é um quadrado, temos $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$, pelo que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow (2-k,\ 1,\ 0) \cdot (-k,\ k,\ 0) = 0 \Leftrightarrow (2-k)(-k) + k = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2k + k^2 + k = 0 \Leftrightarrow k^2 - k = 0 \Leftrightarrow k(k-1) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 1$$

Como $k > 0$, temos $k = 1$, pelo que $A(1,\ 0,\ 0)$, $D(0,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{AB}(1,\ 1,\ 0)$ e $\overrightarrow{AD}(-1,\ 1,\ 0)$.

Seja a a medida da aresta do cubo.

$$a=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$$

Como a base $[ABCD]$ está contida no plano xOy, os vértices F e G têm cota $\sqrt{2}$.

$$C=A+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=A+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(1,\ 0,\ 0)+(1,\ 1,\ 0)+(-1,\ 1,\ 0)=(1,\ 2,\ 0)$$

Como $B(2,\ 1,\ 0)$ temos que $F\left(2,\ 1,\ \sqrt{2}\right)$. ($B$ é a projeção ortogonal de F no plano xOy e F tem cota $\sqrt{2}$)

Como $C(1,\ 2,\ 0)$ temos que $G\left(1,\ 2,\ \sqrt{2}\right)$. ($C$ é a projeção ortogonal de G no plano xOy e G tem cota $\sqrt{2}$)

2.3. $F\left(2,\ 1,\ \sqrt{2}\right)$, $G\left(1,\ 2,\ \sqrt{2}\right)$ e $B(2,\ 1,\ 0)$

Assim, o ponto M é o ponto de coordenadas $\left(\frac{2+1}{2},\ \frac{1+2}{2},\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \sqrt{2}\right)$.

$$\overrightarrow{BM}=M-B=\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \sqrt{2}\right)-(2,\ 1,\ 0)=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \sqrt{2}\right)$$

$-2\overrightarrow{BM}=-2\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \sqrt{2}\right)=\left(1,\ -1,\ -2\sqrt{2}\right)$ é um vetor diretor da reta BM.

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-2\sqrt{2}}\Leftrightarrow x-2=1-y=-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}z\Leftrightarrow x-2=1-y=-\frac{\sqrt{2}}{4}z$$

Portanto, uma condição cartesiana da reta BM é $x-2=1-y=-\frac{\sqrt{2}}{4}z$.

3.1. Estudemos a existência de assíntota horizontal quando $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+2xe^{3x}\right)=1+2\lim_{x\to-\infty}xe^{3x}\quad(\infty\times0)$$

Fazendo $y=-3x$, temos $x=-\frac{y}{3}$ e, se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=1+2\lim_{x\to-\infty}xe^{3x}=1+2\lim_{y\to+\infty}\left(-\frac{y}{3}e^{-y}\right)=1+2\times\left(-\frac{1}{3}\right)\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{e^y}\right)=$$

$$=1-\frac{2}{3}\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^y}{y}}\right)=1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}}=1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{+\infty}=1-\frac{2}{3}\times0=1$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$, podemos concluir que a reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f.

Estudemos, agora, a existência de uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x-2)-\ln x\right] \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1-\frac{2}{x}\right) = \ln 1 = 0\text{, dado que } \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) = 1$$

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

3.2. Seja $y = mx + b$ uma equação da reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa 3.

Para $x > 2$:

$$f'(x) = (\ln(x-2)-\ln x)' = (\ln(x-2))' - (\ln x)' =$$

$$= \frac{(x-2)'}{x-2} - \frac{x'}{x} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}$$

$$m = f'(3) = \frac{1}{3-2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Ponto de tangência:

$P(3, -\ln 3)$, dado que $f(3) = \ln(3-2) - \ln(3) = \ln 1 - \ln 3 = 0 - \ln 3 = -\ln 3$

Substituindo na equação $y = mx + b$, temos:

$$-\ln 3 = \frac{2}{3}\times 3 + b \Leftrightarrow -\ln 3 = 2 + b \Leftrightarrow b = -2 - \ln 3$$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa 3 é $y = \frac{2}{3}x - 2 - \ln 3$.

4.1. Pretende-se provar que $\exists c \in \left]0, 1\right[: g(c) = 2c$, ou seja, que $\exists c \in \left]0, 1\right[: g(c) - 2c = 0$.

Seja *h* a função definida por $h(x) = g(x) - 2x$. Então, pretende-se provar que $\exists c \in \left]0, 1\right[: h(c) = 0$.

A função *g* é contínua em $\left]-1, +\infty\right[$ pois é definida pelo quociente de duas funções contínuas: uma é a soma de uma função constante $(y = 1)$ com a função composta de uma função logarítmica com uma função afim $(y = \ln(x+1))$ e a outra é uma função afim $(y = x + 1)$.

Como $[0, 1] \subset \left]-1, +\infty\right[$, podemos concluir que a função *g* é contínua em $[0, 1]$.

Por outro lado, a função afim definida por $y = 2x$, por ser contínua em $\mathbb{R}$, é contínua em $[0, 1]$.

Portanto, a função *h* é contínua em $[0, 1]$ já que é a diferença de duas funções contínuas neste intervalo.

Temos, também, que:

$$h(0)=g(0)-2\times 0=\frac{1+\ln(0+1)}{0+1}-0=1+\ln 1=1+0=1>0$$

$$h(1)=g(1)-2\times 1=\frac{1+\ln(1+1)}{1+1}-2=\frac{1+\ln 2}{2}-2=$$

$$=\frac{1+\ln 2-4}{2}=\frac{\ln 2-3}{2}<0 \text{ dado que } \ln 2<3 \text{, pois } 2<\mathrm{e}^3 .$$

Portanto, como a função h é contínua em $[0\,,1]$ e $h(0)\times h(1)<0$, podemos concluir, pelo corolário do Teorema de Bolzano, que $\exists c\in\,]0\,,\,1[\,: h(c)=0$, ou seja, que $\exists c\in\,]0\,,1[\,: g(c)=2c$.

4.2. Seja a a abcissa do ponto A.

$A(a,\ g(a))$

Se A pertence à circunferência de centro na origem e raio igual a 2, então $\overline{OA}=2$.

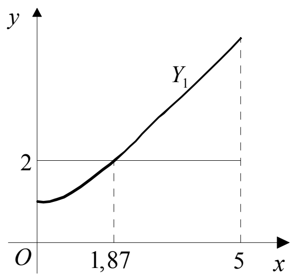
Como $\overline{OA}=\sqrt{a^2+[g(a)]^2}$, pretendemos resolver graficamente a equação:

$$\sqrt{a^2+[g(a)]^2}=2$$

No referencial estão representados os gráficos das funções $Y_1=\sqrt{x^2+[g(x)]^2}$, ou seja:

$$Y_1=\sqrt{x^2+\left[\frac{1+\ln(x+1)}{x+1}\right]^2} \text{ e } Y_2=2$$

bem como a abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos, obtida com a calculadora gráfica:



A abcissa do ponto A é aproximadamente igual a 1,87.

5.1. Determinemos uma expressão da derivada de h.

$$h'(x)=[\ln(\sin(x)+2)]'=\frac{(\sin(x)+2)'}{\sin(x)+2}=\frac{\cos x}{\sin(x)+2}$$

Determinemos, caso existam, os zeros de h'.

$$h'(x)=0 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin(x)+2}=0 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x = 0 \wedge \sin(x)+2 \neq 0) \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
h'	0	+	0
h	0	$\nearrow$	$\ln 3$
	Mín.		Máx.

Como $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $h'(x)>0$, podemos concluir que a função h é estritamente crescente.

Por outro lado:

- $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2\right]=\ln(-1+2)=\ln 1=0$
- $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\right]=\ln(1+2)=\ln 3$

Portanto, $D'_h=[0,\ \ln 3]$.

6.2. Determinemos uma expressão da segunda derivada da função h.

$$h''(x)=\left(\frac{\cos x}{\sin(x)+2}\right)'=$$

$$=\frac{(\cos x)'(\sin(x)+2)-\cos x(\sin(x)+2)'}{(\sin(x)+2)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x(\sin(x)+2)-\cos x(\cos x)}{(\sin(x)+2)^2}=$$

$$=\frac{-\sin^2(x)-2\sin(x)-\cos^2(x)}{(\sin(x)+2)^2}=$$

$$=\frac{-\left[\sin^2(x)+\cos^2(x)\right]-2\sin(x)}{(\sin(x)+2)^2}=$$

$$=\frac{-1-2\sin(x)}{(\sin(x)+2)^2}$$

Determinemos, caso existam, os zeros de h''.

$$h''(x)=0 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{-1-2\sin(x)}{(\sin(x)+2)^2}=0 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-1-2\sin(x)=0 \wedge (\sin(x)+1)^2 \neq 0\right) \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x)=-\frac{1}{2} \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
h''	+	+	0	–	-
h	0	$\cup$	$\ln\frac{3}{2}$	$\cap$	$\ln 3$
			P.I.		.

$$h\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\ln\left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2\right]=\ln\left(-\frac{1}{2}+2\right)=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

O gráfico da função h tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

O ponto de coordenadas $\left(-\frac{\pi}{6}, \ln\frac{3}{2}\right)$ é um ponto de inflexão do gráfico de h.