Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

1. A Maria tem um cofre protegido com um código composto por 5 algarismos de 1 a 9.

Sabe-se que o primeiro e o último são pares e diferentes entre si.

Quantos códigos existem nestas condições?

(A) 8748 **(B)** 11 664 **(C)** 14 580 **(D)** 18 225

2. Em qual das opções se apresentam valores de x e p que verificam a igualdade:

$$^{2006}C_{50} + {}^{2006}C_{51} + {}^{2007}C_{52} + {}^{2008}C_{53} = {}^{x}C_{p}$$

(A) $x = 2008$ e $p = 55$ **(B)** $x = 2009$ e $p = 54$

(C) $x = 2008$ e $p = 54$ **(D)** $x = 2009$ e $p = 53$

3. Uma variável aleatória X tem distribuição normal.

Sabe-se que $P(X > 100)$ é inferior a $P(X < 90)$.

Qual dos seguintes pode ser o valor médio da variável aleatória X?

(A) 92 **(B)** 95 **(C)** 98 **(D)** 101

4. O Sr. José tem carros para alugar. Desses carros oito, são de cor preta e dois de cor cinzenta.

Pediram-lhe que escolhesse seis automóveis para levar um grupo de visitantes a passear.

Sabendo que X designa a variável "número de automóveis de cor cinzenta escolhidos", qual é a distribuição de probabilidades que corresponde à variável X ?

(A)

X	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{20}$

(B)

X	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{^{8}C_5 \times 2}{^{10}C_6}$	$\frac{^{8}C_2}{^{10}C_6}$	$\frac{^{8}C_3}{^{10}C_6}$

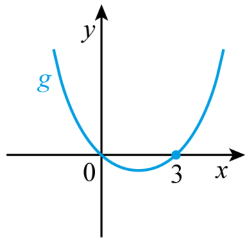
(C)

X	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

(D)

X	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{^{8}C_6}{^{10}C_6}$	$\frac{^{8}C_5 \times 2}{^{10}C_6}$	$\frac{^{8}C_4}{^{10}C_6}$

5. Considere a função g cujo gráfico está representado no referencial ortonormado xOy ao lado e a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 2 \times 4^{x-1} - 128$.



Qual é o valor de $\left(f^{-1} \circ g\right)(3)$?

(A) 3 **(B)** $\frac{7}{2}$ **(C)** 4 **(D)** $\frac{9}{2}$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Seja S, conjunto finito, o espaço de resultados associados a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis $\left(A \subset S \text{ e } B \subset S\right)$.

Sabe-se que $P(A) + P(B) = 2P(A \cap B) - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) + 1$.

1.1. Mostre que A e B **não** são independentes.

1.2. Considere a experiência aleatória que consiste no lançamento de dois dados cúbicos equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6 e o registo da soma dos números das faces voltadas para cima.

Sejam os acontecimentos:

A: "A soma é um número par"

B: "A soma é um número primo superior a 2"

Determine $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

Sugestão: Pode utilizar a igualdade do enunciado.

2. Uma caixa 1 tem duas bolas pretas e uma bola branca. Uma caixa 2 tem três bolas pretas e duas bolas brancas. As bolas são indistinguíveis ao tato.

2.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma bola da caixa 1 e colocá-la na caixa 2 e, posteriormente, retirar uma bola da caixa 2, observando a sua cor.
Sejam os acontecimentos:
A : "A bola retirada da caixa 1 é preta."
B : "A bola retirada da caixa 2 é branca."
Determine $P(A|B)$:

2.1.1. utilizando a fórmula da probabilidade condicionada;

2.1.2. recorrendo à Lei de Laplace (sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada).

2.2. Considere agora a experiência que consiste em tirar, ao acaso, uma bola da caixa 1, observar a cor e repor a bola na caixa. Repete-se esta experiência quatro vezes.
Qual a probabilidade de sair bola branca pelo menos três vezes?

3. Numa escola foi feito um inquérito sobre o número de alunos que chegaram atrasados à escola num dia de chuva.

Concluiu-se que:

- $\frac{3}{4}$ dos alunos que chegaram atrasados vieram no automóvel dos pais;
- $\frac{2}{3}$ dos alunos que vieram no automóvel dos pais chegaram atrasados;
- $\frac{1}{6}$ dos alunos chegaram atrasados.

Escolhido um aluno ao acaso qual é a probabilidade de, nesse dia, ter vindo para a escola no automóvel dos pais?

4. Numa dada faculdade, os alunos podem ingressar no programa Erasmus indo estudar para o estrangeiro durante um certo período de tempo.

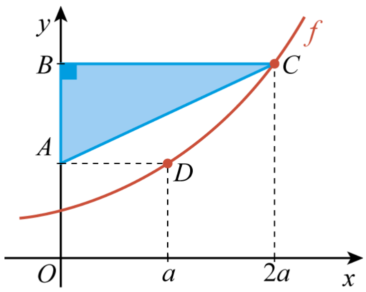
Relativamente aos alunos que frequentam este programa, sabe-se que:

- 70% dos estudantes optam por realizar o programa Erasmus num país europeu;
- 65% dos estudantes que realizam este programa concluem com sucesso todas as unidades curriculares;
- 60% dos estudantes que não concluem com sucesso todas as unidades curriculares estão a realizar este programa fora da Europa.

4.1. O André é um aluno desta faculdade e está no programa Erasmus na Alemanha.
Qual é a probabilidade de concluir com sucesso todas as unidades curriculares?
Apresente o resultado em forma de percentagem.

4.2. Tendo em conta que 200 alunos optaram por utilizar o programa Erasmus, calcule a probabilidade de, escolhendo três destes alunos ao acaso, pelo menos um ter concluído com sucesso todas as unidades curriculares.
Apresente o resultado na forma de dízima arredondada às milésimas.

5. Na figura estão representados, num referencial ortonormado *xOy*, parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=3^x$ e o triângulo $[ABC]$, retângulo em B .



Os pontos *D* e *C* pertencem ao gráfico de *f*.

O ponto D tem abcissa a e o ponto C tem abcissa $2a$ $(a>0)$.

Os pontos *A* e *B* pertencem ao eixo *Oy* e têm ordenadas iguais às de *D* e *C*, respetivamente.

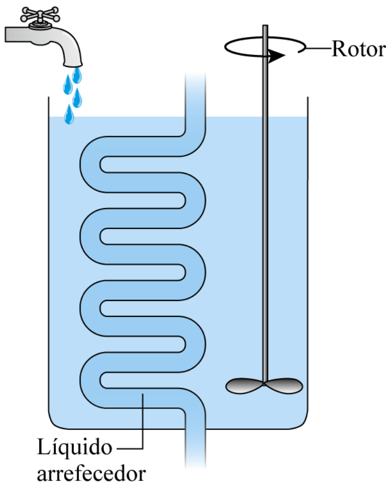
Determine o valor de a sabendo que a medida da área do triângulo $[ABC]$ é igual a $6a$.

6. Uma das formas de arrefecer um fluído é colocá-lo num tanque bem agitado por um rotor na presença de um líquido arrefecedor.

A temperatura da água deste tanque ao longo do tempo, em graus Celsius, é dada por:

$$T(t)=55-35\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)$$

com t em minutos tal que $t\geq 0$.



6.1. Determine $T(0)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} T(t)$ e interprete os valores obtidos no contexto da situação descrita.

6.2. Mostre que $\dfrac{T(t+2)-T(t)}{T(t+1)-T(t)}=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

7. Considere a função g cuja expressão analítica é $g\left(x\right)=9^{k}\times 3^{x^{2}-3k}-3$.

7.1. Sabendo que $x=3$ é um zero de g, determine o valor de k.

Nota: No caso de não ter conseguido resolver esta alínea considere na próxima questão $k=8$.

7.2. Considere, num referencial ortonormado xOy:

- Os pontos A e B pertencem ao gráfico de g e O corresponde à origem do referencial.
- O ponto A corresponde à interseção do gráfico da função g com a bissetriz dos quadrantes ímpares.
- O ponto B é um ponto tal que $\overline{OA}=\overline{OB}$.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a medida da área do triângulo $[OAB]$.

Na sua resposta deve:

- Reproduzir, num referencial ortonormado xOy, o gráfico de g no intervalo $[-3,3]$.
- Apresentar o desenho do triângulo $[OAB]$.
- Indicar as coordenadas do ponto A, com cinco casas decimais.
- Apresentar a medida da área do triângulo arredondado às centésimas.

FIM

Cotações

Grupo I:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
Cotação	8	8	8	8	8	**40**

Grupo II:

Questões	**1.1.**	**1.2.**	**2.1.1.**	**2.1.2.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	
Cotação	15	10	10	10	10	15	10	10	15	10	15	10	20	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1.

Par								Par		
4	$\times$	9	$\times$	9	$\times$	9	$\times$	3	=	8748

Resposta: (A)

2. $\underbrace{{}^{2006}C_{50} + {}^{2006}C_{51}}_{{}^{2007}C_{51}} + {}^{2007}C_{52} + {}^{2008}C_{53} = \underbrace{{}^{2007}C_{51} + {}^{2007}C_{52}}_{{}^{2008}C_{52}} + {}^{2008}C_{53} = {}^{2008}C_{52} + {}^{2008}C_{53} = {}^{2009}C_{53}$

Resposta: (D)

3. Sabe-se que: $P(X > 100) < P(X < 90) \Leftrightarrow |\mu - 90| < |100 - \mu|$

- Se $\mu = 92$:

  $2 < 8$ Verdade

- Se $\mu = 95$:

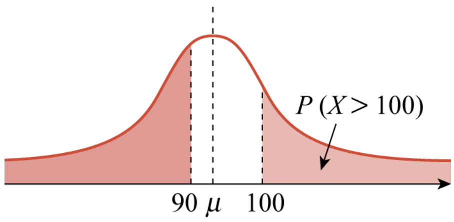
  $5 < 5$ Falso

- Se $\mu = 98$:

  $8 < 2$ Falso

- Se $\mu = 101$:

  $11 < 1$ Falso



Resposta: (A)

4. $X: 0, 1, 2$

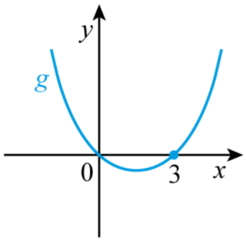
$$P(X = 0) = \frac{{}^{8}C_6}{{}^{10}C_6}$$

$$P(X = 1) = \frac{{}^{8}C_5 \times 2}{{}^{10}C_6}$$

$$P(X = 2) = \frac{{}^{8}C_4}{{}^{10}C_6}$$

Resposta: (D)

5. Pelo gráfico, $g(3)=0$.



$\left(f^{-1}\circ g\right)(3)=f^{-1}\left(g(3)\right)=f^{-1}(0)=?$

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2\times 4^{x-1}-128=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\times 4^{x-1}=128 \Leftrightarrow \left(2^2\right)^{x-1}=\dfrac{128}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2x-2}=2^6 \Leftrightarrow 2x-2=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4$

$f(4)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(0)=4$

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Resposta: (C)

Grupo II

1.1. $P(A)+P(B)=2P(A\cap B)-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)+P(B)=2P(A\cap B)-P\left(\overline{A\cup B}\right)+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)+P(B)=2P(A\cap B)-\left[1-P(A\cup B)\right]+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)+P(B)=2P(A\cap B)-\cancel{1}+P(A\cup B)+\cancel{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)+P(B)=2P(A\cap B)+P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{P(A)}+\cancel{P(B)}-\cancel{P(A)}-\cancel{P(B)}=P(A\cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=0$

Sabemos que: A e B são independentes $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

Como $P(A)>0$ e $P(B)>0$, então $P(A)\times P(B)>0$, logo $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$ e, consequentemente, A e B não são independentes.

1.2. $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=?$

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(A)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2};\quad P(B)=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$$
$$P(A\cap B)=0$$

$$P(A)+P(B)=2\underbrace{P(A\cap B)}_{0}-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{7}{18}=2\times0-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\frac{18}{18}-\frac{9}{18}-\frac{7}{18}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\frac{2}{18}\Leftrightarrow$$

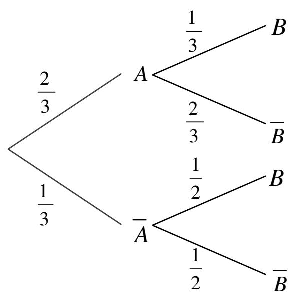
$$\Leftrightarrow P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\frac{1}{9}$$

Ou

Através do esquema podemos concluir que $\overline{A}\cap\overline{B}$ corresponde à soma igual a 9.

Assim, $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

2.1.1. $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$



$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P\left(\overline{A}\cap B\right)=$$

$$=\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=\frac{4}{18}+\frac{3}{18}=\frac{7}{18}$$

Então, $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{18}}=\frac{2\times18}{9\times7}=\frac{4}{7}$.

2.1.2. $P(A|B)$ é a probabilidade de a bola retirada da caixa 1 ser preta sabendo que a bola retirada da caixa 2 é branca.

Número de casos possíveis:

Há duas situações a considerar: a bola retirada da caixa 1 (e introduzida na caixa 2) é preta ou é branca:

1.º Preta retirada da caixa 1 e Branca retirada da caixa 2

$$2 \quad\times\quad 2$$

2.º Branca retirada da caixa 1 e Branca retirada da caixa 2

$$1 \quad\times\quad 3$$

Há, portanto, $2\times2+1\times3=7$ casos possíveis.

Número de casos favoráveis:

De entre os casos possíveis apenas os $2\times 2=4$ da 1.ª situação são favoráveis.

$$P(A\,|\,B)=\frac{2\times 2}{2\times 2+1\times 3}=\frac{4}{7}$$

2.2. Seja X o número de vezes que, nas quatro extrações, sai bola branca.

X é uma variável binomial.

$$X \sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$$

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)=$$

$$={}^{4}C_{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{1}+{}^{4}C_{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=$$

$$=\frac{9}{81}=\frac{1}{9}$$

3. Sejam os acontecimentos:

A: "O aluno chega atrasado"

C: "O aluno vem no automóvel dos pais"

$$P(C\,|\,A)=\frac{3}{4}$$

$$P(A\,|\,C)=\frac{2}{3}$$

$$P(A)=\frac{1}{6}$$

$$P(C)=\ ?$$

$$P(A\cap C)=P(A)\times P(C\,|\,A)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$$

$$P(A\cap C)=P(C)\times P(A\,|\,C)$$

$$\frac{1}{8}=P(C)\times\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(C)=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{3}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(C)=\frac{3}{16}$$

4.1. Sejam os acontecimentos:

E: "O aluno realiza o programa Erasmus num país europeu."

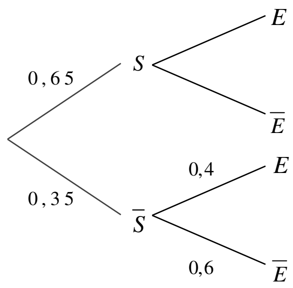
S: "O aluno conclui com sucesso todas as unidades curriculares."

$P(E)=0{,}7$

$P(S)=0{,}65$

$P(\overline{E}\mid\overline{S})=0{,}6$

$P(S\mid E)=\dfrac{P(S\cap E)}{P(E)}$



$P(\overline{S})=1-P(S)=1-0{,}65=0{,}35$

$P(E\mid\overline{S})=1-P(\overline{E}\mid\overline{S})=1-0{,}6=0{,}4$

$P(E)=0{,}7\Leftrightarrow P(S\cap E)+P(\overline{S}\cap E)=0{,}7\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(S\cap E)+P(\overline{S})\times P(E\mid\overline{S})=0{,}7\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(S\cap E)+0{,}35\times 0{,}4=0{,}7\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(S\cap E)=0{,}7-0{,}14\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(S\cap E)=0{,}56$

$P(S\mid E)=\dfrac{P(S\cap E)}{P(E)}=\dfrac{0{,}56}{0{,}7}=0{,}8$

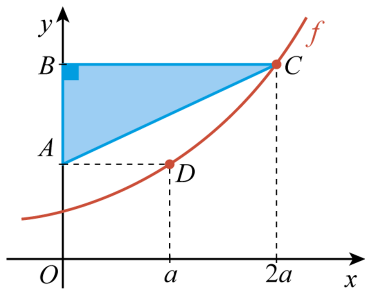
4.2. $P(S)\times 200=0{,}65\times 200=130$

$200-130=70$

70 estudantes não concluem com sucesso todas as unidades curriculares.

$P=1-\dfrac{^{70}C_3}{^{200}C_3}\approx 0{,}958$

5. $A=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{2}$



$\overline{AB}=f(2a)-f(a)=3^{2a}-3^{a}$

$\overline{BC}=2a$

$A=\dfrac{(3^{2a}-3^{a})\times\cancel{2}a}{\cancel{2}}=a\times(3^{2a}-3^{a})$

Como $A = 6a$, temos

$$a \times \left(3^{2a} - 3^{a}\right) = 6a \Leftrightarrow \left(3^{a}\right)^{2} - 3^{a} - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

Seja $x = 3^{a}$:

$$x^{2} - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

$$3^{a} = 3 \vee 3^{a} = -2 \Leftrightarrow \qquad \left(3^{a} > 0, \forall \in \mathbb{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

6.1. $T\left(0\right) = 55 - 35\left(1 - e^{0}\right) = 55 - 35\left(1-1\right) = 55$

$T\left(0\right)$ é o valor da temperatura inicial da água que entra no tanque, em graus Celsius.

$$\lim_{t \to +\infty} T\left(t\right) = \lim_{t \to +\infty} \left[55 - 35\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)\right] = 55 - 35 \lim_{t \to +\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right) =$$

$$= 55 - 35\left(1 - \mathrm{e}^{-(+\infty)}\right) = 55 - 35\left(1 - \mathrm{e}^{-\infty}\right) =$$

$$= 55 - 35\left(1 - 0\right) = 55 - 35 = 20$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} T\left(t\right) = 20$ significa que, com o decorrer do tempo, a temperatura do fluído tende a estabilizar em 20 ºC (temperatura ambiente).

6.2. $T\left(t\right) = 55 - 35\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right) = 55 - 35 + 35\mathrm{e}^{-t} = 20 + 35\mathrm{e}^{-t}$

$$T\left(t+1\right) = 20 + 35\mathrm{e}^{-(t+1)} = 20 + 35\mathrm{e}^{-t-1} = 20 + 35 \times \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-1}$$

$$T\left(t+2\right) = 20 + 35\mathrm{e}^{-(t+2)} = 20 + 35\mathrm{e}^{-t-2} = 20 + 35 \times \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2}$$

$$\frac{T\left(t+2\right) - T\left(t\right)}{T\left(t+1\right) - T\left(t\right)} = \frac{20 + 35 \times \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2} - \left(20 + 35\mathrm{e}^{-t}\right)}{20 + 35 \times \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-1} - \left(20 + 35\mathrm{e}^{-t}\right)} =$$

$$= \frac{20 + 35 \times \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2} - 20 - 35\mathrm{e}^{-t}}{20 + 35 \times \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-1} - 20 - 35\mathrm{e}^{-t}} = \frac{35 \times \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2} - 35\mathrm{e}^{-t}}{35 \times \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-1} - 35\mathrm{e}^{-t}} =$$

$$= \frac{35 \times \mathrm{e}^{-t}\left(\mathrm{e}^{-2} - 1\right)}{35 \times \mathrm{e}^{-t}\left(\mathrm{e}^{-1} - 1\right)} = \frac{\left((\mathrm{e}^{-1})^{2} - 1\right)}{\mathrm{e}^{-1} - 1} = \frac{\left(\mathrm{e}^{-1} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{-1} + 1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-1} - 1\right)} =$$

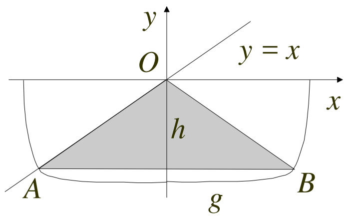
$$= \mathrm{e}^{-1} + 1 = \frac{1}{\mathrm{e}} + 1$$

7.1. $g(x) = 9^k \times 3^{x^2 - 3k} - 3$

$g(3) = 0 \Leftrightarrow 9^k \times 3^{9-3k} - 3 = 0 \ \Leftrightarrow 3^{2k} \times 3^{9-3k} - 3 = 0 \ \Leftrightarrow 3^{2k+9-3k} = 3 \Leftrightarrow 3^{-k+9} = 3$

Logo, $-k + 9 = 1 \Leftrightarrow -k = -8 \Leftrightarrow k = 8$.

7.2. $g(x) = 9^8 \times 3^{x^2 - 24} - 3$



Depois de se introduzir a função g na calculadora obtém-se o gráfico ao lado.

Seja *a* abcissa de *A*.

O ponto *A* tem de coordenadas $(a, g(a))$ e, como $\overline{OB} = \overline{OA}$ e a função *g* é par, então $B(-a,\ g(a))$.

Assim, $\overline{AB} = |2a|$ e a medida da altura *h* do triângulo [*OAB*] relativa à base [*AB*] é $h = |g(a)|$.

Medida da área do triângulo $[OAB]$:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times h}{2} = \frac{|2a| \times |g(a)|}{2} = |a| \times |g(a)| = |a| \times |a| = a^2 \qquad (|g(a)| = |a|)$$

Posteriormente, calcula-se a interseção do gráfico da função g com a reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares) e obtém-se, com cinco casas decimais, $A(-2{,}65277\ ;\ -2{,}65277)$ pelo que

$a \approx -2{,}65277$ e $A_{[OAB]} = a^2 \approx (-2{,}65277)^2 \approx 7{,}04$.

Assim, a medida da área do triângulo [*OAB*] é aproximadamente igual a $7{,}04$ u.a.