Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **| Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

1. O código de um telemóvel (PIN) é constituído por uma sequência de quatro algarismos.

Em quantos destes códigos aparece pelo menos uma vez o algarismo 0?

(A) $10^4 - 9^4$ **(B)** 4×9^3 **(C)** 4×10^3 **(D)** $10^4 - 4$

2. Quantos números é possível formar trocando a ordem aos algarismos 3 3 3 3 3 3 4 4 4 de forma que não fiquem dois algarismos 4 seguidos?

(A) ${}^{6}A_3$ **(B)** ${}^{7}A_3$ **(C)** ${}^{7}C_3$ **(D)** ${}^{6}C_3$

3. A soma dos seis menores elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é igual a 464.

Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?

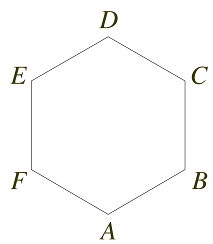
(A) 116 **(B)** 210 **(C)** 232 **(D)** 231

4. Considere todos os números ímpares com cinco algarismos.

Quantos desses números são inferiores a 60 000 e o produto dos seus algarismos também é um número ímpar?

(A) 3×5^4 **(B)** 5^5 **(C)** $3^2 \times 4 \times 5$ **(D)** 4×5^4

5. Escolhem-se, ao acaso, três vértices distintos do hexágono regular $[ABCDEF]$.



Qual é a probabilidade de esses três pontos serem vértices de um triângulo equilátero?

(A) $\frac{3}{10}$ **(B)** $\frac{1}{10}$ **(C)** $\frac{3}{20}$ **(D)** $\frac{1}{4}$

Grupo II

1. Para determinado valor real de a, um dos termos do desenvolvimento de $(x+a)^{10}$ é igual a $-15x^7$.

Determine o valor de a.

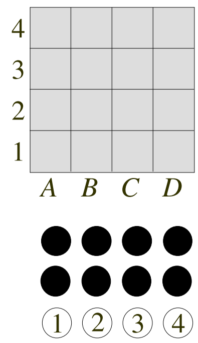
2. Considere todos os números naturais formados por seis algarismos.

Qual é a percentagem dos que têm algarismos repetidos?

3. Na figura está representado um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro linhas (1, 2, 3 e 4) e em quatro colunas (A, B, C e D)

Dispomos de 12 fichas sendo 8 pretas, iguais entre si, e 4 brancas, numeradas de 1 a 4.

Pretende-se colocar fichas no tabuleiro de forma que não fique mais do que uma por cada casa.



3.1. De quantas maneiras diferentes é possível dispor as 12 fichas no tabuleiro?

3.2. De quantas maneiras diferentes é possível dispor as oito fichas pretas no tabuleiro de forma que só uma coluna fique totalmente preenchida?

4. Nos serviços administrativos de uma escola trabalham 18 pessoas, sendo 10 homens e 8 mulheres. Entre estes trabalhadores, apenas 4 homens e 5 mulheres falam inglês corretamente.

De entre os 18 funcionários vão ser selecionados 6 para frequentarem uma ação de formação.

De quantas maneiras é possível formar esse grupo de forma que:

4.1. seja misto (isto é, tenha pelo menos um homem e uma mulher) e tenha mais mulheres do que homens?

4.2. da sua composição faça parte pelo menos uma mulher?

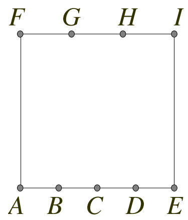
4.3. dois (e só dois) dos elementos escolhidos falem inglês corretamente e tenha igual número de homens e de mulheres.

5. Um polígono regular de n lados tem 90 diagonais.

Determine o valor de n.

Comece por escrever a equação que traduz o problema e, de seguida, resolva-a.

6. Na figura estão representados nove pontos: A, B, C, D, E, F, G, H e I.



Sabe-se que:

- $[AEIF]$ é um quadrado;
- os pontos B, C e D pertencem ao lado $[AE]$;
- os pontos G e H pertencem ao lado $[FI]$.

6.1. Escolhem-se ao acaso três desses nove pontos.

Qual é a probabilidade de estes definirem um triângulo?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

6.2. Escolhe-se ao acaso um dos triângulos definido por três dos nove pontos. Qual é a probabilidade de que a medida da área desse triângulo seja igual a metade da medida da área do quadrado?

Apresente o resultado na forma de percentagem.

FIM

Cotações

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
8	8	8	8	8	**40**

Grupo II

1.	2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	4.3.	5.	6.1.	6.2.	Total
16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1.

1.º A	2.º A	3.º A	4.º A
10	10	10	10

Número de códigos que é possível formar: $10\times10\times10\times10=10^4$

1.º A	2.º A	3.º A	4.º A
9	9	9	9

Número de códigos que é possível formar sem o algarismo 0: $9\times9\times9\times9=9^4$

Número de códigos que é possível formar com pelo menos um algarismo 0: 10^4-9^4

Resposta: (A)

2. Os seis algarismos iguais a 3 determinam sete lugares, entre os quais se escolhem três para os algarismos iguais a 4:

__ 3 __ 3 __ 3 __ 3 __ 3 __ 3 __

Esta escolha pode ser feita de ${}^7C_3$ maneiras diferentes dado que, como os três algarismos são iguais, não interessa a ordem pela qual vão ser colocados nos três lugares escolhidos.

Resposta: (C)

3. Os três primeiros elementos de uma linha do Triângulo de Pascal são iguais aos três últimos e estes seis elementos são os menores da linha.

O primeiro elemento de cada linha é igual a 1. Designando por a e b o segundo e o terceiro elementos da linha em causa, esta pode ser parcialmente representada por:

$$1 \quad a \quad b \quad \ldots \quad b \quad a \quad 1$$

Os três primeiros elementos da linha seguinte são: 1, $1+a$ e $a+b$

Sabemos que $1+a+b+b+a+1=464$.

$1+a+b+b+a+1=464 \Leftrightarrow 2a+2b=462 \Leftrightarrow a+b=231$

Resposta: (D)

4. Para que o número seja ímpar, o algarismo das unidades tem de ser ímpar. Logo, há cinco possibilidades para este algarismo (1, 3, 5, 7 ou 9).

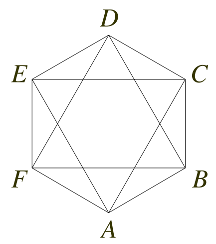
Se o produto dos algarismos é um número ímpar, então os cinco algarismos são ímpares.

Se o número é inferior a 60 000, o algarismo das dezenas de milhar tem de ser inferior a 6. Logo, há três possibilidades para este algarismo (1, 3 ou 5).

Portanto, há $3\times5\times5\times5\times5=3\times5^4$ números nas condições indicadas.

Resposta: (A)

5. Número de casos possíveis: ${}^{6}C_3 = \dfrac{6\times5\times4}{3\times2} = 20$



Número de casos favoráveis: 2 (os triângulos [*ACE*] e [*BDF*])

$$P = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

Resposta: (B)

Grupo II

1. $(x+a)^{10} = \sum_{p=0}^{10} {}^{10}C_p x^{10-p} a^p$

Se ${}^{10}C_p x^{10-p} a^p = -15x^7$, então $10 - p = 7$, pelo que $p = 3$.

Se $p = 3$, então ${}^{10}C_p x^{10-p} a^p = {}^{10}C_3 x^7 a^3 = 120a^3x^7$.

Se $120a^3x^7 = -15x^7$, então $120a^3 = -15$.

$$120a^3 = -15 \Leftrightarrow a^3 = -\frac{15}{120} \Leftrightarrow a^3 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

O valor de *a* é $-\dfrac{1}{2}$.

2.

1.º A	2.º A	3.º A	4.º A	5.º A	6.º A
9	10	10	10	10	10

Existem 9×10^5 números naturais com seis algarismos (o primeiro algarismo é diferente de 0).

1.º A	2.º A	3.º A	4.º A	5.º A	6.º A
9	9	8	7	6	5

Existem $9\times9\times8\times7\times6\times5 = 9\times{}^{9}A_5$ números naturais com seis algarismos diferentes.

Logo, existem $9\times10^5 - 9\times{}^{9}A_5$ números naturais com seis algarismos e com algarismos repetidos.

$$\frac{9\times10^5 - 9\times{}^{9}A_5}{9\times10^5} = 1 - \frac{{}^{9}A_5}{10^5} = 0{,}8488 = 84{,}88\%$$

$84{,}88\%$ dos números naturais com seis algarismos têm algarismos repetidos.

3.1. ${}^{16}C_8 \times {}^{8}A_4 = 12\,870 \times 1680 = 21\,621\,600$

${}^{8}A_4$ → Número de maneiras de dispor as 4 fichas brancas (diferentes) nas restantes 8 casas

${}^{16}C_8$ → Número de maneiras de dispor as 8 fichas pretas (iguais) nas 16 casas

3.2. $4\times\left({}^{12}C_4-3\right)=4\times\left(495-3\right)=1968$

Excluem-se os casos em que as restantes 4 fichas ocupam uma das restantes 3 colunas

Número de maneiras de dispor as restantes 4 fichas pelos restantes 12 lugares

Número de maneiras de escolher a coluna que fica com 4 fichas

4.1.

Homens	Mulheres
10	8
2	4
1	5

O grupo é formado por dois homens e quatro mulheres **ou** por um homem e cinco mulheres.

O número de possibilidades é:

$${}^{10}C_2\times{}^{8}C_4+{}^{10}C_1\times{}^{8}C_5=45\times70+10\times56=3710$$

4.2. O número total de grupos que é possível formar é dado por ${}^{18}C_6$.

O número de grupos que é possível formar com seis homens é dado por ${}^{10}C_6$.

Logo, o número de grupos que é possível formar com pelo menos uma mulher é ${}^{18}C_6-{}^{10}C_6=18\,354$.

4.3. Há três casos a considerar para a escolha dos dois elementos que falam corretamente inglês:

- dois homens
- duas mulheres
- um homem e uma mulher

	Homens que falam inglês	Mulheres que falam inglês	Homens que não falam inglês	Mulheres que não falam inglês
	4	5	6	3
1.º caso	2	0	1	3
2.º caso	0	2	3	1
3.º caso	1	1	2	2

Número de possibilidades:

1.º caso: ${}^{4}C_2\times{}^{5}C_0\times{}^{6}C_1\times{}^{3}C_3=6\times1\times6\times1=36$

2.º caso: ${}^{4}C_0\times{}^{5}C_2\times{}^{6}C_3\times{}^{3}C_1=1\times10\times20\times3=600$

3.º caso: ${}^{4}C_1\times{}^{5}C_1\times{}^{6}C_2\times{}^{3}C_2=4\times5\times15\times3=900$

$36+600+900=1536$

É possível formar o grupo de 1536 maneiras diferentes.

5. $\quad {}^{n}C_2 - n = 90$ com $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

$$
\begin{aligned}
{}^{n}C_2 - n = 90 &\Leftrightarrow \frac{{}^{n}A_2}{2!} - n = 90 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n - 90 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow n^2 - n - 2n - 180 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow n^2 - 3n - 180 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 180}}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{729}}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow n = \frac{3 \pm 27}{2}
\end{aligned}
$$

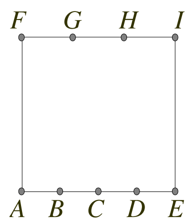
Como $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, então $n = 15$.

6.1 Número de casos possíveis: ${}^{9}C_3 = 84$

Número de casos favoráveis: $4 \times {}^{5}C_2 + 5 \times {}^{4}C_2 = 4 \times 10 + 5 \times 6 = 70$

$P = \frac{70}{84} = \frac{5}{6}$

6.2 Número de casos possíveis: 70



Número de casos favoráveis: $4 + 5 = 9$

(são os triângulos de base [*AE*] e vértice oposto *F*, *G*, *H* ou *I* e os triângulos de base [*FI*] e vértice oposto *A*, *B*, *C*, *D* ou *E*)

$P = \frac{9}{70} \approx 13\%$