Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

1. Seleciona-se, ao acaso, uma letra de uma palavra.

Sejam A, I e V os seguintes acontecimentos:

A : “A letra selecionada é a A.”

I : “A letra selecionada é o I.”

V : “A letra selecionada é uma vogal.”

Em qual das seguintes palavras se verifica que $P\left[\left(A \cup I\right) | \mathrm{V}\right] = \frac{1}{2}$?

(A) CARNAVAL

(B) PASCOA

(C) JESUS

(D) CONSOADA

2. Seja ${}^nC_p$ um elemento de uma linha do Triângulo de Pascal, com $n, p \in \mathbb{N}_0$ e $n \geq p$.

Sabe-se que a soma dos elementos da linha é 64 e que ${}^nC_p + {}^nC_{n-p} = 12$. Então:

(A) $p = 1 \vee p = 5$

(B) $p = 1 \vee p = 6$

(C) $p = 2 \vee p = 4$

(D) $p = 1 \vee p = 4$

3. Sejam a e b dois números reais (com $a > 0$ e $b > 1$) tais que $a \log_b a = 1$.

Qual é, para esses valores de a e b, o valor de $\log_b \left(\frac{1}{a^2} \right)$?

(A) $2 - a$

(B) $-2a$

(C) $-\frac{2}{a}$

(D) $2 - \frac{1}{a}$

4. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$.

Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que $\lim h(u_n) = 2$.

Qual das expressões seguintes pode definir a função h ?

(A) $1-3\ln x$

(B) $1+3\ln x$

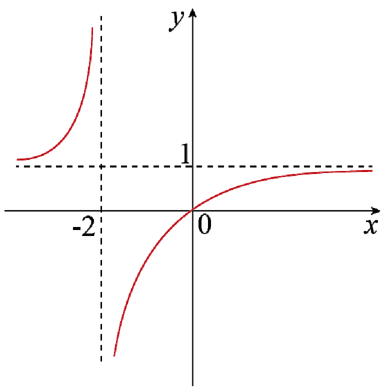
(C) $x+3\ln x$

(D) $x-3\ln x$

5. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, representada graficamente abaixo.

O gráfico de f admite como assíntotas as retas de equações:

$$x=-2 \quad \text{e} \quad y=1$$



Qual é o valor de $\lim_{x\to+\infty} \frac{3+\mathrm{e}^{-x}}{1-f(x)}$?

(A) 0

(B) $-\infty$

(C) 3

(D) $+\infty$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. O André tem no bolso seis moedas: duas de 1 euro e quatro de 50 cêntimos.

1.1. O André retira, simultaneamente e ao acaso, três moedas do bolso.

Seja X a quantia, em euros, correspondente às moedas retiradas pelo André.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades de X, apresentando na forma de fração irredutível.

1.2. O tio do André deu-lhe quatro moedas de 1 euro. O André juntou estas moedas às que já tinha.

Seguidamente, retira, sucessivamente e sem reposição, duas moedas do bolso.

Considere os acontecimentos:

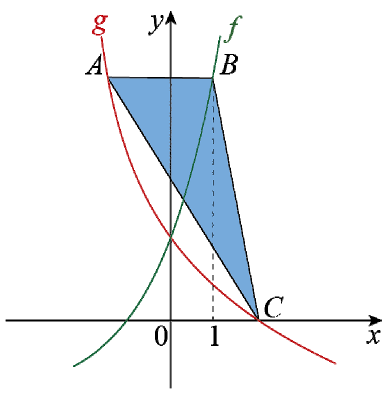
A: "a moeda retirada em primeiro lugar é de 50 cêntimos"

B: "a moeda retirada em segundo é de 1 euro"

Calcule o valor da probabilidade $P(A|B)$.

Apresente o resultado em percentagem arredondado às unidades.

2. No referencial xOy da figura está representado um triângulo $[ABC]$ e parte dos gráficos das funções f e g.



Sabe-se que:

- $f(x) = 2^{1+x} - 1$ e $g(x) = 2 - \log_2(x+2)$
- o ponto B pertence ao gráfico de f e tem abcissa igual a 1;
- o ponto A pertence ao gráfico de g e tem ordenada igual à do ponto B;
- o ponto C pertence ao gráfico de g e ao eixo Ox.

2.1. Calcule a medida da área do triângulo $[ABC]$.

2.2. Determine, por processos analíticos, o conjunto-solução das condições:

2.2.1. $f(x) - 2^{-x} = 0$

2.2.2. $\log_2(3-x) \leq g(x)$

2.3. Caracterize g^{-1}, função inversa da função g.

3. Num laboratório, duas substâncias A e B estão a uma temperatura controlada.

No dia um do corrente mês, a temperatura de cada uma dessas substâncias, em graus Celsius, t horas após as zero horas, era dada, para determinado valor de k, por:

$$A(t) = 30t^2 e^{-0,5t} + 5, \ t \in [0, \ 24[$$

$$B(t) = 19,2t^2 e^{-kt} + 5, \ t \in [0, \ 24[$$

3.1. Sabe-se que às 4 horas desse dia a substância A atingiu a temperatura máxima e que a substância B atingiu a mesma temperatura uma hora depois.

Determine o valor de k.

3.2. Considere $k = 0,4$.

Houve um instante, depois das zeros horas, em que as duas substâncias estiveram à mesma temperatura. Determine esse instante e apresente o resultado em horas e minutos com os minutos arredondados às unidades.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-15}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} & \text{se } 0 < x < 5 \\ e^{\frac{k}{2}} & \text{se } x = 5 \\ \dfrac{\ln(x-4)}{10-2x} & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

4.1. Para um certo valor de k sabe-se que $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = f(5)$.

Mostre que $k = \ln(180)$.

4.2. Determine $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$.

4.3. Considere a sucessão (w_n) definida por $w_n = \dfrac{1+3n}{n^2}$.

Qual é o valor de $\lim f(w_n)$?

FIM

Cotações

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
8	8	8	8	8	**40**

Grupo II

1.1.	1.2.	2.1.	2.2.1.	2.2.2.	2.3.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	4.3.	Total
12	10	18	10	16	14	18	18	14	15	15	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1. CARNAVAL → $P\left[\left(A\cup I\right)|\,\text{V}\right]=\frac{3}{3}=1$ Falso

PASCOA → $P\left[\left(A\cup I\right)|\,\text{V}\right]=\frac{2}{3}$ Falso

JESUS → $P\left[\left(A\cup I\right)|\,\text{V}\right]=\frac{0}{2}$ Falso

CONSOADA → $P\left[\left(A\cup I\right)|\,\text{V}\right]=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ Verdadeiro

Resposta: (D)

2. A soma dos elementos da linha de ordem n é 2^n .

$2^n=64 \Leftrightarrow 2^n=2^6 \Leftrightarrow n=6$

Como ${}^nC_p+{}^nC_{n-p}=12$, vem, para $n=6$:

${}^6C_p+{}^6C_{6-p}=12 \Leftrightarrow 2\,{}^6C_p=12 \Leftrightarrow$ $\quad\left({}^6C_p={}^6C_{6-p}\right)$

$\Leftrightarrow {}^6C_p=\frac{12}{2} \Leftrightarrow {}^6C_p=6$

${}^6C_p=6 \Leftrightarrow p=1 \vee 6-p=1 \Leftrightarrow p=1 \vee p=5$

Resposta: (A)

3. $a\log_b a=1 \Leftrightarrow \log_b a=\frac{1}{a}$

$\log_b \frac{1}{a^2}=\log_b a^{-2}=-2\log_b a=-2\times\frac{1}{a}=-\frac{2}{a}$

Resposta: (C)

4. $u_n=\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$; $\lim h\left(u_n\right)=2$

$\lim u_n=\lim\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{\frac{1}{3}}{n}\right)^n=\text{e}^{\frac{1}{3}}$

Se $h(x)=1+3\ln x$, então $h\left(u_n\right)=1+3\ln\left(u_n\right)$.

$\lim h\left(u_n\right)=\lim\left(1+3\ln\left(u_n\right)\right)=1+3\ln\left(\lim u_n\right)=1+3\ln e^{\frac{1}{3}}=1+3\times\frac{1}{3}=1+1=2$

Resposta: (B)

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1^-$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{-x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\text{e}^{-x}}{1-f(x)}=\frac{3+0}{1-1^-}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

Resposta: (D)

Grupo II

1.1. X: "Quantia, em euros, correspondente às moedas retiradas pelo André"

<u>Moedas de 1 €</u>	<u>Moedas de 0,5 €</u>	<u>Valor de X</u>
<u>2</u>	<u>4</u>	
0	3	1,5
1	2	2,0
2	1	2,5

$$P(X=1{,}5)=\frac{{}^4C_3}{{}^6C_3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=2)=\frac{{}^2C_1\times{}^4C_2}{{}^6C_3}=\frac{2\times 6}{20}=\frac{3}{5}$$

$$P(X=2{,}5)=\frac{{}^2C_2\times{}^4C_1}{{}^6C_3}=\frac{1\times 4}{20}=\frac{1}{5}$$

A distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

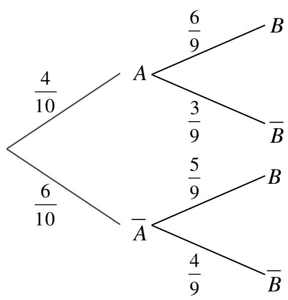
x_i	1,5	2,0	2,5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

1.2. <u>Moedas de 1 €</u> <u>Moedas de 0,5 €</u>

<u>6</u> <u>4</u>

A: "A moeda retirada em primeiro é de 50 cêntimos."

B: "A moeda retirada em segundo é de 1 euro."



$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\times P(B\mid A)}{P(A)\times P(B\mid A)+P(\overline{A})\times P(B\mid\overline{A})}=$$

$$=\frac{\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}}{\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}}=\frac{\frac{24}{90}}{\frac{24}{90}+\frac{30}{90}}=\frac{24}{54}=\frac{4}{9}\approx 44\%$$

2.1. Área de $[ABC] = \dfrac{\overline{AB}\times h}{2}$

Ponto B: $B\left(1,\ f\left(1\right)\right)$

$f\left(1\right)=2^{1+1}-1=2^2-1=3$

Logo, $B\left(1,\ 3\right)$.

Ponto A: $A\left(x,\ 3\right)$

$g\left(x\right)=3\Leftrightarrow 2-\log_2\left(x+2\right)=3\Leftrightarrow \log_2\left(x+2\right)=-1\Leftrightarrow x+2=2^{-1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}-2\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$

Assim, $A\left(-\dfrac{3}{2},\ 3\right)$.

$\overline{AB}=\left|-\dfrac{3}{2}-1\right|=\dfrac{5}{2}$

A altura h do triângulo $[ABC]$ é igual à ordenada de B: $h=3$

Área de $[ABC] = \dfrac{\overline{AB}\times h}{2}=\dfrac{\frac{5}{2}\times 3}{2}=\dfrac{15}{4}$ u.a.

2.2.1. $f\left(x\right)-2^{-x}=0\Leftrightarrow 2^{1+x}-1-2^{-x}=0\Leftrightarrow 2\times 2^x-1-\dfrac{1}{2^x}=0\Leftrightarrow$

$2^x\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2\times\left(2^x\right)^2-2^x-1=0$

Fazendo $y=2^x$:

$2y^2-y-1=0\Leftrightarrow y=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}\Leftrightarrow y=1\vee y=-\dfrac{1}{2}$.

Assim:

$2\times\left(2^x\right)^2-2^x-1=0\Leftrightarrow 2^x=1\vee 2^x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x=2^0\Leftrightarrow x=0$ $\qquad 2^x>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$S=\{0\}$

2.2.2. $\log_2\left(3-x\right)\le g\left(x\right)\Leftrightarrow \log_2\left(3-x\right)\le 2-\log_2\left(x+2\right)$

Domínio da condição:

$D=\{x\in\mathbb{R}:3-x>0\wedge x+2>0\}=\{x\in\mathbb{R}:x>3\wedge x>-2\}=\left]-2\,,3\right[$

$\log_2\left(3-x\right)\le 2-\log_2\left(x+2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2\left(3-x\right)+\log_2\left(x+2\right)\le 2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2\left[\left(3-x\right)\left(x+2\right)\right]\le 2\wedge x\in\left]-2\,,3\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+6-x^2-2x\le 2^2\wedge x\in\left]-2\,,3\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2+x+2\le 0\wedge x\in\left]-2\,,3\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left(\left]-\infty-1\right]\cup\left[2,+\infty\right[\right)\cap\left]-2\,,3\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left]-2\,,-1\right]\cup\left[2,3\right[$

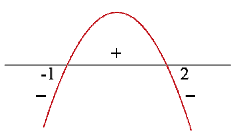
$S=\left]-2\,,-1\right]\cup\left[2,3\right[$

Cálculo auxiliar

$-x^2+x+2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1\vee x=2$



2.3. $g(x)=2-\log_2(x+2)$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}:\ x+2>0\}=\left]-2,\ +\infty\right[$

$D'_{g^{-1}}=D_g=\left]-2,\ +\infty\right[$

Expressão da correspondência inversa:

$$g(x)=y\Leftrightarrow 2-\log_2(x+2)=y\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_2(x+2)=y-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2)=-y+2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+2=2^{2-y}\Leftrightarrow x=2^{2-y}-2$$

$$g^{-1}:\ \mathbb{R}\ \to\ \left]-2,\ +\infty\right[$$
$$x\ \mapsto\ 2^{2-x}-2$$

3. $A(t)=30t^2\mathrm{e}^{-0,5t}+5,\ t\in\left[0,\ 24\right[$

$B(t)=19,2t^2\mathrm{e}^{-kt}+5,\ t\in\left[0,\ 24\right[$

3.1. $A(4)=B(5)\Leftrightarrow 30\times4^2\,\mathrm{e}^{-0,5\times4}+5=19,2\times5^2\,\mathrm{e}^{-k\times5}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 480\mathrm{e}^{-2}=480\mathrm{e}^{-5k}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2}=\mathrm{e}^{-5k}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5k=-2\Leftrightarrow k=\frac{2}{5}$$

3.2. $A(t)=B(t)\Leftrightarrow 30t^2\mathrm{e}^{-0,5t}+5=19,2t^2\mathrm{e}^{-0,4t}+5\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 30t^2\mathrm{e}^{-0,5t}=19,2t^2\mathrm{e}^{-0,4t}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30t^2\mathrm{e}^{-0,5t}-19,2t^2\mathrm{e}^{-0,4t}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30t^2\left(\mathrm{e}^{-0,5t}-\frac{19,2}{30}\mathrm{e}^{-0,4t}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30t^2=0\vee \mathrm{e}^{-0,5t}-0,64\mathrm{e}^{-0,4t}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=0\vee\frac{\mathrm{e}^{-0,5t}}{\mathrm{e}^{-0,4t}}=0,64\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=0\vee \mathrm{e}^{-0,1t}=0,64\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=0\vee -0,1t=\ln(0,64)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=0\vee t=-10\ln(0,64)\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow t=0\vee t\approx 4,462\ 87$$

$$t\approx 4,46287\text{ h}\approx 4\text{ h }28\text{ min}$$

As duas substâncias estiveram à mesma temperatura às 4 h e 28 min.

4.1. $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = f(5)$; $f(5) = e^{\frac{k}{2}}$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} \frac{3x-15}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = 3\lim_{x\to 5^-} \frac{\cancel{(x-5)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}{\cancel{x-5}} =$$

$$= 3\lim_{x\to 5^-}\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right) = 3\times 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$e^{\frac{k}{2}} = 6\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{k}{2} = \ln\left(6\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow k = 2\ln\left(6\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \ln\left(6\times\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow k = \ln\left(6^2\times 5\right) \Leftrightarrow k = \ln(180)$$

4.2. $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{\ln(x-4)}{10x-2} = \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{\ln(x-4)}{-2(x-5)} =$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 5^+}\frac{\ln(y+5-4)}{y} = -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(y+1)}{y} =$$

$$= -\frac{1}{2}\times 1 = -\frac{1}{2}$$

Mudança de variável:
$y = x-5 \Leftrightarrow x = y+5$
$x \to 5^+ \Rightarrow y \to 0^+$

4.3. $\lim w_n = \lim \dfrac{1+3n}{n^2} = 0$

$$\lim f(w_n) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{3x-15}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} =$$

$$= 3\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{(x-5)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}{x+5} = 3\sqrt{5}$$