Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

1. Lançou-se nove vezes um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6.

Nesses nove lançamentos saiu sempre uma face com número ímpar.

O dado vai ser lançado de novo.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) É tão provável que saia agora um número par como um número ímpar.

(B) É mais provável que saia agora um número par.

(C) É mais provável que continue a sair um número ímpar.

(D) Nada se pode afirmar sobre a probabilidade de sair número ímpar no próximo lançamento.

2. Sejam A e B dois acontecimentos associados a uma mesma experiência aleatória tais que $P(A)=0{,}8$ e $P(B)=0{,}3$.

Pode-se afirmar que A e B são acontecimentos:

(A) independentes; **(B)** compatíveis;

(C) elementares; **(D)** acontecimentos contrários.

3. Uma pessoa vai visitar cinco locais situados na cidade do Porto: Torre dos Clérigos, Sé, Palácio da Bolsa, Ponte Luís I e Casa da Música.

De quantas maneiras diferentes pode planear a sequência das cinco visitas, se começar na Ponte Luís I e terminar na Casa da Música?

(A) 120 **(B)** 24

(C) 12 **(D)** 6

4. O quarto elemento de uma linha do Triângulo de Pascal é igual ao sétimo.

Qual é o maior valor da linha seguinte?

(A) 924 **(B)** 462

(C) 252 **(D)** 126

5. No desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^8$ com $x>0$, o coeficiente do termo em x^{-5} é:

(A) -1120 **(B)** 1120

(C) -1792 **(D)** 1792

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Considere a experiência aleatória que consiste em extrair simultaneamente uma carta de um baralho de 40 cartas e lançar uma moeda viciada, em que a probabilidade de sair a face nacional (N) é dupla da de sair a face europeia (E).

Determine a probabilidade de sair um ás do baralho e face europeia na moeda.

2. Numa das faces de uma moeda colocou-se uma etiqueta com o número 1 e na outra face uma etiqueta com o número –1.

Considere que a moeda permaneceu equilibrada.

Lançou-se duas vezes a moeda ao ar e observou-se o número da face que ficou voltada para cima.

2.1. Represente, em extensão, o espaço de resultados associados a esta experiência.

2.2. Considere os acontecimentos:

A : "O produto dos dois números saídos é negativo."

B : "No primeiro lançamento saiu –1."

C : "Saiu, pelo menos uma vez, a face com o número –1."

2.2.1. Represente, em extensão, os acontecimentos B e $C \setminus \overline{B}$.

2.2.2. Calcule $P(A)$ e $P\left(A \cap B\right)$.

2.2.3. Relativamente a esta experiência aleatória, dê exemplos de dois acontecimentos incompatíveis mas não contrários.

3. Relativamente aos habitantes de maioridade de uma determinada localidade sabe-se que:

- 84% têm telemóvel e 52% **não** têm automóvel;
- a quarta parte dos que não têm telemóvel também não têm automóvel.

Escolheu-se, ao acaso, um habitante de maioridade dessa localidade. Qual é a probabilidade de esse habitante:

3.1. não ter automóvel nem telemóvel?

3.2. ter automóvel e telemóvel

3.3. não ter telemóvel sabendo que tem automóvel?

4. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis $\left(A \subset S \text{ e } B \subset S\right)$.

Sabe-se que $P\left(A \cap B\right) = \dfrac{1}{10}$, $P\left(A \cup B\right) = \dfrac{4}{5}$ e que $P\left(A \mid B\right) = \dfrac{1}{4}$.

Prove que A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis.

5. Prove que, se M e N são dois acontecimentos equiprováveis e independentes:

$$P\left(M \cup N\right) = P\left(M\right)\left[2 - P\left(M\right)\right]$$

6. Numa turma há 30 alunos, dos quais 12 são raparigas.

Nessa turma foi escolhido, por sorteio, um grupo formado por 10 alunos.

Determine a probabilidade de:

6.1. a Maria e a Francisca, que são irmãs e alunas dessa turma, não pertencerem, em simultâneo, ao grupo escolhido;

6.2. o grupo ter oito rapazes e duas raparigas sabendo que o João, delegado da turma, é um dos seus membros.

Apresente os resultados arredondados às milésimas.

7. Num expositor com 24 divisórias dispostas por quatro linhas, cada uma com seis espaços, vão ser colocados 19 postais ilustrados de vários países. Entre esses postais, que são todos diferentes, há cinco que são de Portugal.

$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$	$\mathbf{P_2}$	
	L_1	L_2	B_4	B_6	B_3
E_1	E_2	E_3	E_4	B_5	L_3
	L_4		B_1	B_2	E_5

De quantas maneiras diferentes se podem arrumar os postais, sabendo que em cada divisória só pode ficar um postal e que os cinco postais de Portugal ficam seguidos na mesma linha? Escreva uma expressão que dê o número pedido, não sendo necessário calcular o seu valor.

FIM

Cotações

Grupo I:

Questões	1	2	3	4	5	
Cotação	8	8	8	8	8	**40**

Grupo II:

Questões	1.	2.1.	2.2.1.	2.2.2.	2.2.3.	3.1.	3.2.	3.3.	4.	5.	6.1.	6.2.	7.	
Cotação	12	8	8	8	8	15	15	15	15	14	14	14	14	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1. $P(\text{sair número par}) = P(\text{sair número ímpar}) = \frac{1}{2}$

Resposta: **(A)**

2. $P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}8 + 0{,}3 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1{,}1 - 1 \leq P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 0{,}1$

Como $P(A \cap B) > 0$, $A \cap B \neq \emptyset$.

Logo, A e B são acontecimentos compatíveis.

Resposta: **(B)**

3. $\underline{\text{PL}} \quad \underset{3}{\underline{\quad}} \quad \underset{2}{\underline{\quad}} \quad \underset{1}{\underline{\quad}} \quad \underline{\text{CM}}$

$3! = 6$

Resposta: **(D)**

4. Quarto elemento da linha: ${}^{n}C_3$

Sétimo elemento da linha: ${}^{n}C_6$

${}^{n}C_3 = {}^{n}C_6 \Leftrightarrow 6 = n - 3 \Leftrightarrow n = 9$

Trata-se da linha de 9 $(n = 9)$.

A linha seguinte é a de ordem 10 cujo maior elemento é o elemento central, ou seja, é ${}^{10}C_5 = 252$.

Resposta: **(C)**

5. $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^8=\sum_{p=0}^{8}{}^8C_p\left(\sqrt{x}\right)^{8-p}\left(-\frac{2}{x}\right)^p$

$$T_{p+1}={}^8C_p\left(\sqrt{x}\right)^{8-p}\left(-\frac{2}{x}\right)^p={}^8C_p\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{8-p}\left(-2\times\frac{1}{x}\right)^p=$$

$$={}^8C_p x^{\frac{8-p}{2}}(-2)^p\left(x^{-1}\right)^p={}^8C_p\times(-2)^p\times x^{\frac{8-p}{2}}\times x^{-p}=$$

$$={}^8C_p\times(-2)^p\times x^{\frac{8-p}{2}-p}$$

Como o expoente de x é -5 , vem

$$\frac{8-p}{2}-p=-5\Leftrightarrow 8-p-2p=-10\Leftrightarrow 3p=18\Leftrightarrow p=6$$

Para $p=6$ temos $T_7={}^8C_6\times(-2)^6\times x^{\frac{8-6}{2}-6}=28\times64\times x^{-5}=1792x^{-5}$.

Resposta: **(D)**

Grupo II

1. $P(N)=2P(E)$ e $P(N)+P(E)=1$

Logo, $2P(E)+P(E)=1\Leftrightarrow 3P(E)=1\Leftrightarrow P(E)=\frac{1}{3}$.

Por outro lado, $P(\text{"sair ás"})=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$.

Como os acontecimentos “sair ás” e ”sair face europeia” são independentes, temos:

$$P(\text{“sair ás”}\cap\text{”sair face europeia”})=\frac{1}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$$

2. **2.1.** $S=\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$

2.2. **2.2.1.** $B=\{(-1,1),(-1,-1)\}$; $\overline{B}=\{(1,1),(1,-1)\}$

$C=\{(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$

$C\setminus\overline{B}=\{(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}\setminus\{(1,1),(1,-1)\}=\{(-1,1),(-1,-1)\}$

$C\setminus\overline{B}=\{(-1,1),(-1,-1)\}$

2.2.2. $A=\{(-1,1),(1,-1)\}$

$\#A=2$, logo $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

$A\cap B=\{(-1,1)\}$, logo $\#A\cap B=1$

$P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

2.2.3. M: "a soma dos números saídos nos dois lançamentos é 2"

$M = \{(1\,,1)\}$

N: "a soma dos números saídos nos dois lançamentos é 0"

$N = \{(1\,,-1)\,;(-1\,,1)\}$

$M \cap N = \varnothing \wedge M \cup N \neq S$

Logo, os acontecimentos M e N são incompatíveis mas não contrários.

3. Relativamente ao habitante escolhido sejam:

T: "Tem telemóvel"

A: "Tem automóvel"

É dado que $P(T) = 84\% = 0{,}84$; $P(\overline{A}) = 52\% = 0{,}52$ e $P(\overline{A}\,|\,\overline{T}) = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

3.1. Pretende-se calcular $P(\overline{A} \cap \overline{T})$.

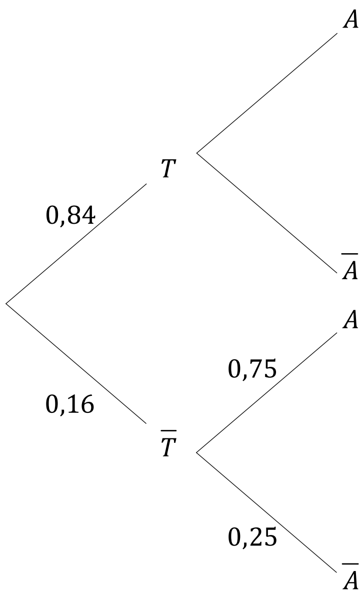
Sabemos que:

$P(\overline{A} \cap \overline{T}) = P(\overline{T}) \times P(\overline{A}\,|\,\overline{T})$ | $P(A \cap B) = P(B) \times P(A\,|\,B)$

$P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0{,}84 = 0{,}16$

$P(\overline{A} \cap \overline{T}) = 0{,}16 \times \frac{1}{4} = 0{,}04$

3.2. Sabemos que $P(A) = P(T \cap A) + P(\overline{T} \cap A)$. **(1)**



$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}52 = 0{,}48$

$P(A\,|\,\overline{T}) = 1 - P(\overline{A}\,|\,\overline{T}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$P(\overline{T} \cap A) = P(\overline{T}) \times P(A\,|\,\overline{T}) = 0{,}16 \times 0{,}75 = 0{,}12$

Substituindo em **(1)**, vem:

$0{,}48 = P(T \cap A) + 0{,}12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(T \cap A) = 0{,}48 - 0{,}12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(T \cap A) = 0{,}36$

<u>Outro processo:</u>

$P(\overline{A} \cap \overline{T}) = 0{,}04 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup T}) = 0{,}04 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup T) = 0{,}04 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cup T) = 1 - 0{,}04 \Leftrightarrow P(A \cup T) = 0{,}96$

$P(A \cup T) = P(A) + P(T) - P(A \cap T)$

$0{,}96 = 0{,}48 + 0{,}84 - P(A \cap T) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap T) = 0{,}48 + 0{,}84 - 0{,}96 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap T) = 0{,}36 \Leftrightarrow$

3.3. Pretende-se calcular $P(\overline{T}\mid A)$.

$$P(\overline{T}\mid A)=\frac{P(\overline{T}\cap A)}{P(A)}=\frac{P(\overline{T})\times P(A\mid\overline{T})}{P(A)}=\frac{0{,}16\times 0{,}75}{0{,}48}=0{,}25$$

4. $P(A\cap B)=\frac{1}{10}=0{,}1$; $P(A\cup B)=\frac{4}{5}=0{,}8$; $P(A\mid B)=\frac{1}{4}=0{,}25$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$0{,}25=\frac{0{,}1}{P(B)}\Leftrightarrow P(B)=\frac{0{,}1}{0{,}25}\Leftrightarrow P(B)=0{,}4$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$

$$0{,}8=P(A)+0{,}4-0{,}1\Leftrightarrow P(A)=0{,}8-0{,}3\Leftrightarrow P(A)=0{,}5$$

Se $P(A)=0{,}5$, então $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}5=0{,}5$.

Logo, A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis.

5. $P(M\cup N)=P(M)+P(N)-P(M\cap N)=$

$=P(M)+P(N)-P(M)\times P(N)=$ $\quad$ $P(M\cap N)=P(M)\times P(N)$ porque M e N são independentes

$=P(M)+P(M)-P(M)\times P(M)=$ $\quad$ $P(M)=P(N)$

$=2P(M)-\left[P(M)\right]^2=$

$=P(M)\times\left[2-P(M)\right]$

6. **6.1.** Número de casos possíveis: ${}^{30}C_{10}$

Número de casos favoráveis: ${}^{28}C_{10}+{}^{2}C_{1}\times{}^{28}C_{9}$

Número de comissões com apenas 1 das irmãs e mais 9 elementos escolhidos entre os restantes 28

Número de comissões com os 10 elementos escolhidos entre os restantes 28 (excluem-se as duas irmãs)

$$P=\frac{{}^{28}C_{10}+{}^{2}C_{1}\times{}^{28}C_{9}}{{}^{30}C_{10}}\approx 0{,}897$$

6.2 Número de casos favoráveis: ${}^{12}C_{2}\times{}^{17}C_{7}$

Número de maneiras de escolher 7 rapazes entre 17 (exclui-se o João)

Número de maneiras de escolher 2 raparigas entre as 12

$$P=\frac{{}^{12}C_{2}\times{}^{17}C_{7}}{{}^{30}C_{10}}\approx 0{,}043$$

7. $5!\times 2\times 4\times{}^{19}A_{14}$

Número de maneiras de escolher ordenadamente 14 lugares para os postais estrangeiros, entre os restantes 19 lugares do expositor

Número de maneiras de escolher a linha onde ficam os postais portugueses

Os postais portugueses podem ficar encostados à esquerda ou à direita

Número de maneiras de ordenar os 5 postais portugueses