Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

O teste é constituído por dois grupos, I e II.

O Grupo I inclui quatro questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

- Os **quatro** itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva, na sua folha de respostas, **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Dois rapazes e seis raparigas vão sentar-se num banco corrido de oito lugares.

De quantas maneiras o podem fazer de modo que os rapazes **não** fiquem juntos?

(A) 38 880 **(B)** 30 240 **(C)** 39 600 **(D)** 10 080

2. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em quatro naipes de 13 cartas cada: *espadas* e *paus*; *copas* e *ouros*. Em cada naipe há um ás, três figuras (*rei*, *dama* e *valete*) e mais nove cartas (do *2* ao *10*).

Tiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas do baralho.

Qual é a probabilidade de se tirar duas cartas de naipes diferentes?

(A) $\frac{4}{17}$ **(B)** $\frac{6}{17}$ **(C)** $\frac{13}{17}$ **(D)** $\frac{16}{17}$

3. Considere todos os números naturais de seis algarismos que se podem escrever com os algarismos de 0 a 9.
Quantos desses números têm os algarismos diferentes e são múltiplos de cinco?

(A) 30 240 **(B)** 28 560 **(C)** 21 840 **(D)** 15 120

4. Os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um octógono regular de perímetro 32.

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?

(A) $8\sqrt{3}$ **(B)** $8\sqrt{2}$ **(C)** $-8\sqrt{2}$ **(D)** $-8\sqrt{3}$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** que entender necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre **o valor exato**.

1. O *Jump* é atleta de triplo salto. O seu treinador, *The Master Jump*, decidiu efetuar um estudo sobre os resultados obtidos no último mês pelo seu atleta e verificou que tais resultados, medidos em metros, são bem modelados por uma distribuição normal de valor médio 17,42 metros e desvio-padrão 0,26 metro.

O *Jump* está neste momento a participar numa competição internacional e prepara-se para realizar o seu último salto. Caso não ultrapasse os 17,16 metros, não passará à fase seguinte.

Sabe-se que o *Jump* passou à fase seguinte.

Determine a probabilidade de o seu último salto não ter ultrapassado os 17,94 metros.

Apresente o resultado na forma de dízima arredondada às centésimas.

2. O *Dice* efetuou um único lançamento de um dado cúbico, cujas faces se apresentam numeradas com os números naturais de 1 a 6. Considere que o "número que sai" é o que está na face voltada para cima. O dado **não é equilibrado**, pelo que os seis números não têm a mesma probabilidade de sair.

Sejam *A*, *B*, *C* e *D* os seguintes acontecimentos:

A: "Sair número par"

B: "Sair número primo"

C: "Sair número menor que 4"

D: "Sair o número 4"

Sabe-se, ainda, que:

- $P(A \cup B) = 0{,}85$
- $P(A \cap B) = 0{,}2$
- $P(\overline{A}) = 0{,}35$
- $P(C) = 0{,}45$
- $P(B) = P(D)$

Seja *X* a variável aleatória "número saído no lançamento efetuado pelo *Dice*".

2.1. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória *X*.

Apresente todas as justificações e todos os cálculos que efetuar na determinação dos valores das probabilidades. Apresente as probabilidades na forma de dízima.

2.2. Determine $P(X > \mu)$. Apresente o resultado na forma de percentagem.

3. O *Balls* dispõe de oito bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas com números naturais, da seguinte forma:

▪ cinco bolas vermelhas numeradas de 4 a 8;

▪ três bolas azuis numeradas de 3 a 5.

Depois de introduzir as oito bolas num saco, o *Balls* retira uma bola ao acaso.

Sejam *A* e *B* os acontecimentos:

A: “A bola retirada tem um número ímpar”

B: “ A bola retirada tem um número múltiplo de 3”

Averigue se os acontecimentos *A* e *B* são independentes.

4. Sejam Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e *A* e *B* dois acontecimentos de Ω, ambos com probabilidade não nula.

Sabe-se que *A* e *B* são acontecimentos compatíveis.

Prove que $1-P\left(\overline{A} \mid \left(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}\right)\right)=\dfrac{P(A)}{P(A\cup B)}$.

5. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em quatro naipes de 13 cartas cada: *espadas* e *paus* (cartas pretas); *copas* e *ouros* (cartas vermelhas). Em cada naipe há um ás, três figuras (*rei*, *dama* e *valete*) e mais nove cartas (do *2* ao *10*).

Extraem-se, ao acaso, de um baralho **completo**, duas cartas, uma a seguir à outra, **sem reposição**.

5.1. Considere os acontecimentos:

A: “Sair a dama de copas na primeira extração”

B: “Sair espadas na segunda extração”

C: “Sair figura na segunda extração”

Elabore uma composição na qual indique o valor de $P\left((B\cup C)\mid A\right)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

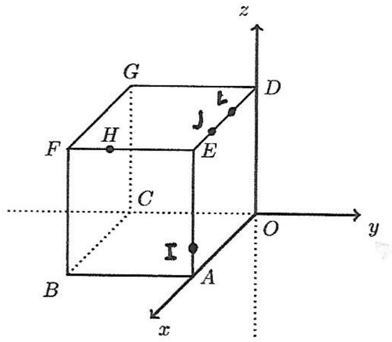
Na sua resposta, explique o significado de $P\left((B\cup C)\mid A\right)$ no contexto da situação descrita, explicite o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e apresente o valor de $P\left((B\cup C)\mid A\right)$ na forma de fração irredutível.

5.2. Admita que no baralho completo há *n* cartas marcadas com um certo sinal.

Sabe-se que a probabilidade de extrair, ao acaso, duas cartas que estejam marcadas com esse sinal é igual a $\dfrac{11}{26}$. Determine o número de cartas que estão marcadas com o tal sinal.

6. Na figura ao lado, está representado, num referencial ortonormado *Oxyz*, o cubo $[OABCDEFG]$, de aresta 6. Sabe-se que:

- o ponto *A* pertence ao semieixo positivo *Ox*;
- o ponto *C* pertence ao semieixo negativo *Oy*;
- o ponto *D* pertence ao semieixo positivo *Oz*;
- o ponto *I* pertence ao segmento de reta $[AE]$;
- o ponto *H* tem coordenadas $(6, -4, 6)$;
- os pontos *J* e *L* pertencem ao segmento de reta $[DE]$.



6.1. Considere os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J*, *L* e *O* assinalados na figura.

a) Determine o número de retas que podem ser definidas com os pontos assinalados.

b) Admita que se escolhem, ao acaso, três dos pontos assinalados.

Determine a probabilidade de esses pontos definirem um plano que contenha uma das faces do cubo $[OABCDEFG]$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

6.2. Seja β a amplitude, em radianos, do ângulo *AHC*.

Determine o valor exato de $\tan^2 \beta$.

Grupo I			
1.	**2.**	**3.**	**4.**
8	8	8	8

Grupo II										Total
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1. a)**	**6.1. b)**	**6.2.**	**200**
18	18	14	16	16	18	18	14	18	18	

Formulário

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$ e $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

PROPOSTA DE RESOLUÇÕES

Grupo I

1. O número de maneiras diferentes que os dois rapazes e as seis raparigas se podem sentar num banco corrido de oito lugares, de modo que os rapazes não fiquem juntos, pode ser dado pela diferença entre o número total de maneiras diferentes que as oito pessoas se podem sentar e o número total de maneiras diferentes que as oito pessoas se podem sentar de modo que os rapazes fiquem juntos, ou seja, $8!-2!\times 6!\times 7=30\,240$.

Resposta: (B)

2. Seja *A* o acontecimento "As duas cartas são de naipes diferentes".

O acontecimento contrário de *A* é $\overline{A}$: "As duas cartas são do mesmo naipe".

Assim, tem-se que:

$$P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{13\times 12\times 4}{52\times 51}=\frac{13}{17}$$

Resposta: (C)

3. O algarismo das unidades dos números pedidos ou é um 0 ou é um 5.

No caso de o algarismo das unidades ser o 0, tem-se $9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 1$ possibilidades.

Quando o algarismo das unidades é o 5, tem-se $8\times 8\times 7\times 6\times 5\times 1$ possibilidades.

Portanto, existem $9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 1+8\times 8\times 7\times 6\times 5\times 1=28\,560$ números de seis algarismos diferentes que são múltiplos de 5.

Resposta: (B)

4. O octógono é regular e tem perímetro igual a 32, pelo que a medida do comprimento de cada um dos seus lados é igual a $32:8=4$.

Por outro lado:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\times\cos\left(C\hat{B}A\right)=4\times 4\times\cos\left(135^{\circ}\right)=16\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-8\sqrt{2}\ .$$

Resposta: (C)

Grupo II

1. $N(17{,}42;\ 0{,}26)$

Sejam *A* e *B* os acontecimentos:

A: “O último salto do *Jump* não ultrapassou os 17,94 metros”

B: “O último salto do *Jump* ultrapassou os 17,16 metros”

Pretende-se calcular a probabilidade de o seu último salto não ter ultrapassado os 17,94 metros sabendo que o *Jump* passou à fase seguinte, ou seja, $P(A|B)$.

$$P(A|B)=P(X\leq 17{,}94|X>17{,}16)=\frac{P(17{,}16<X\leq 17{,}94)}{P(X>17{,}16)} \quad (1)$$

Tem-se, ainda, que:

$\mu-\sigma=17{,}42-0{,}26=17{,}16$

$\mu+2\sigma=17{,}42+2\times 0{,}26=17{,}94$

Pelo que voltando a (1), tem-se que:

$$\frac{P(17{,}16<X\leq 17{,}94)}{P(X>17{,}16)}=\frac{\frac{0{,}6827}{2}+\frac{0{,}9545}{2}}{\frac{0{,}6827}{2}+0{,}5}\approx 0{,}97$$

Portanto, a probabilidade pedida é igual a 0,97.

2.1. $A\cap B=\{2\}$, pelo que $P(\{2\})=0{,}2$.

Por outro lado, $A\cup B=\{2,3,4,5,6\}$.

Portanto, $\overline{A\cup B}=\{1\}$ e $P(\{1\})=1-P(A\cup B)=1-0{,}85=0{,}15$.

Como $C=\{1,2,3\}$, então $P(\{1,2,3\})=0{,}45$, pelo que:

$$P(\{1,2,3\})=0{,}45\Leftrightarrow P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})=0{,}45\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}15+0{,}2+P(\{3\})=0{,}45\Leftrightarrow P(\{3\})=0{,}1$$

Sabe-se, ainda, que $P(\overline{A})=0{,}35$ e $\overline{A}=\{1,3,5\}$. Portanto:

$$P(\{1,3,5\})=0{,}35\Leftrightarrow P(\{1\})+P(\{3\})+P(\{5\})=0{,}35\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}15+0{,}1+P(\{5\})=0{,}35\Leftrightarrow P(\{5\})=0{,}1$$

Como $B=\{2,3,5\}$, então:

$$P(\{2,3,5\})=P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{5\})=0{,}2+0{,}1+0{,}1=0{,}4$$

e como $P(B)=P(D)$, vem que $P(D)=0{,}4$, ou seja, $P(\{4\})=0{,}4$.

Finalmente, $P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})=1\Leftrightarrow P(\{6\})=0{,}05$.

Portanto, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória *X* é:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0,15	0,2	0,1	0,4	0,1	0,05

2.2. $\mu = 1\times 0{,}15 + 2\times 0{,}2 + 3\times 0{,}1 + 4\times 0{,}4 + 5\times 0{,}1 + 6\times 0{,}05 = 3{,}25$

Portanto, $P(X>\mu) = P(X>3{,}25) = P(X=4)+P(X=5)+P(X=6) = 0{,}4+0{,}1+0{,}05 = 55\%$.

3. Os acontecimentos *A* e *B* são independentes quando $P(A)\times P(B) = P(A\cap B)$.

Há duas bolas vermelhas com um número ímpar (5 e 7) e duas bolas azuis com um número ímpar (3 e 5). Portanto, $P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Tem-se, também, uma bola vermelha com um número múltiplo de 3 (6) e uma bola azul com um número múltiplo de 3 (3), pelo que $P(B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. Assim, $P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

Por outro lado:

$A\cap B$: "A bola retirada tem um número ímpar múltiplo de 3"

Apenas há uma bola nestas condições: a bola azul com o número 3.

Assim, $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$. Como $P(A)\times P(B)=P(A\cap B)$, pode concluir-se que os acontecimentos *A* e *B* são independentes.

4. $$1-P\left(\overline{A}\,\middle|\,\left(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}\right)\right)=\frac{P(A)}{P(A\cup B)} \Leftrightarrow 1-P\left(\overline{A}\,\middle|\,(A\cup B)\right)=\frac{P(A)}{P(A\cup B)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{P\left(\overline{A}\cap(A\cup B)\right)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)} \Leftrightarrow 1-\frac{P\left(\left(\overline{A}\cap A\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{P\left(\varnothing\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)} \Leftrightarrow 1-\frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)} \Leftrightarrow 1-\frac{P(B)-\left(P(A)+P(B)-P(A\cup B)\right)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{P(A\cup B)-P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)} \Leftrightarrow 1-\frac{P(A\cup B)}{P(A\cup B)}+\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-1+\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)} \Leftrightarrow \frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}$$

5.1. $P\left(\left(B\cup C\right)|A\right)$ traduz a probabilidade de sair espadas ou figura na segunda extração sabendo que na primeira saiu a dama de copas. O número de casos possíveis é 51, uma vez que a primeira carta retirada, a dama de copas, não foi reposta no baralho. O número de casos favoráveis é 21, pois às 13 cartas de espadas, onde estão incluídas as figuras de espadas, somam-se as três figuras de paus, as três figuras de ouros e as restantes duas figuras de copas, o rei e o valete, uma vez que a dama já tinha sido retirada e não colocada novamente no baralho. Por aplicação da Regra de Laplace, a probabilidade é igual a $\frac{21}{51}=\frac{7}{17}$.

5.2. Considere-se o acontecimento:

A: "As duas cartas retiradas estão marcadas com o tal sinal"

$$P\left(A\right)=\frac{11}{26}\Leftrightarrow\frac{n}{52}\times\frac{n-1}{51}=\frac{11}{26}\Leftrightarrow\frac{n^2-n}{52\times51}=\frac{11}{26}\Leftrightarrow n^2-n=\frac{11}{26}\times52\times51\Leftrightarrow n^2-n-1122=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=-33\vee n=34$$

Como $n\in\mathbb{N}$, então $n=34$, pelo que há 34 cartas marcadas com o tal sinal.

6.1. a) O número de retas que podem ser definidas com os pontos assinalados na figura é igual a ${}^{12}C_2-2-5-2=57$.

b) $$\frac{{}^{4}C_3\times3+\left({}^{7}C_3-1-{}^{4}C_3\right)\times2+{}^{6}C_3-1-1}{{}^{12}C_3}=\frac{90}{220}=\frac{9}{22}$$

6.2. $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}=\left\|\overrightarrow{HA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{HC}\right\|\times\cos\left(A\widehat{H}C\right)$

Tem-se que $A\left(6,0,0\right)$, $C\left(0,-6,0\right)$ e $H\left(6,-4,6\right)$, pelo que:

$\overrightarrow{HA}=A-H=\left(0,4,-6\right)$; $\overrightarrow{HC}=C-H=\left(-6,-2,-6\right)$

$\overrightarrow{HA}=\sqrt{0+4^2+\left(-6\right)^2}=\sqrt{52}$; $\overrightarrow{HC}=\sqrt{\left(-6\right)^2+\left(-2\right)^2+\left(-6\right)^2}=\sqrt{76}$

$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}=\left(0,4,-6\right)\cdot\left(-6,-2,-6\right)=0-8+36=28$

$$28=\sqrt{52}\times\sqrt{76}\times\cos\left(A\widehat{H}C\right)\Leftrightarrow\cos\left(A\widehat{H}C\right)=\frac{28}{\sqrt{52}\times\sqrt{76}}\Leftrightarrow\cos\left(A\widehat{H}C\right)=\frac{28}{\sqrt{3952}}$$

Por outro lado, $\frac{1}{\cos^2\left(A\widehat{H}C\right)}=1+\tan^2\left(A\widehat{H}C\right)$, ou seja:

$$\frac{1}{\left(\frac{28}{\sqrt{3952}}\right)^2}=1+\tan^2\left(A\widehat{H}C\right)\Leftrightarrow\tan^2\left(A\widehat{H}C\right)=\frac{3952}{784}-1\Leftrightarrow\tan^2\left(A\widehat{H}C\right)=\frac{198}{49}$$

Então, $\tan^2\left(\beta\right)=\frac{198}{49}$.