Proposta de Exame Final Nacional do Ensino Secundário

Prova Escrita de Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Proposta de resolução

GRUPO I

1. $^{22}C_{12}$

(Número de maneiras de nos 22 lugares da fila escolher 12 lugares para as raparigas. Os restantes 10 lugares serão ocupados pelos rapazes por ordem crescente das alturas.)

Resposta: (B)

2. $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0{,}9 \Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=0{,}9 \Leftrightarrow 1-P\left(A\cap B\right)=0{,}9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=1-0{,}9 \Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=0{,}1$

$P\left(\overline{A\cup B}\right)=0{,}5 \Leftrightarrow 1-P\left(A\cup B\right)=0{,}5 \Leftrightarrow P\left(A\cup B\right)=1-0{,}5 \Leftrightarrow P\left(A\cup B\right)=0{,}5$

$P(A)=2P(B)$

$P\left(A\cup B\right)=P(A)+P(B)-P\left(A\cap B\right)$

$0{,}5=2P(B)+P(B)-0{,}1 \Leftrightarrow 3P(B)=0{,}6 \Leftrightarrow P(B)=0{,}2$

Resposta: (B)

3. $f(0)=f'(0)=2$

$$g(x)=\frac{\mathrm{e}^{4x}+5}{f(x)}$$

$$g'(x)=\frac{\left(\mathrm{e}^{4x}+5\right)'\times f(x)-\left(\mathrm{e}^{4x}+5\right)\times f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=\frac{4\mathrm{e}^{4x}\times f(x)-\left(\mathrm{e}^{4x}+5\right)\times f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$$

Ponto de tangência: $(0,\ 3)$, dado que $g(0)=\dfrac{\mathrm{e}^{4\times 0}+5}{f(0)}=\dfrac{1+5}{2}=3$

Declive: $m=g'(0)=\dfrac{4\mathrm{e}^{4\times 0}\times f(0)-\left(\mathrm{e}^{4\times 0}+5\right)\times f'(0)}{\left[f(0)\right]^2}=\dfrac{4\times 2-6\times 2}{2^2}=-1$

Equação da reta tangente: $y=-x+3$

Resposta: (A)

4. $\log_a b = -\frac{1}{2}$ e $\log_c b = \frac{1}{3}$

$$\log_b c - \log_b a = \frac{\log_c c}{\log_c b} - \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\frac{1}{3}} - \frac{1}{-\frac{1}{2}} = 3 + 2 = 5$$

Resposta: (D)

5. $5 - 2n > 0 \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n < \frac{5}{2} \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = 1 \vee n = 2$

Logo, $u_{n+1} - u_n > 0$, $\forall n \in \{1, 2\}$ e $u_{n+1} - u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

$u_1 < u_2 \;\; < u_3 > u_4 \;\; > u_5 > \ldots$

Portanto, $u_n \leq u_3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como (u_n) é uma sucessão de termos positivos, então $0 < u_n \leq u_3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (u_n) é limitada.

Resposta: (C)

6. $A(0\, ,\, y)$ e $B(x\, ,\, 0)$

$\overrightarrow{AC}(4\, ,\, -3)$ e $\overrightarrow{BC}(1,\, 3)$

Sabemos que $A + \overrightarrow{AC} = C \wedge B + \overrightarrow{BC} = C$.

$A + \overrightarrow{AC} = B + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (0\, ,\, y) + (4\, ,-3) = (x\, ,\, 0) + (1\, ,\, 3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 4 = x + 1 \\ y - 3 = 0 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$$

Assim, $A(0\, ,\, 6)$ e $B(3\, ,\, 0)$.

$$m_{AB} = \frac{0-6}{3-0} = -2$$

A reta *AB* tem declive -2 e passa em $A(0\, ,\, 6)$.

$AB: \;\; y = -2x + 6$

Resposta: (A)

7. Se *f* é derivável em $\mathbb{R}$, então *f* é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

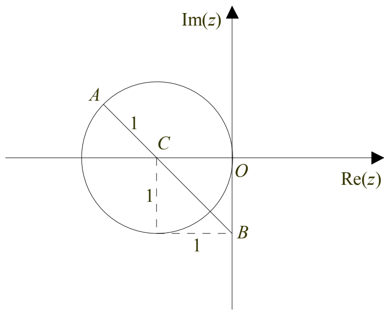
Em particular, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Como a reta de equação $y = -x + 3$ é tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa 1, temos que $f(1) = -1 + 3 = 2$ (o ponto de tangência pertence à reta tangente e ao gráfico de *f*).

Portanto, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

Resposta: (**D**)

8. As imagens geométricas dos números complexos *z* tais que $|z+1| = 1$ pertencem à circunferência de centro $C(-1\ ,\ 0)$ e raio 1.



A imagem geométrica do número complexo $z_1 = -\mathrm{i}$ é o ponto $B(0, -1)$.

Seja *A* o ponto da circunferência cuja distância a *B* é máxima.

Então, *C* é um ponto de *AB*, pelo que:

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = 1 + \sqrt{1+1} = 1 + \sqrt{2}$$

Resposta: (A)

GRUPO II

1. $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}^{15} = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}^{4\times3+3} = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}^3 = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\begin{cases} \tan(\arg z_1) = \dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \\ \arg z_1 \in 4.^{\text{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \text{ é um argumento de } z_1$$

$$z_1 = 2\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$u = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3 = \left[\frac{\mathrm{cis}\,\theta}{2\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right]^3 = \left[\frac{1}{2}\mathrm{cis}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \mathrm{cis}\left(3\theta + \pi\right)$$

Se a imagem geométrica, no plano complexo, do número complexo $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3$ pertence à bissetriz do segundo quadrante, então $3\theta+\pi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$.

$$3\theta+\pi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3\theta=\frac{3\pi}{4}-\pi+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\theta=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Se $k=0,\ \theta=-\frac{\pi}{12}$.

Se $k=1,\ \theta=-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$.

Se $k=2,\ \theta=-\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}=\frac{5\pi}{4}$.

Como $\theta\in\left]\pi\ ,\ \frac{3\pi}{2}\right[$, temos $\theta=\frac{5\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}$.

$$z_2=\operatorname{cis}\theta=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

2.1. Sejam os acontecimentos:

A: "A caixa escolhida é a A"

B: "A caixa escolhida é a B"

C: "As duas bolas retiradas são iguais"

Pretende-se determinar $P(B\,|\,C)$.

$P(C\,|\,A)=1$ (As bolas da caixa A são iguais.)

Cálculo de $P(C\,|\,B)$:

A caixa B tem quatro bolas pretas e quatro brancas.

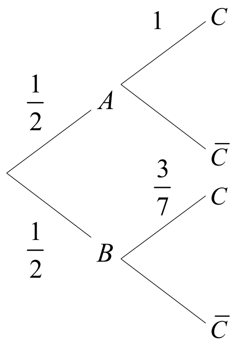
Número de casos possíveis: ${}^8C_2=28$

Número de casos favoráveis: ${}^4C_2+{}^4C_2=2\times 6=12$ (escolha de duas bolas brancas ou de duas bolas pretas)

$P(C\,|\,B)=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$

$$P(B\,|\,C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{P(B)\times P(C\,|\,B)}{P(A\cap C)+P(B\cap C)}==\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}}{\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}}=$$

$$=\frac{\frac{3}{14}}{\frac{7}{14}+\frac{3}{14}}==\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}}{\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}}=\frac{\frac{3}{14}}{\frac{7}{14}+\frac{3}{14}}=\frac{\frac{3}{14}}{\frac{10}{14}}=\frac{3}{10}$$



2.2. Número de casos possíveis (é o número de sequências com oito letras B e oito letras P):

$$^{8}C_4 = 70 \ \ (\text{ou } \frac{8!}{4!\times 4!} = 70)$$

Número de casos favoráveis:

Nas quatro primeiras posições da sequência têm de aparecer duas vezes a letra B e duas vezes a letra P (por exemplo: BPPB|BPPB).

Logo, o número de casos favoráveis é $^{4}C_2 = 6$.

A probabilidade pedida é $P = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}$.

3. $f(x) = \sin^2 x \sin(2x)$, $D_f = [0,\ \pi]$

3.1. $f'(x) = (\sin^2 x)' \sin(2x) + \sin^2 x(\sin(2x))' =$

$$= 2\sin x(\sin x)' \sin(2x) + \sin^2 x \times 2\cos(2x) =$$

$$= 2\sin x \cos x \sin(2x) + \sin^2 x \times 2\cos(2x) =$$

$$= 2\sin x \cos x \times 2\sin x \cos x + \sin^2 x \times 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) =$$

$$= 4\sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x \times 2\left(\cos^2 x - (1-\cos^2 x)\right) =$$

$$= 2\sin^2 x\left(2\cos^2 x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x\right) =$$

$$= 2\sin^2 x\left(4\cos^2 x - 1\right)$$

3.2. Ponto de tangência:

$P\left(\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\right)$, dado que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi) = 1^2 \times 0 = 0$

Declive:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(4\cos^2\frac{\pi}{2} - 1\right) = 2\times 1\times(4\times 0 - 1) = -2$$

Equação da reta tangente:

$$y - 0 = -2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = -2x + \pi$$

3.3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(4\cos^2 x - 1\right) = 0 \wedge x \in [0\ ,\ \pi] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin^2 x = 0 \vee 4\cos^2 x - 1 = 0\right) \wedge x \in [0\ ,\ \pi] \Leftrightarrow \left(\sin x = 0 \vee \cos^2 x = \frac{1}{4}\right) \wedge x \in [0\ ,\ \pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = \pi \vee \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -\frac{1}{2}\right) \wedge x \in [0\ ,\ \pi] \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pi \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
f'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	0
	Mín		Máx		Mín		Máx

$$f(0)=\sin^2 0 \sin 0 = 0 = f(\pi)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin^2\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin^2\frac{2\pi}{3}\sin\frac{4\pi}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

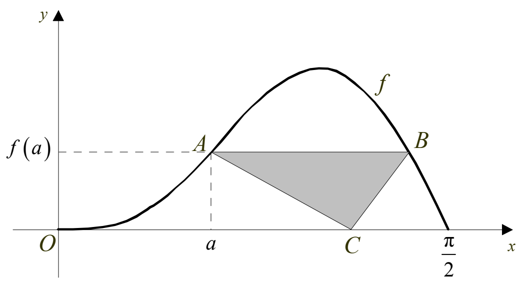
f é estritamente crescente em $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{2\pi}{3}\ ,\ \pi\right]$ e estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{2\pi}{3}\right]$.

f admite mínimos relativos para $x=0$ e $x=\frac{2\pi}{3}$ respetivamente iguais a 0 e a $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

f admite máximos relativos para $x=\frac{\pi}{3}$ e $x=\pi$ respetivamente iguais a $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ e a 0.

3.4. Área do triângulo $[ABC]$: $\dfrac{\overline{AB}\times f(a)}{2}$

$$\frac{\overline{AB}\times f(a)}{2}=\frac{f(a)}{4}\Leftrightarrow\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\overline{AB}=\frac{1}{2}$$

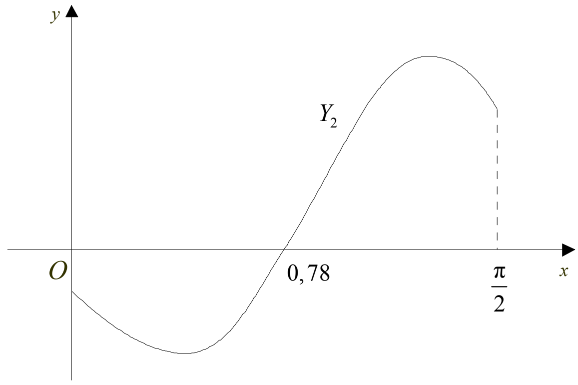


Como a reta AB é paralela ao eixo Ox e $\overline{AB}=\frac{1}{2}$, temos $A(a\ ,\ f(a))$ e $B\left(a+\frac{1}{2}\ ,\ f(a)\right)$, pelo que a é a solução da equação: $f(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$.

Recorrendo à calculadora consideraram-se, no intervalo $\left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, as funções definidas por

$Y_1=\sin^2 x\sin(2x)$ e $Y_2=Y_1(x)-Y_1\left(x+\frac{1}{2}\right)$ e determinou-se o zero de Y_2.

Foi obtido o seguinte resultado:



A abcissa do ponto A é aproximadamente igual a 0,78.

4. $g(x)=\begin{cases}(x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} & \text{se } x<1\\ \dfrac{2\ln x+1}{2x} & \text{se } x\geq 1\end{cases}$

4.1. $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0^-\times\mathrm{e}^{\frac{1}{0^-}}=0\times\mathrm{e}^{-\infty}=0\times 0=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2\ln x+1}{2x}=\dfrac{2\ln 1+1}{2}=\dfrac{2\times 0+1}{2}=\dfrac{1}{2}=g(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

Logo, *f* é descontínua no ponto $x=1$.

4.2. Quando $x\to-\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\right]=(1-0)\mathrm{e}^0=1$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}-x\right]\overset{(\infty-\infty)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{y}\mathrm{e}^y-1-\dfrac{1}{y}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^y-1}{y}-1\right)=$

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^y-1}{y}-1=1-1=0$

$y=\dfrac{1}{x-1}\Leftrightarrow x-1=\dfrac{1}{y}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1+\dfrac{1}{y}$

Se $x\to-\infty$, então $y\to 0$.

A reta de equação $y=x$ é uma assíntota ao gráfico de g quando $x\to-\infty$.

Quando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln x + 1}{2x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2\ln x}{2x} + \frac{1}{2x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0 + 0 = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de g quando $x \to +\infty$.

4.3. Em $]1, +\infty[$:

$$g'(x) = \left(\frac{2\ln x + 1}{2x} \right)' = \frac{(2\ln x + 1)' \times 2x - (2\ln x + 1) \times (2x)'}{(2x)^2} =$$

$$= \frac{2 \times \frac{1}{x} \times 2x - (2\ln x + 1) \times 2}{4x^2} = \frac{4 - 4\ln x - 2}{4x^2} = \frac{2 - 4\ln x}{4x^2} = \frac{1 - 2\ln x}{2x^2}$$

$$g''(x) = \left(\frac{1 - 2\ln x}{2x^2} \right)' = \frac{-2 \times \frac{1}{x} \times 2x^2 - (1 - 2\ln x) \times 4x}{4x^4} = \frac{-4x - 4x(1 - 2\ln x)}{4x^4} =$$

$$= \frac{4x(-1 - 1 + 2\ln x)}{4x^4} = \frac{2\ln x - 2}{x^3}$$

$$g''(x) = 0 \wedge x \in]1, +\infty[\Leftrightarrow \frac{2\ln x - 2}{x^3} = 0 \wedge x \in]1, +\infty[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln x - 2 = 0 \wedge x \in]1, +\infty[\Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge x \in]1, +\infty[\Leftrightarrow x = \mathrm{e}$$

x	1		e	$+\infty$
g''		–	0	+
g		$\frown$		$\smile$
			P.I.	

$$g(\mathrm{e}) = \frac{2\ln \mathrm{e} + 1}{2\mathrm{e}} = \frac{2 \times 1 + 1}{2\mathrm{e}} = \frac{3}{2\mathrm{e}}$$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]1, \mathrm{e}]$ e voltada para cima em $[\mathrm{e}, +\infty[$. O ponto $\left(\mathrm{e}, \frac{3}{2\mathrm{e}}\right)$ é um ponto de inflexão do gráfico de g.

5. $\alpha: 2x + 3y + 6z + 1 = 0$; $V\left(\frac{5}{3}, 2, 1\right)$; $S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$

5.1. A reta VC passa em V e é perpendicular a α. Logo, $\vec{n}(2, 3, 6)$ e, por ser um vetor normal a α, então é um vetor diretor de VC.

$$VC: (x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, 2, 1\right) + k(2, 3, 6), k \in \mathbb{R}$$

5.2. C é a interseção de VC com α: $2x+3y+6z+1=0$.

Um ponto da reta VC é da forma $\left(\frac{5}{3}+2k\ ,\ 2+3k\ ,\ 1+6k\right)$.

Substituindo x por $\frac{5}{3}+2k$, y por $2+3k$ e z por $1+6k$ na equação do plano α, obtemos:

$$2\left(\frac{5}{3}+2k\right)+3(2+3k)+6(1+6k)+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4k+9k+36k+\frac{10}{3}+6+6+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49k=-\frac{49}{3} \Leftrightarrow k=-\frac{1}{3}$$

Portanto, dado que o ponto C é a interseção da reta VC com o plano α, as coordenadas de C obtêm-se substituindo k por $-\frac{1}{3}$ em $\left(\frac{5}{3}+2k\ ,\ 2+3k\ ,\ 1+6k\right)$:

$$C\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\ ,\ 2+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)\ ,\ 1+6\times\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

ou seja, $C(1\ ,\ 1\ ,\ -1)$.

5.3. O ponto $C(1\ ,\ 1\ ,\ -1)$ é o centro da superfície esférica de raio igual a 1 definida por $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$.

Como o plano α passa no ponto C, a interseção deste plano com a superfície esférica é uma circunferência de raio 1. Logo, a base do cone é um círculo de raio 1.

Altura do cone:

$$\overline{VC}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-1\right)^2+(2-1)^2+(1+1)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+1+4}=\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{7}{3}$$

$$V_{\text{cone}}=\frac{1}{3}\times\pi\times 1^2\times\frac{7}{3}=\frac{7\pi}{9}$$

A medida do volume do cone é $\frac{7\pi}{9}$.

FIM