Proposta de resolução

GRUPO I

1. Há 10 rapazes, incluindo o Rui. Como este não faz parte do grupo, dos restantes 9 rapazes são escolhidos 2.

O número de maneiras de escolher os rapazes é ${}^{9}C_2$.

Há 14 raparigas, incluindo a Sofia. Como a Sofia faz parte do grupo, são escolhidas 2 raparigas das restantes 13.

O número de maneiras de escolher as raparigas é ${}^{13}C_2$.

O número de maneiras de formar o grupo é ${}^{9}C_2 \times {}^{13}C_2$.

Resposta: (D)

2. Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$.

$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{BC} = -4 \Leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos 120^{\circ} = -4$

Seja $\overline{AB} = x$. Então:

$$x^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 8$$

Como $x > 0$, tem-se $x = 2\sqrt{2}$.

O perímetro do triângulo $[ABC]$ é $6\sqrt{2}$.

Resposta: (C)

3.
$$\log_2\left(\sqrt{\frac{1}{4^{1-k}}}\right) = \log_2\left(\sqrt{4^{k-1}}\right) = \log_2\left(4^{\frac{k-1}{2}}\right) = \frac{k-1}{2}\log_2 4 = \frac{k-1}{2} \times 2 = k-1$$

Resposta: (A)

4. Como o polígono é um eneágono, então: $A\hat{O}B = \dfrac{2\pi}{9}$

$$z_A = 2cis\left(\frac{19\pi}{18} - \frac{2\pi}{9}\right) = 2cis\left(\frac{15\pi}{18}\right) = 2cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

Assim: $z_A = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$

Resposta: (D)

5. Sabe-se que: $(f\circ g)'(0) \;=\; f'(g(0))\times g'(0) \;=\; f'(g(0))\times g'(0)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; f'(1)=\frac{1}{2}$$

Sendo $g(x)=\mathrm{e}^{2x}-\ln\left(x^2+1\right)$, então $g'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Assim, $g(0)=1$ e $g'(0)=2$.

Então: $(f\circ g)'(0) \;=\; f'(1)\times g'(0) \;=\; \dfrac{1}{2}\times 2=1$

Resposta: (C)

6. $f(x)=\log_2 x$

Seja $P(x, f(x))$, com $x>1$.

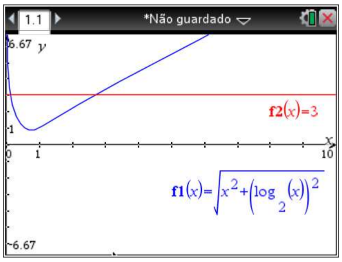
Sabendo que $\overline{OP}=\sqrt{x^2+(\log_2 x)^2}$, pode resolver-se graficamente a equação $\overline{OP}=3$ considerando

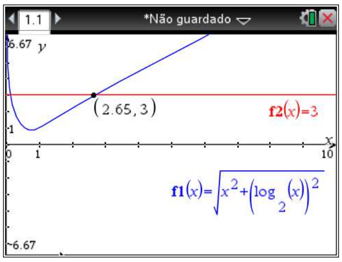
$f_1(x)=\sqrt{x^2+(\log_2 x)^2}$ e $f_2(x)=3$.

Observando as figuras ao lado, conclui-se que existem duas soluções.

Analisando o ponto de interseção dos gráficos que tem abcissa maior que 1, conclui-se que $x\approx 2,65$.

Resposta: (B)





7. Sabe-se que $u_1=4$ e $\forall n\in\mathbb{N},\; u_{n+1}-u_n=-\dfrac{1}{2}u_n$.

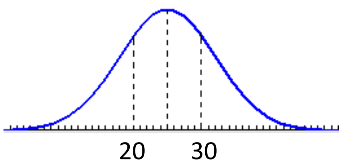
$$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2}u_n \;\Leftrightarrow\; u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+u_n \;\Leftrightarrow\; u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n \;\Leftrightarrow\; \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}$$

Como $u_1=4$ e a razão da progressão geométrica é $\dfrac{1}{2}$, conclui-se que:

$$u_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \;\Leftrightarrow\; u_n=2^2\times 2^{1-n} \;\Leftrightarrow\; u_n=2^{3-n}$$

Resposta: (A)

8. Sabe-se que $P(20<X<30)=0,56$.



$$P(X>30)=0,5-\frac{0,56}{2}=0,5-0,28=0,22$$

A probabilidade de a consulta ter uma duração superior a 30 minutos é de 22%.

Resposta: (D)

GRUPO II

1.1. a) $|z-\bar{z}|\leq 4 \ \wedge \ \frac{\pi}{6}\leq \arg(z)\leq \frac{3\pi}{4}$

Sendo $z=x+yi$, tem-se:

$$|x+yi-x+yi|\leq 4 \ \wedge \ \frac{\pi}{6}\leq \arg(z)\leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow |2yi|\leq 4 \ \wedge \ \frac{\pi}{6}\leq \arg(z)\leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y\leq 4 \ \wedge \ 2y\geq -4 \ \wedge \ \frac{\pi}{6}\leq \arg(z)\leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow y\leq 2 \wedge y\geq -2 \ \wedge \ \frac{\pi}{6}\leq \arg(z)\leq \frac{3\pi}{4}$$

$\operatorname{Im}(z_A)=2$

Seja P o ponto de interseção de AB com o eixo imaginário.

$\overline{OP}=2$, então $P\hat{A}O=\frac{\pi}{6}$.

Como $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\overline{OP}}{\overline{AP}}$, conclui-se que $\overline{AP}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

Assim, $z_A=2\sqrt{3}+2i$.

b) Seja P o ponto de interseção de AB com o eixo imaginário.

Como $\arg(z_B)=\frac{3\pi}{4}$, relativamente ao triângulo [BOP], tem-se:

$P\hat{O}B=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$.

Como $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\overline{BP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{BP}=\overline{OP}$, tem-se $\overline{BP}=\overline{OP}=2$ e $z_B=-2+2i$.

$|z_B|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$z_B=2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

1.2. Seja $z=\rho\operatorname{cis}\theta$.

$z^2=\bar{z} \Leftrightarrow \rho^2\operatorname{cis}(2\theta)=\rho\operatorname{cis}(-\theta)$

$$\begin{cases}\rho^2=\rho\\ 2\theta=-\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho^2-\rho=0\\ 3\theta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho(\rho-1)=0\\ \theta=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\rho=0\\ \theta=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\{0,1,2\}\end{cases} \vee \begin{cases}\rho-1=0\\ \theta=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\{0,1,2\}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=0 \ \vee \ z=\operatorname{cis}0 \ \vee \ z=\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \vee \ z=\operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

A imagem geométrica de $z=\operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ não pertence ao triângulo [OAB].

$$z=\operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2.1. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{2x}-e^x}{1-e^{2x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x\left(e^x-1\right)}{-\left(e^{2x}-1\right)} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{e^x}{-2}\times\dfrac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}\right)=$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{e^x}{2}\right)\times\frac{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}}{\lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ 2x\to 0^-}}\frac{e^{2x}-1}{2x}} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\pi+x)}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{2}$$

$$f(0)=-\frac{1}{2}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, conclui-se que *f* é contínua em $x=0$.

2.2. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{2x}-e^x}{1-e^{2x}} = \dfrac{0-0}{1-0}=0$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\sin(\pi+x)}{2x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-1}{2x}\times\sin x\right)$$

A função $y=\sin x$ é limitada e $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-1}{2x}=0$.

Então, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{-1}{2x}\times\sin x\right)=0$.

Assim: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$. Conclui-se que a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de *f* quando $x\to -\infty$ e quando $x\to +\infty$.

3.1. Coordenadas do vértice *A*: $(x,0,0)$

Coordenadas do vértice *C*: $(0,0,z)$

Equação do plano *ABC*: $2x+5y+4z-16=0$

$2x+0+0-16=0 \Leftrightarrow x=8$. Logo, $A(8,0,0)$.

$0+0+4z-16=0 \Leftrightarrow z=4$. Logo, $C(0,0,4)$.

$\overrightarrow{CA} = A-C = (8,\ 0,\ -4)$

Sabe-se que $B(-2,\ 4,\ 0)$.

$\overrightarrow{CB} = B-C = (-2,4,-4)$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (8,\ 0,\ -4)\cdot(-2,\ 4,\ -4) = -16+0+16=0$

Conclui-se que $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$, pelo que o triângulo [*ABC*] é retângulo em *C*.

3.2. Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x,y,z)=(7,12,8)+k(2,5,4)\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

Como o ponto T pertence à reta r, então as coordenadas de T são do tipo:

$$(7+2k,12+5k,8+4k)$$

Mas, o ponto T também pertence ao plano ABC. Então:

$2(7+2k)+5(12+5k)+4(8+4k)-16=0$

$2(7+2k)+5(12+5k)+4(8+4k)-16=0 \Leftrightarrow 90+45k=0 \Leftrightarrow k=-2$

Se $k=-2$, as coordenadas do ponto T são $\left(7+2\times(-2),12+5\times(-2),8+4\times(-2)\right)$, ou seja, $T(3,2,0)$.

4.1. Números das bolas vermelhas:

$$1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ \text{ e }\ 9$$

Dispor as cinco bolas lado a lado:

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

Pretende-se que as bolas com os números 1 e 9 fiquem nos extremos:

$$1\ \_\ \_\ \_\ 9 \quad \text{ou} \quad 9\ \_\ \_\ \_\ 1$$

Número de casos possíveis: $5!=120$

Número de casos favoráveis: $2!\times 3!=2\times 6=12$

Seja P a probabilidade pedida. Então, $P=\dfrac{12}{120}=0{,}1$.

A probabilidade de as bolas com os números 1 e 9 ficarem nos extremos é 10%.

4.2. a) A variável aleatória X pode tomar os seguintes valores: 0, 1 e 2.

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\dfrac{4\times 3}{9\times 8}$	$\dfrac{5\times 4+4\times 5}{9\times 8}$	$\dfrac{5\times 4}{9\times 8}$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{5}{9}$	$\dfrac{5}{18}$

b) Se a soma dos números das duas bolas retiradas é par, então ambas têm número par ou ambas têm número ímpar.
A probabilidade condicionada é:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}}{\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}}=\frac{20}{20+12}=\frac{5}{8}\text{, ou seja, } P(A|B)=\frac{5}{8}.$$

5. A reta t é paralela à reta definida pela equação: $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

Declive da reta t: $\frac{3}{2}$

5.1. a) $f'(x)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 1-2\times\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \vee\ \frac{x}{2}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+4k\pi \ \vee\ x=\frac{7\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $x\in[0,\ 3\pi]$, tem-se $x=\frac{7\pi}{3}$.

A abcissa do ponto A é $\frac{7\pi}{3}$.

b) Estudo do sinal da segunda derivada da função f:

$f''(x)=\left(1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)'=-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$f''(x)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $x\in[0,3\pi]$, tem-se $x=\pi\ \vee\ x=3\pi$.

$f(0)=0+2\cos 0=2$

$f(\pi)=\pi+2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$

$f(3\pi)=3\pi+2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=3\pi$

x	0		π		3π
$f''(x)$	–	–	0	+	0
$f(x)$	2	$\frown$	π	$\smile$	3π

O ponto B tem coordenadas (π,π).

5.2. Se a ordenada de P é o triplo da abcissa, então as coordenadas de P são do tipo $(c,\ 3c)$.

Como P é um ponto do gráfico de f, tem-se: $f(c)=3c$

Pretende-se mostrar que a equação $f(c)=3c$ é possível no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$f(c)=3c \Leftrightarrow c+2\cos\left(\frac{c}{2}\right)=3c \Leftrightarrow -2c+2\cos\left(\frac{c}{2}\right)=0$$

Seja g a função definida por $g(x)=-2x+2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

A função g é contínua em $\mathbb{R}$ por ser a soma de funções contínuas em $\mathbb{R}$.

Se g é contínua em $\mathbb{R}$, então é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$g(0)=0+2\cos(0)=2 \text{ e } g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\times\frac{\pi}{2}+2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\pi+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\pi+\sqrt{2}$$

Assim, tem-se:

• g contínua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

• $g(0)\times g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

Pelo corolário do Teorema de Bolzano, conclui-se que $\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: g(c)=0$.

Mas, $g(c)=0 \Leftrightarrow f(c)=3c$, como queríamos demostrar.

6. $h(x)=3x-2\ln x$

Coordenadas de A:

$h(x)=3x-4 \Leftrightarrow 3x-2\ln x=3x-4 \Leftrightarrow \ln x=2 \Leftrightarrow x=e^2$

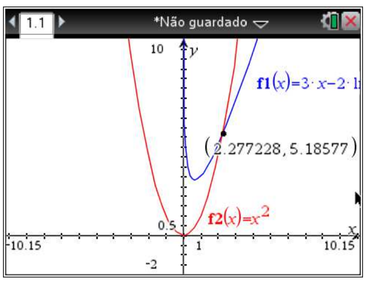
$h(x)=3e^2-4$

$A\left(e^2, 3e^2-4\right)$

Coordenadas de B:

Seja $i(x)=x^2$.

Considerando na calculadora as funções h e i, determina-se o ponto de interseção dos respetivos gráficos.



Considerando valores arredondados às milésimas, observa-se que $B(2{,}277 ; 5{,}186)$

Sendo M o ponto médio de $[AB]$, obtém-se, aproximadamente, $M\left(\frac{e^2+2{,}277}{2}, \frac{3e^2-4+5{,}186}{2}\right)$, isto é, aproximadamente $M(4{,}8 ; 11{,}7)$.