Proposta de miniteste de avaliação

Matemática A

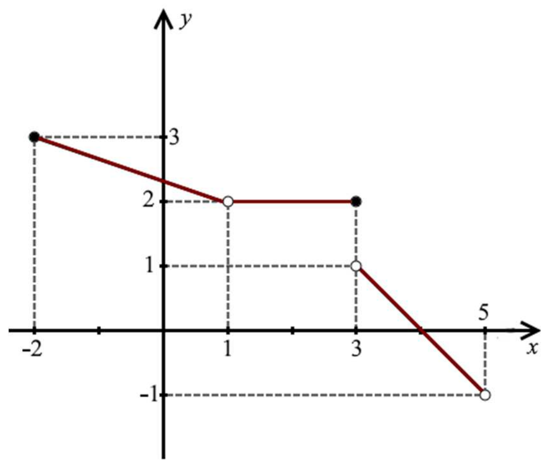
12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 45 minutos **| Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

1. Na figura ao lado está representado o gráfico de uma função f de domínio $[-2,\ 5[\setminus\{1\}$.



Indique os valores de a tal para os quais existe:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

(A) $a \in [-2,\ 5[\setminus\{1\}$

(B) $a \in [-2,\ 5[\setminus\{3\}$

(C) $a \in [-2,\ 5]\setminus\{3\}$

(D) $a \in [-2,\ 5[\setminus\{1,\ 3\}$

2. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$ contínua no intervalo $[-3,\ 3]$.

Sabe-se que $g(-3) = 2$ e $g(3) = 4$.

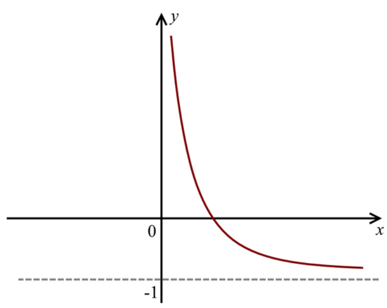
Indique qual das expressões define uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, para o qual o Teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $]-3,\ 3[$.

(A) $h(x) = x + \frac{1}{2} g^2(x)$ **(B)** $h(x) = x - \frac{1}{2} g^2(x)$

(C) $h(x) = x^2 + \frac{1}{2} g(x)$ **(D)** $h(x) = x^2 - \frac{1}{2} g(x)$

3. Na figura está representada parte de um gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$.

Tal como a figura sugere a reta de equação $y = -1$ é assíntota ao gráfico de f.



Indique o valor de $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln(x)}{x} - f(x) \right]$.

(A) 0 **(B)** -1

(C) 1 **(D)** $+\infty$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Calcule.

1.1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - x^4}{\sqrt{x}}$

1.2. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{\ln(x-3)}$

2. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = 2 + \frac{x^2}{e^x}$$

Mostre, usando exclusivamente métodos analíticos, que o gráfico da função f tem uma única assíntota.

3. Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{se } x > 1 \\ k + e^x & \text{se } x = 1 \\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{e - e^x}{ex - e} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

3.1. Determine k de modo que a função seja contínua em $x = 1$ em $\mathbb{R}$.

3.2. Resolva, no intervalo $]1, \ +\infty[$, a equação $g(x) = -2$.

FIM

Cotações

Grupo I

1.	2.	3.	Total
8	8	8	24

Grupo II

1.1.	1.2.	2.	3.1.	3.2.	Total
30	30	40	40	36	176

Proposta de resolução

Grupo I

1. Resposta: (**C**)

2. $h(-3) = -3 + \frac{1}{2} \times 2^2 = -3 + 2 = -1$

$h(3) = 3 + \frac{1}{2} \times 4^2 = 3 + 8 = 11$

$h(-3) \times h(3) < 0$.

Pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um zero em $]-3,\ 3[$.

Resposta: (**A**)

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} - f(x) \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} - \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 - (-1) = 1$

Resposta: (**C**)

Grupo II

1.1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x - x^4}{\sqrt{x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x(1 - x^3)\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x(1-x)\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}(1-x)\sqrt{x}}{\cancel{x}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \left[(1-x)\sqrt{x} \right] = (1 \times 0) \times 0 = 0$

1.2. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{\ln(x-3)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \theta$

$= \lim\limits_{x \to 4} \frac{(x-4)(x-2)}{\ln(x-3)} =$

C.A.
$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2$

$= \lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{\ln(x-4+1)} \times \lim\limits_{x \to 4} (x-2) =$

$y = x - 4 \Leftrightarrow x = y + 4$
Se $x \to 4,\ y \to 0$

$= \lim\limits_{y \to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} \times 2 = \frac{1}{\lim\limits_{y \to 0} \frac{\ln(y+1)}{y}} =$

$= \frac{1}{1} \times 2 = 2$

2.1. Como $D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua, então f não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

Quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{x^2}{e^x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{e^x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} + \frac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}} = 0 + \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo, $m = 0$.

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{x^2}{e^x}\right)=2+\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}}=2+\frac{1}{+\infty}=2$$

A reta de equação $y=2$ é uma assíntota ao gráfico da função quando $x\to+\infty$.

Quando $x\to-\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{x^2}{e^x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{e^x}\right)=0+\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

Portanto, não existe assíntota quando $x\to-\infty$.

Logo, a reta de equação $y=2$ é a única assíntota ao gráfico da função f.

3.1. $$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1^-}\left[-\frac{1}{2}-\frac{e-e^x}{ex-e}\right]=-\frac{1}{2}-\lim_{x\to1^-}\frac{e-e^x}{ex-e}=-\frac{1}{2}-\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{e}\left(1-e^{x-1}\right)}{\cancel{e}(x-1)}=$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=-\frac{1}{2}+\lim_{y\to0^-}\frac{e^y-1}{y}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

$x-1=y\Leftrightarrow x=y+1$
Se $x\to1^-$, $y\to0^-$

$$k+e^1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}-e$$

3.2. $$g(x)=-2\wedge x>1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=-2\wedge x>1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}+2=0\wedge x>1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-1+2x-2}{x-1}=0\wedge x>1\Leftrightarrow\sqrt{x}+2x-3=0\wedge x>1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}=3-2x\wedge x>1\Rightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2=(3-2x)^2\wedge x>1\Leftrightarrow x=9-12x+4x^2\wedge x>1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-13x+9=0\wedge x>1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x=1\vee x=\frac{9}{4}\right)\wedge x>1\Leftrightarrow x=\frac{9}{4}$$

Verificação:

$$x=\frac{9}{4}:\ \frac{\sqrt{\frac{9}{4}}-1}{\frac{9}{4}-1}\overset{?}{=}-2\Leftrightarrow\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{5}{4}}=-2\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}}=-2\Leftrightarrow\frac{4}{10}=-2\Leftrightarrow\frac{2}{5}=-2\ \text{(Proposição falsa)}$$

Logo, $S=\varnothing$.