Proposta de Exame Final de Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração da prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos | **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. No Triângulo de Pascal considere a linha formada pelos elementos da forma ${}^nC_k$ tais que o quarto elemento é igual ao décimo.

Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.

Qual é a probabilidade de a soma desses dois elementos ser superior a $2n$?

(**A**) $\frac{1}{13}$ (**B**) $\frac{6}{13}$ (**C**) $\frac{12}{13}$ (**D**) $\frac{19}{33}$

2. Sejam Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e A e B dois acontecimentos **equiprováveis** ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 60\%$
- $P(A \mid B) = 75\%$

Qual é o valor de $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$?

(**A**) 10% (**B**) 25% (**C**) 50% (**D**) 75%

3. De uma função f, diferenciável em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- $f'(0) = 0$
- $f''(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(**A**) f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

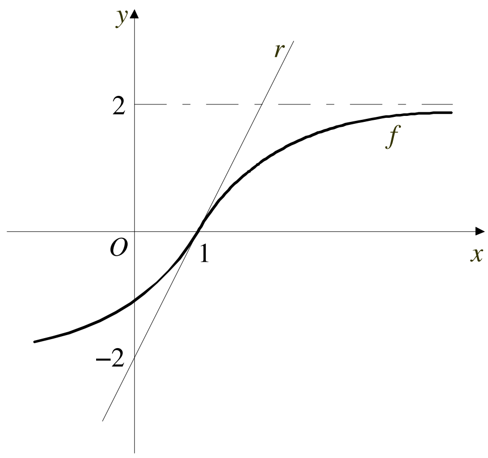
(**B**) $f(0) > f(1)$

(**C**) f tem um mínimo relativo para $x = 0$.

(**D**) f tem um máximo relativo para $x = 0$.

4. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico de uma função f diferenciável em $\mathbb{R}$;
- a reta r, definida pela equação $y = 2x - 2$, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1;
- a reta de equação $y = 2$, assíntota do gráfico de f.



Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)}{h} = 2$

(B) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$

(C) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{2x-2} = 2$

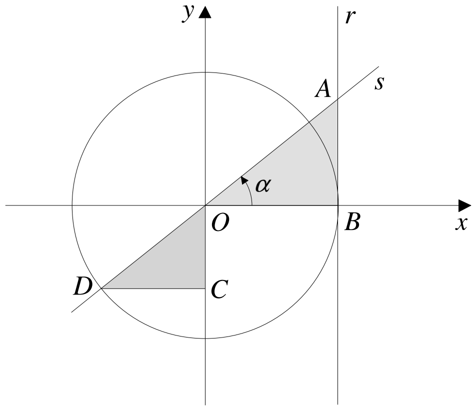
(D) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - 2 \right] = 2$

5. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = -\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

Um argumento do número complexo z é:

(A) $\dfrac{\pi}{7}$ **(B)** $-\dfrac{6\pi}{7}$ **(C)** $-\dfrac{\pi}{7}$ **(D)** $\dfrac{6\pi}{7}$

6. Na figura estão representados o círculo trigonométrico, as retas r e s bem como os triângulos $[OBA]$ e $[ODC]$.



Sabe-se que:

- a reta r é tangente à circunferência no ponto $B(1\,,0)$;
- a reta s passa na origem do referencial e interseta a reta r no ponto A;
- o ponto D, situado no terceiro quadrante, pertence à circunferência e à reta s;
- o ponto C pertence ao eixo Oy e o segmento de reta $[DC]$ é perpendicular a este eixo.

Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}A$ $\left(\alpha \in \left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a soma das áreas dos triângulos $[OBA]$ e $[ODC]$?

(A) $\dfrac{\sin\alpha\left(1+\cos^2\alpha\right)}{2\cos\alpha}$ **(B)** $\dfrac{\sin\alpha+\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}$

(C) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha}$ **(D)** $\dfrac{\cos\alpha\left(1+\sin^2\alpha\right)}{2\sin\alpha}$

7. Num referencial o.n. $Oxyz$ a reta r está contida no plano α.

A reta r é definida pela equação vetorial $(x,\,y,\,z)=(1,0,1)+k(2,1,1)$, $k\in\mathbb{R}$ e o plano α é definido, para determinados valores de a e b, por $2x+ay+bz=3$.

Os valores de a e b são:

(A) $a=-5$ e $b=1$

(B) $a=1$ e $b=1$

(C) $a=-2$ e $b=-1$

(D) $a=-2$ e $b=1$

8. De uma sucessão (u_n) sabe-se que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(**A**) (u_n) é uma progressão aritmética.

(**B**) Se $u_2 = 2$ então $u_1 = \frac{1}{2}$.

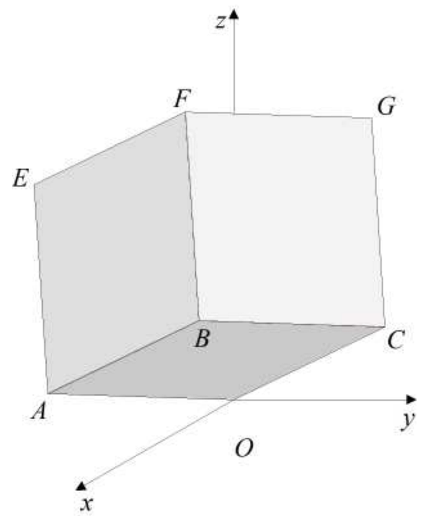
(**C**) $u_{101} - 0,01 = u_{100}$

(**D**) $u_{10} < u_9$

Grupo II

1. Na figura está representado, num referencial o. n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$ (o vértice D não é visível).

Sabe-se que os pontos A, E e G têm coordenadas $(6, -3, 2)$, $(3, -5, 8)$ e $(-1, 4, 9)$, respetivamente.



1.1. Mostre que o ponto D tem coordenadas $(-3, -2, 6)$.

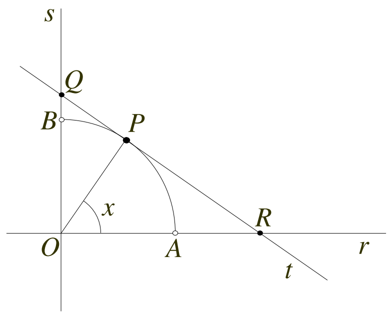
1.2. A reta BG interseta o plano xOz num ponto P. Determine as coordenadas do ponto P.

1.3. Determine, na forma $ax + by + cz + d = 0$, uma equação do plano DFG.

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{\mathrm{i}^{11}(1-\mathrm{i})^4}{2 - 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$ para o qual z^n é um número real negativo.

3. Na figura estão representados:



- duas retas, r e s, perpendiculares e que se intersetam no ponto O;
- um quarto de circunferência de centro O e raio 1 que interseta as retas r e s nos pontos A e B, respetivamente;
- um ponto P que se move sobre o arco de circunferência, sendo $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo AOP;
- a reta t, tangente ao arco de circunferência no ponto P e que interseta as retas r e s nos pontos R e Q, respetivamente.

Seja f a função que, a cada valor de x, faz corresponder a distância entre os pontos R e Q.

3.1. Mostre que $f(x) = \dfrac{2}{\sin(2x)}$.

3.2. Determine o valor de x para o qual a distância $\overline{QR}$ é mínima.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, f', é dada por:

$$f'(x) = x^n \, \mathrm{e}^{-x}$$

4.1. Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o ponto do gráfico de f com abcissa n é um ponto de inflexão.

4.2. Considere $n = 4$.

Recorrendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy, mostre que existe um ponto do gráfico de f, cuja abcissa pertence ao intervalo $]1, 2[$, em que a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares e, utilizando a calculadora gráfica, determine um valor arredondado às centésimas da abcissa desse ponto.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

5. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = 2x - \ln(e^x - 1)$.

Estude a função f quanto à:

5.1. monotonia e à existência de extremos relativos;

5.2. existência de assíntotas do gráfico.

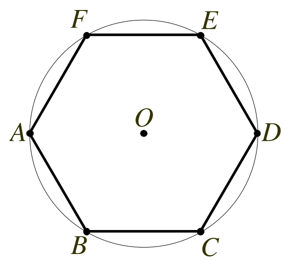
6. Considere o hexágono regular $[ABCDEF]$ inscrito numa circunferência de centro O.

Entre os sete pontos (os seis vértices e o centro da circunferência) escolhem-se três ao acaso.

Qual é a probabilidade de que os três pontos escolhidos definam:

6.1. um triângulo retângulo?

6.2. um triângulo com vértice no ponto A?



COTAÇÕES

Grupo I

8 × 5 pontos = 40 pontos

Grupo II

1.1.	1.2.	1.3.	2	3.1.	3.2	4.1.	4.2.	5.1.	5.2	6.1.	6.2	Total
5	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15	15	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1. Quarto elemento: ${}^{n}C_3$

Décimo elemento: ${}^{n}C_9$

${}^{n}C_3 = {}^{n}C_9 \Leftrightarrow n-3=9 \Leftrightarrow n=12$

Trata-se da linha correspondente a $n=12$ a qual tem 13 elementos.

O número de casos possíveis é ${}^{13}C_2 = 78$.

Os primeiros três elementos e os três últimos dessa linha são:

$$1 \quad 12 \quad 66 \quad \ldots \quad 66 \quad 12 \quad 1$$

dado que ${}^{12}C_1 = {}^{12}C_{11} = 12$ e ${}^{12}C_2 = {}^{12}C_{10} = 66$.

A soma dos dois elementos escolhidos é superior a $2n = 24$ se pelo menos um desses elementos for escolhido entre o terceiro e o décimo primeiro cujo valor é maior ou igual a 66.

O número de casos favoráveis é ${}^{13}C_2 - {}^{4}C_2 = 78-6=72$ ou ${}^{9}C_2 + 9\times 4 = 36+36=72$.

$P = \frac{72}{78} = \frac{12}{13}$

Resposta: (C)

2. $P(A) = 60\% = 0,6$

$P(B) = P(A) = 0,6$

$P(A|B) = 75\% = 0,75$

$P(A|B) = 0,75 \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0,75 \Leftrightarrow P(A\cap B) = P(B)\times 0,75 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B) = 0,6\times 0,75 \Leftrightarrow P(A\cap B) = 0,45$

$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) =$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A\cap B)] =$

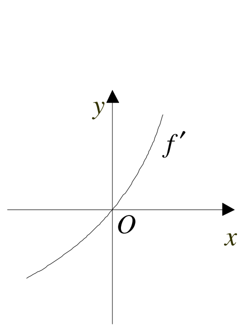
$= 1 - 0,6 - 0,6 + 0,45 = 0,25 = 25\%$

Resposta: (B)

3. $f''(x) = x^2 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Logo, a função f', derivada de f, é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

Se $f'(0)=0$ e f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, então $f'(x)<0$ para todo o $x \in]-\infty, 0[$ e $f'(x)>0$ em $]0, +\infty[$, pelo que a função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	↘	Mín.	↗

Assim, podemos concluir que a função f tem um mínimo relativo para $x=0$.

Resposta: (C)

4. Se a reta de equação $y = 2x - 2$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1, então $f(1) = 0$ e $f'(1) = 2$.

$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h)}{h}$, dado que $f(1) = 0$.

Como $f'(1) = 2$, vem $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h)}{h} = 2$.

Observe-se ainda que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{2x-2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{1}{2} \times f'(1) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

e, se a reta de equação $y = 2$ é assíntota ao gráfico de f $(\text{em} + \infty)$, então

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ e } \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - 2 \right] = 0 .$$

Resposta: (A)

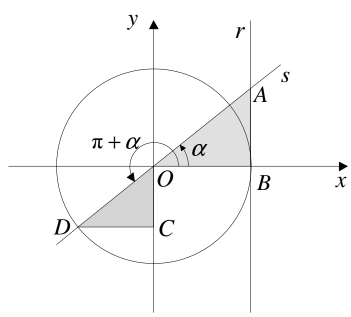
5.
$$z = -\cos\frac{\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7} =$$
$$= -\left(\cos\frac{\pi}{7} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}\right) =$$
$$= -\left[\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right] =$$
$$= -\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{7}\right) = \operatorname{cis}\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

Resposta: (D)

6.
$\overline{AB} = \tan\alpha$

$\overline{OC} = -\sin(\pi + \alpha) = \sin\alpha$

$\overline{DC} = -\cos(\pi + \alpha) = \cos\alpha$



$$A_{[OBA]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{AB}}{2} = \frac{1 \times \tan\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}$$

$$A_{[ODC]} = \frac{\overline{DC} \times \overline{OC}}{2} = \frac{\cos\alpha \times \sin\alpha}{2}$$

$$A_{[OBA]} + A_{[ODC]} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha \times \sin\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\sin\alpha + \cos^2\alpha \sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\left(1 + \cos^2\alpha\right)}{2\cos\alpha}$$

Resposta: (A)

7. $r: \ (x, y, z) = (1, 0, 1) + k(2, 1, 1), \ k \in \mathbb{R}$

$\alpha: \ 2x + ay + bz = 3$

A reta r passa no ponto $A(1, 0, 1)$ e tem a direção do vetor $\vec{r}(2, 1, 1)$.

O vetor $\vec{n}(2, a, b)$ é perpendicular a α.

Se a reta r está contida no plano α, então o ponto A pertence a α e os vetores $\vec{r}$ e $\vec{n}$ são perpendiculares, ou seja, $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$.

$$\begin{cases} A(1, 0, 1) \in \alpha \\ \vec{r} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + a \times 0 + b \times 1 = 3 \\ (2, 1, 1) \cdot (2, a, b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 4 + a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 4 + a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -5 \end{cases}$$

Resposta: (A)

8.
- (u_n) não é uma progressão aritmética porque $u_{n+1} - u_n$ não é constante.
- $u_{1+1} - u_1 = \frac{1}{1} \Leftrightarrow u_2 - u_1 = 1 \Leftrightarrow u_1 = u_2 - 1$

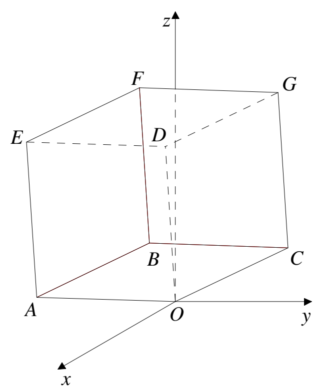
  Portanto, se $u_2 = 2$, então $u_1 = 2 - 1 = 1$.
- $u_{100+1} - u_{100} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow u_{101} - u_{100} = 0{,}01 \Leftrightarrow u_{101} - 0{,}01 = u_{100}$
- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

  Logo, (u_n) é estritamente crescente, pelo que $u_{10} > u_9$.

Resposta: (C)

Grupo II

1. $A(6, -3, 2)$, $E(3, -5, 8)$ e $G(-1, 4, 9)$



1.1. $D = O + \overrightarrow{OD} = O + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AE} = E - A = (3, -5, 8) - (6, -3, 2) = (-3, -2, 6)$

$D = O + \overrightarrow{AE} = (0, 0, 0) + (-3, -2, 6) = (-3, -2, 6)$

1.2. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD} = D - A = (-3, -2, 6) - (6, -3, 2) =$

$= (-9, 1, 4)$

$G(-1, 4, 9)$

Equação vetorial da reta BG:

$(x, y, z) = (-1, 4, 9) + k(-9, 1, 4), k \in \mathbb{R}$

Todo o ponto da reta BG é da forma $(-1 - 9k, 4 + k, 9 + 4k)$, $k \in \mathbb{R}$

O ponto da reta BG que pertence ao plano xOz de equação $y = 0$ é o que se obtém para o valor de k tal que $4 + k = 0 \Leftrightarrow k = -4$.

$(-1 - 9 \times (-4), 4 - 4, 9 + 4 \times (-4)) = (35, 0, -7)$

O ponto P tem coordenadas $(35, 0, -7)$.

1.3. O plano DFG passa no ponto $E(3\,,-5\,,8)$.

O vetor $\overrightarrow{AE}(-3\,,-2\,,6)$ é perpendicular ao plano DFG.

O plano DFG pode ser definido por uma equação do tipo $-3x-2y+6z+d=0$.

Como o ponto $E(3\,,-5\,,8)$ pertence ao plano, tem-se:

$-3\times3-2\times(-5)+6\times8+d=0 \Leftrightarrow -9+10+48+d=0 \Leftrightarrow d=-49$

Uma equação do plano DFG é, portanto, $-3x-2y+6z-49=0$ ou $3x+2y-6z+49=0$.

2.

$$z=\frac{i^{11}(1-i)^4}{2-2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{i^{2\times4+3}\left[\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^4}{2-2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}=$$

$$=\frac{i^3\left(\sqrt{2}\right)^4\operatorname{cis}(-\pi)}{2-2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=\frac{-i\times4\times(-1)}{2-1+\sqrt{3}\,i}=$$

$$=\frac{4i}{1+\sqrt{3}\,i}=\frac{4\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}=2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$$

$$z^n=\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^n=2^n\operatorname{cis}\frac{n\pi}{6}$$

$$z^n\in\mathbb{R}^- \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6}=\pi+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow n=6+12k\,,\ k\in\mathbb{Z}$$

O menor valor de $n\in\mathbb{N}$ para o qual z^n é um número real negativo é $n=6$ e obtém-se para $k=0$.

$u=1-i=|u|\operatorname{cis}\theta$

$|u|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\begin{cases}\tan\theta=\frac{-1}{1}=-1\\ (1\,,-1)\in 4.^{\text{o}}Q\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{4}$ é um argumento de u

$v=1+\sqrt{3}\,i=|v|\operatorname{cis}\alpha$

$|v|=\sqrt{1+3}=2$

$\begin{cases}\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\\ \left(1\,,\sqrt{3}\right)\in 1.^{\text{o}}Q\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3}$ é um argumento de v

3.

3.1. $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PO}}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \overset{\overline{PO}=1}{\Leftrightarrow} \overline{PQ}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

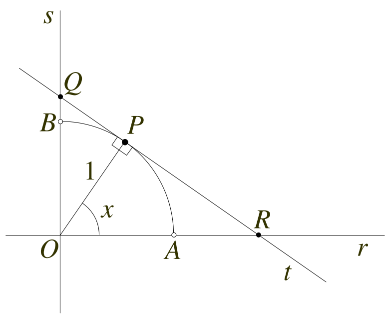
$\frac{\overline{PR}}{\overline{PO}}=\tan x \Leftrightarrow \overline{PR}=\tan x$

$\overline{QR}=\overline{PQ}+\overline{PR}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\tan x$

$$f(x)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=$$

$$=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{2}{2\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin(2x)}$$



3.2. $f'(x)=\dfrac{-2\left[\sin(2x)\right]'}{\sin^2(2x)}=\dfrac{-2\times 2\cos(2x)}{\sin^2(2x)}=\dfrac{-4\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$

$f'(x)=0 \wedge x\in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow -4\cos(2x)=0 \wedge 2x\in \left]0, \pi\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x)=0 \wedge 2x\in \left]0, \pi\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	Mín.	↗	

A distância $\overline{QR}$ é mínima para $x=\dfrac{\pi}{4}$ rad .

4.

4.1. $f'(x)=x^n\,\mathrm{e}^{-x}$, $n\in\mathbb{N}$; $D_f=\left]0,+\infty\right[$

$f''(x)=\left(x^n\,\mathrm{e}^{-x}\right)'=\left(x^n\right)'\mathrm{e}^{-x}+x^n\left(\mathrm{e}^{-x}\right)'=$

$=nx^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}-x^n\,\mathrm{e}^{-x}=nx^n x^{-1}\,\mathrm{e}^{-x}-x^n\,\mathrm{e}^{-x}=$

$=x^n\,\mathrm{e}^{-x}\left(nx^{-1}-1\right)=x^n\,\mathrm{e}^{-x}\left(\dfrac{n}{x}-1\right)=x^n\,\mathrm{e}^{-x}\times\dfrac{n-x}{x}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x^n\,\mathrm{e}^{-x}\times\dfrac{n-x}{x}=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{n-x}{x}=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} n-x=0 \Leftrightarrow x=n$

Como $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $x^n\,\mathrm{e}^{-x}>0$, o sinal de $f''(x)$ depende do sinal do fator $n-x$.

Assim, $f''(x)>0 \Leftrightarrow n-x>0 \Leftrightarrow x<n$ e $f''(x)<0 \Leftrightarrow x>n$.

Portanto, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, n\right[$ e voltada para baixo em $\left]n, +\infty\right[$, pelo que se pode concluir que o ponto de abcissa n é um ponto de inflexão.

4.2. $f'(x)=x^4\,\mathrm{e}^{-x}$

A função f' é contínua em $\left]0,+\infty\right[$ por ser definida pela composta e produto de funções contínuas (função exponencial e funções polinomiais). Logo, f' é contínua em $[1, 2]$.

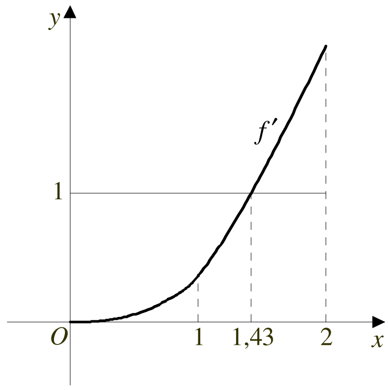
$f'(1)=1^4\times\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}<1$

$f'(2)=2^4\times\mathrm{e}^{-2}=\dfrac{16}{\mathrm{e}^2}>1$ porque $\mathrm{e}^2<3^2<16$

Portanto, como f' é contínua em $[1\,,2]$ e $f'(1) < 1 < f'(2)$, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um ponto c, no intervalo $]1\,,2[$, tal que $f'(c) = 1$, ou seja, existe um ponto do gráfico de f, cuja abcissa pertence ao intervalo $]1\,,2[$, em que a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Recorrendo à calculadora gráfica e considerando as funções $Y_1 = x^4\,\mathrm{e}^{-x}$ e $Y_2 = 1$, determinámos, no intervalo $]1\,,2[$, a abcissa do ponto de interseção dos respetivos gráficos.

A abcissa do ponto é aproximadamente igual a $1{,}43$.



5. $f(x) = 2x - \ln\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$, $D_f =]0\,,+\infty[$

5.1. $f'(x) = 2 - \dfrac{\left(\mathrm{e}^x-1\right)'}{\mathrm{e}^x-1} = 2 - \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^x - 2 - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1} = \dfrac{\mathrm{e}^x-2}{\mathrm{e}^x-1}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^x-2}{\mathrm{e}^x-1} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 2 = 0 \wedge \mathrm{e}^x - 1 \neq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$

- $\mathrm{e}^x - 1 > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^+$
- $\mathrm{e}^x - 2 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$

x	0		$\ln 2$	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$
			Mín.	

$f(\ln 2) = 2\ln 2 - \ln\left(\mathrm{e}^{\ln 2} - 1\right) = 2\ln 2 - \ln(2-1) = 2\ln 2 - 0 = 2\ln 2$

f é estritamente decrescente em $]0\,,\ln 2]$ e estritamente crescente em $[\ln 2\,,+\infty[$.

A função f admite um mínimo relativo (e absoluto) igual a $2\ln 2$ para $x = \ln 2$.

5.2. Assíntotas verticais:

Como f é contínua em $D_f =]0\,,+\infty[$, apenas poderá existir uma assíntota vertical no ponto 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[2x - \ln\left(\mathrm{e}^x - 1\right)\right] = 0 - \ln\left(\mathrm{e}^{0^+} - 1\right) = -\ln 0^+ = -(-\infty) = +\infty$

A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota do gráfico de f.

Assíntotas não verticais $(y = mx + b)$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - \ln(\mathrm{e}^x - 1)}{x} \overset{\left(\frac{\infty-\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^x - 1)}{x} =$$

$$= 2 - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[\mathrm{e}^x\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\right]}{x} = 2 - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \mathrm{e}^x + \ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}{x} =$$

$$= 2 - \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}{x} = 2 - \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}{x} =$$

$$= 2 - 1 - \frac{\ln 1}{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[2x - \ln(\mathrm{e}^x - 1) - x\right] \overset{(\infty-\infty)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x - \ln(\mathrm{e}^x - 1)\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[x - \ln\left(\mathrm{e}^x\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\right)\right] =$$

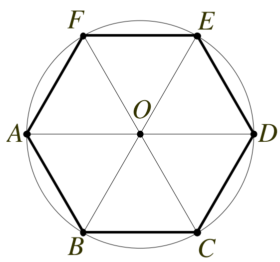
$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x - \ln \mathrm{e}^x - \ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[x - x - \ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\right] =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = -\ln 1 = 0$$

A reta de equação $y = x$ é uma assíntota ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

6. Número de casos possíveis: ${}^7C_3 = 35$

6.1. Número de casos favoráveis.



Para que o triângulo seja retângulo é necessário que um dos lados seja um diâmetro, sendo, assim, o ângulo oposto a esse diâmetro inscrito na semicircunferência e, por isso, um ângulo reto.

Os seis vértices definem três diâmetros: $[AD]$, $[BE]$ e $[CF]$.

Para cada diâmetro há quatro escolhas possíveis para o terceiro vértice.

Logo, há $3 \times 4 = 12$ casos favoráveis.

$$P = \frac{12}{35}$$

6.2. Número de casos favoráveis: ${}^6C_2 - 1 = 15 - 1 = 14$.

Há ${}^6C_2$ maneiras de escolher os restantes dois vértices entre os restantes seis pontos.

Entre estas escolhas temos de excluir o caso $[AOD]$ por não ser um triângulo.

$$P = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$$